รหัสโครงการ SUT1-105-38-12-06

รายงานการวิจัย

การหาค่าพลังงานที่สถานะพื้นของพลาสมารอนสองมิติโดยวิธีเชิงตัวเลข

Calculation of Ground State Energy of Two Dimensional Plasmaron by Numerical Method

ผู้วิจัย

หัวหน้าโครงการ

รองศาสตราจารย์ ดร.สำเนา ผาติเสนะ

สาขาวิชาฟิสิกส์

สำนักวิชาวิทยาศาสตร์

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ปีงบประมาณ 2538

ผลงานวิจัยเป็นความรับผิดชอบของหัวหน้าโครงการวิจัยแต่เพียงผู้เดียว

ธันวาคม 2544

กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ปีงบประมาณ 2538

บทคัดย่อ

แฮมิลโทเนียนของพลาสมารอนสองมิติซึ่งเป็นอิเล็กตรอนที่ห้อมล้อมด้วยพลาสมอนจะกำหนดในเทอมของ Feynman path integral. ได้แสดงให้เห็นว่าค่าโดยประมาณของ propagator สามารถกำหนดได้โดยใช้ระเบียบวิธีที่เรียกว่า cumulant expansion method. หลังจากนั้นได้นำค่าโดยประมาณของ propagator ดังกล่าวไปหาค่าพลังงานสถานะพื้นของพลาสมารอน. มีพารามิเตอร์สองตัวคือ ρ และ E_v ซึ่งปรากฏในสมการของพลังงานสถานะพื้นที่จำเป็นต้องมีการปรับค่าแยกจากกันอย่างเหมาะสมเพื่อให้ได้ค่าพลังงานสถานะพื้นที่แท้จริง อย่างไรก็ตามการหาค่าต่ำสุดที่ต้องใช้พารามิเตอร์ทั้งสองนี้ไม่อาจกำหนดในรูปแบบปิดได้จึงต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข พบว่าสำหรับการคู่ควบอย่างอ่อนหรือเมื่อ $r_s \rightarrow 0$, พลังงานสถานะพื้นจะปรากฏที่ค่า E_v ค่อนข้างมาก แต่เมื่อ r_s มากขึ้นจะปรากฏที่ค่า E_v ที่ลดลง สำหรับการคู่ควบอย่างแรงหรือเมื่อ $r_s \rightarrow \infty$, พลังงานสถานะพื้นจะเป็นบวกเสมอสำหรับทุกค่าของ E_v นอกจากนี้ยังพบว่าค่าของ ρ ในพิสัย 1-2 เท่านั้น เป็นค่าที่เหมาะสม

Abstract

The Fröhlich – type Hamiltonian of two dimensional plasmaron, the dressing of electron by virtual plasmons, is formulated in terms of Feynman path integral. It is shown that the average propagator can be evaluated using the so-called cumulant expansion method. The average propagator is then used to obtain the ground state energy of the plasmaron. Two parameters ρ and E_v of the ground state energy have to be varied separately to yield the actual ground state energy. However, minimizing with these two parameters cannot be in closed forms and numerical method must be employed. It is shown that for weak coupling, $r_s \to 0$, the ground state energy will reach when the parameter E_v is rather high. For higher r_s , the lower E_v is required to yield ground state energy. For strong coupling, $r_s \to \infty$, the ground state energies are always positive for all values of E_v. It is also found that only the range of ρ between 1 and 2 that is suitable.

สารบัญ

1. บทนำ

คำว่า "พลาสมารอน (plasmaron)" เป็นคำที่เริ่มใช้เรียกอิเล็กตรอนที่ถูกห้อมล้อมหรือปรากฏคู่ควบไปกับพลาสมอน (plasmons) การคู่ควบอิเล็กตรอน-พลาสมอนในของแข็งได้มีการนำเสนอโดย Bohm-Pines[1]. ต่อมาได้มีการพัฒนาวิธีการอื่นๆ เพื่อให้ได้ผลลัพธ์เช่นกันคือ โดยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน (perturbation method) โดย Gell-Mann และ Brueckner[2], วิธีของไดอิเล็กทริก (dielectric formulation) โดย Nozieres และ Pines[3], และวิธีของ many-body problems[4].

วิธีที่น่าสนใจซึ่งใช้การประมาณที่เรียกย่อว่า RPA (random phase approximation) คือวิธีของ Lundqvist[s]. เขากำหนดอันตรกิริยาใน Hamiltonian โดยใช้รูปแบบของ Fröhlich ซึ่งใช้กับปัญหาของโพลารอน (polaron). ความจริงแล้ว Lundqvist ใช้คำว่าพลาสมารอนในความหมายแคบ คือ สถานะที่เรียกว่า resonant hole-real plasmon state และแยกผลดังกล่าวที่แตกต่างจากผลของอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนและพลาสมอนเสนอโดย Bohm-Pines. อย่างไรก็ตามในกรณีของโพลารอน, คำว่าโพลารอนเป็นคำที่ใช้อธิบายอิเล็กตรอนที่ถูกห้อมล้อมด้วยโฟนอน (phonon) ซึ่งต่อมาใช้กับกรณีซึ่งการคู่ควบนี้นำไปสู่การผลิตโฟนอน ดังนั้น เราจึงมักเรียกผลต่างๆ ที่เกิดจากอันตรกิริยาอิเล็กตรอน-พลาสมอนในรูปแบบของ Fröhlich ว่าเกิดจากอันตรกิริยาพลาสมารอน

ศ.ดร.วิรุฬห์ สายคณิต และคณะ [6] ใช้วิธีที่เรียกว่า Feynman's path integral แก้ปัญหาพลาสมารอนในสามมิติ โดยสมมติว่าความหนาแน่นของอิเล็กตรอนกำหนดจาก RPA และ Hamiltonian ของระบบยังคงใช้รูปแบบของ Fröhlich ในลักษณะที่เรียกว่า second quantization form และได้คำนวณเชิงวิเคราะห์หาค่าพลังงานสถานะพื้นของพลาสมารอนสามมิติ กรณีการคู่ควบอย่างอ่อน (weak coupling) จะเกิดขึ้นเมื่อความหนาแน่นของอิเล็กตรอนสูงมากจนพลังงานจลน์มีค่ามากกว่าพลังงานศักย์มาก ในกรณีเช่นนี้ พลังงานสถานะพื้นในหน่วย Ry(rydberg units) ประกอบด้วยเทอมคงตัวและเทอมเอกฐาน (singular term), $r_s^{-3/4}$, ซึ่งเทียบได้กับผลการคำนวณของ Gell-Mann และ Brueckner. อย่างไรก็ตาม, เทอมแลกเปลี่ยน (exchange term), $0.196/r_s$, จะไม่ปรากฏเนื่องจากเราพิจารณาทฤษฎีอิเล็กตรอนเดี่ยว (one-electron theory). นอกจากนี้เทอมพลังงานจลน์, $2.21/r_s^2$ จะหายไปเพราะเป็นพลังงานสถานะพื้นของอิเล็กตรอนเดี่ยว

ในกรณีการคู่ควบอย่างแรง (strong coupling) ซึ่งเป็นกรณีตรงกันข้าม, ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนจะน้อยมากจนพลังงานศักย์โดดเด่นกว่าพลังงานจลน์ และการประมาณโดยวิธี RPA อาจใช้ไม่ได้ในบางแห่ง พลังงานสถานะพื้นของระบบมีค่าเท่ากับ $-0.62/r_s$ ในหน่วย ry ซึ่งอยู่ในระดับขนาดเดียวกับเทอมสหสัมพันธ์ของวิกเนอร์ (Wigner correlation term) คือ $-0.88/r_s$ (ry).

สำหรับปัญหาเกี่ยวกับพลาสมารอนสองมิติ (two dimensional plasmaron), เนื่องจาก dispersion relation ที่แตกต่างจากกรณีสามมิติ, รูปแบบของพลังงานสถานะพื้นอาจแตกต่างออกไป และควรเปรียบเทียบกับผลงานการวิจัยของนักฟิสิกส์อื่นๆ Stern[7] เป็นคนแรกที่คำนวณค่า lowest-order polarizability สำหรับแก๊สอิเล็กตรอนสองมิติโดยใช้ RPA ซึ่งเป็นอุปมาน (analog) สองมิติของฟังก์ชันที่รู้จักกันดีคือ Lindhard function. เขาพบว่า plasmon dispersion มีรูปแบบ $k^{1/2}$ เมื่อเลขคลื่น (wave number), k, เข้าใกล้ศูนย์ จากผลงานของเขาทำให้มีการปรับปรุงวิธี RPA ให้ดียิ่งขึ้น ผลงานที่สำคัญคือผลงานของ Rajagopal [8] และ Jonson [9] Rajagopal ได้หาค่า polarizability โดยคิดเฉพาะกระบวนการแลกเปลี่ยนเท่านั้นและพบว่าสามารถกระจายในรูปอนุกรมยกกำลังของ $\left(k_F k / mw\right)$ โดยที่ k_F คือ Fermi wave vector ดังนั้น เขาจึงหาค่าแก้ไขที่เกิดจากการแลกเปลี่ยนเท่านั้นของ plasmon dispersion Jonson ได้ขยายเพิ่มเติมวิธีการที่เรียกว่า self-consistent scheme ซึ่งเป็นผลงานของ Singwi, Tosi, Land และ Sjolander [10] สำหรับกรณีสองมิติ และพบว่าการประมาณทั้ง RPA และ HA (Hubbard approximation) ให้ผลที่ไม่น่าพอใจเท่ากรณีสามมิติ สำหรับค่า r_S ที่กำหนด, เนื่องจากอัตราส่วนของพลังงานแลกเปลี่ยนต่อพลังงานจลน์มีค่ามากในสองมิติเมื่อเทียบกับในสามมิติ ดังนั้น สหสัมพันธ์จึงมีความสำคัญมากในกรณีสองมิติ

การใช้วิธี path integral แก้ปัญหาต่างๆ เป็นที่นิยมกันอย่างกว้างขวาง ในช่วง 50 ปี ที่ผ่านมาได้มีการประยุกต์วิธีการนี้กับปัญหาที่หลากหลายทางฟิสิกส์ ปัญหาหลักในที่นี้คือ การอุปมานระหว่าง Feynman path integral ของพลาสมารอนสองและสามมิติโดยเน้นไปที่พลังงานสถานะพื้น

ขั้นตอนการวิจัยมีดังนี้ ในหัวข้อที่ 2 เป็นการแนะนำเทคนิคของ path integral และกำหนดสมการสำหรับ propagator ของพลาสมารอน การหาค่าโดยประมาณของ propagator จะแสดงในหัวข้อที่ 3 สำหรับหัวข้อที่ 4 เป็นการหาพลังงานสถานะพื้นของพลาสมารอนสองมิติในเทอมของพารามิเตอร์ 2 ตัว ผลที่ได้ไม่อาจกำหนดในรูปแบบปิด (closed forms) ซึ่งจะต้องหาโดยวิธีเชิงตัวเลขและแสดงในหัวข้อที่ 5

2. เทคนิคของ path integral

แฮมิลโทเนียน (Frölhlich - type Hamiltonian)ของระบบพลาสมารอนสองมิติในรูปของ second quantization กำหนดโดย

$$H = \frac{p^2}{2m} + \sum_{\bar{k}} \hbar\omega(k)\left(a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\right) + \sum_{k} \sqrt{\frac{\hbar}{A}} g_k e^{i\bar{k}.\bar{x}}\left(a_{-k}^+ + a_k\right) \qquad (1)$$

โดยที่ $\bar{x}$ คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของอิเล็กตรอน, $\bar{p}$ คือโมเมนตัมสังยุค (conjugate momentum) ของ $\bar{x}$. a_k^t และ a_k เป็นตัวดำเนินการรังสรรค์และประลัย (creation and annihilation operators) ของพลาสมอนด้วยโมเมนตัม k. A คือพื้นที่ของระบบและ $\omega(k)$ เป็นความถี่ของพลาสมอนที่กำหนดจากสมการ dispersion law

$$\omega^2(k) = \frac{2\pi ne^2}{m}k + \frac{3}{4}V_F^2k^2 = \frac{2\pi ne^2}{m}k\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)k\right] \tag{2}$$

n คือ ความหนาแน่นเชิงผิว (areal density) ของระบบด้วยความเร็วเฟร์มี (Fermi velocity) $v_F = \hbar k_{F/m}$ และ $k_F^2 = 2\pi n$

ค่าคงตัวของการคู่ควบ, g_k, ระหว่างอิเล็กตรอนและพลาสมอน กำหนดโดย

$$|g_k|^2 = \frac{2\pi e^2}{k}\left(\frac{1}{\partial \in(k,\omega)/\partial\omega}\right)_{\omega = \omega(k)}$$

$$= \frac{2\pi e^2}{k}\frac{\omega_P^2(k)}{2\omega(k)} \tag{3}$$

โดยที่

$$\omega_P^2(k) = \frac{2\pi ne^2}{m}k \tag{4}$$

และ $\in(k,\omega)$ คือ dielectric function ซึ่งสอดคล้องกับ sum rules.

เนื่องจากเราจะใช้วิธีการทาง Feynman path integral, เราจึงต้องแปลงสมการ (1) ให้อยู่ในรูปของ first quantization โดยกำหนดพิกัด $\bar{q}_k$ และโมเมนตัมสังยุค $\bar{p}_k$ เป็น

$$\bar{q}_k = [\hbar / 2m\omega(k)]^{1/2}(a_k + a_k^+)$$

$$\bar{p}_k = [m\omega(k)\hbar / 2]^{1/2}\left(\frac{a_k - a_k^+}{i}\right)$$

และ

$$\hbar\omega(k)\left(a_k^+a_k+\frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar\omega(k)}{2}\left(a_k^+a_k+a_ka_k^+\right)$$

$$= \frac{p_k^2}{2m}+\frac{m}{2}\omega^2(k)q_k^2$$

แฮมิลโทเนียนในสมการ (1) จึงกลายเป็น

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2m}+\sum_k \frac{m}{2}\left(\dot{q}_k^2+\omega^2(k)q_k^2\right)+\sum_k\sqrt{\frac{\hbar}{A}}g_k e^{i\bar{k}.\bar{x}}\left(2m\omega(k)/\hbar\right)^{1/2}\bar{q}_k \qquad (5)$$

และ Lagrangian ที่สมนัยกันคือ

$$L = \frac{\bar{p}^2}{2m}+\sum_k \frac{m}{2}\left(\dot{q}_k^2-\omega^2(k)q_k^2\right)-\sum_k\left(2m\omega(k)/A\right)^{1/2}g_k\bar{q}_k e^{i\bar{k}.\bar{x}} \qquad (6)$$

Propagator ของพลาสมารอนสามารถเขียนได้เป็น

$$G(\bar{x},\bar{x}',\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_k,\ldots;t) \equiv \langle \bar{x},\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_k,t;\bar{x}',\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_k,0\rangle$$

$$= \int_{x(0)=x'}^{x(t)=x} D[x(\tau)]\int_{\bar{q}_1(0)=\bar{q}_1}^{\bar{q}_1(t)=q_1} D[\bar{q}_1(\tau)]\ldots\int_{\bar{q}_k(0)=\bar{q}_k}^{\bar{q}_k(t)=q_k} D[\bar{q}_k(\tau)]e^{iS/\hbar} \qquad (7)$$

โดยที่ Action S คือ

$$S = \int_0^t d\tau\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2(\tau)+\sum_k\frac{1}{2}m\left(\dot{q}_k^2(\tau)-\omega^2(k)q_k^2(\tau)\right)-\sum_k\left(2m\omega(k)/A\right)^{1/2}g_k\bar{q}_k(\tau)e^{i\bar{k}.\bar{x}(\tau)}\right] \qquad (8)$$

อินทิกรัลทั่วพิกัด $\bar{q}_k$ ของพลาสมอนจะคล้ายกับกรณีตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกแบบบังคับ (forced harmonic oscillator [11]) ซึ่งมี Lagrangian เท่ากับ $\frac{m}{2}\left[\dot{q}^2(\tau)-\omega^2q^2(\tau)\right]+f(\tau)q(\tau)$ โดยที่ $f(\tau)$ เป็น time dependent force. ในกรณี

สองมิติ, องค์ประกอบเดี่ยวของพิกัดพลาสมอน ของฟังก์ชันการแปลง (transformation function) คือ

$$K(q_k, t; q_k, 0) = \frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega t} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_{clk}\right] \tag{9}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} S_{clk} = \frac{m\omega(k)}{2\sin\omega(k)t}\Big[& 2q_k^2(\cos\omega(k)t - 1) \\ & + \frac{2q_k}{m\omega(k)} \int_0^t f_k(\tau)\{\sin\omega(k)\tau + \sin\omega(k)(t-\tau)\}d\tau \\ & - \frac{2}{m^2\omega^2(k)} \int_0^t\int_0^\tau f_k(\tau) f_k(\sigma) \sin\omega(k)(t-\tau)\sin\omega(k)\sigma d\sigma d\tau \Big] \end{aligned} \tag{10}$$

และ

$$f_k(\tau) = (2m\omega(k)/A)^{1/2} g_k e^{i\bar{k}.\bar{x}(\tau)} \tag{11}$$

การแปลงทั่ว $\bar{q}_k$ จะให้

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(q_k, t; q_k, o) d\bar{q}_k$$

$$= \left[2i\sin\frac{\omega(k)t}{2}\right]^{-2} \exp\left\{(i/4\hbar m\omega(k)) \int_o\int_o d\tau d\sigma \left[\frac{\cos\omega(k)\left[\frac{t}{2} - (\tau-\sigma)\right]}{\sin[\omega(k)t/2]}\right]\lambda_k\right. \tag{12}$$

โดยที่
$$\lambda_k = \frac{2m\omega(k)}{A} g_k^2 \exp\{i\bar{k}.[\bar{x}(\tau) - \bar{x}(\sigma)]\} \tag{13}$$

ฟังก์ชันการแปลงสำหรับอิเล็กตรอนและพลาสมอนจึงเป็น

$$\langle x,t;x',o\rangle = \int \langle \bar{x},\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_k,t;\bar{x}',\bar{q}_1,\ldots,\bar{q}_k,o\rangle d\bar{q}_1 d\bar{q}_2\ldots d\bar{q}_k$$

$$= \prod_k \left[2i\sin\frac{\omega(k)t}{2}\right]^{-2} \int_{x(o)=x'}^{x(t)=x} D[x(\tau)]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_o^t \frac{m}{2}\dot{x}^2(\tau)d\tau\right.$$

$$\left. + \frac{i}{\hbar}\sum_k \frac{\lambda'_k}{4m\omega(k)}\int_o^t\int_o^t d\tau d\sigma\left\{\frac{\cos\omega(k)\left[\frac{t}{2}-(\tau-\sigma)\right]}{\sin[\omega(k)t/2]}\right\}\exp\{i\bar{k}.[\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)]\}\right] \qquad (14)$$

โดยที่

$$\lambda'_k = \frac{2m\omega(k)}{A}g_k^2$$

และ

$$\frac{\lambda'_k}{4m\omega(k)} = \frac{\pi e^2\omega_p^2(k)}{2Ak\omega(k)} = \frac{\pi^2 ne^4}{mA\omega(k)} \qquad (15)$$

จากการแปลงผลรวมเป็นอินทิเกรต,

$$\sum_k \longrightarrow \frac{A}{4\pi^2}\int_o^\infty 2\pi k dk$$

ดังนั้น

$$\sum_k \frac{\lambda'_k}{4m\omega(k)} = \frac{\pi ne^4}{2m}\int_o^\infty \frac{kdk}{\omega(k)}$$

$$\langle x,t;x',o\rangle$$

$$= \prod_k \left[2i\sin(\omega(k)t/2)\right]^{-2} \int_{x(o)=x'}^{x(t)=x} D[x(\tau)]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_o^t \frac{m}{2}\dot{x}^2(\tau)d\tau\right.$$

$$\left. + \frac{i}{\hbar}\frac{\pi ne^4}{2m}\int_o^\infty \frac{kdk}{\omega(k)}\int_o^t\int_o^t d\tau d\sigma\left\{\frac{\cos\omega(k)\left[\frac{t}{2}-(\tau-\sigma)\right]}{\sin[\omega(k)t/2]}\right\}\exp\{i\bar{k}.[\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)]\}\right] \qquad (16)$$

propagator $G(x, x'; t)$ ก็คือ $\langle x, t \; , x', 0\rangle$ ที่ปราศจากแฟกเตอร์ $i/\hbar$ นั่นคือ

$$G(x,x';t) = \int_{x'}^{x} D[x(\tau)] e^{\frac{i}{\hbar}S_p} \tag{17}$$

โดยที่ plasmaron action S_p นิยามโดย

$$S_p = \int_0^t \frac{m}{2}\dot{x}^2(\tau)d\tau$$

$$+\frac{\pi n e^{+}}{2m}\int_0^t\int_0^t d\tau d\sigma \int_0^\infty \frac{kdk}{\omega(k)} \frac{\cos\left[\omega(k)\left(\frac{t}{2}-(\tau-\sigma)\right)\right]}{\sin[\omega(k)t/2]} \exp\{i\bar{k}.[\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)]\} \tag{18}$$

3. การหาค่าโดยประมาณของ propagator

โดยธรรมชาติของรูปแบบของ Lagrangian หรือ Hamiltonianที่ค่อนข้างซับซ้อนมักทำให้การคำนวณโดยวิธี path integral ได้ค่าที่ไม่ค่อยจะแม่นตรง ดังนั้นจึงเป็นไปไม่ได้ที่จะหาค่าแม่นตรงของปริมาณทางฟิสิกส์ที่ต้องการและจำเป็นต้องใช้วิธีการประมาณพร้อมทั้งค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น การประมาณที่มักใช้กันโดยทั่วไปคือการประมาณที่เรียกว่า cumulant expansion method.

ขั้นแรกของการประมาณโดยวิธีนี้คือ การเขียน action $S = S_0 + \tilde{S}_1$. โดยทั่วไป S_0 หมายถึง “trial action” และมักเลือกเพื่อให้ได้ propagator G_0 ที่แม่นตรงและทราบค่าปัญหาโดยส่วนใหญ่จึงมักเกี่ยวข้องกับพารามิเตอร์ ซึ่งมีค่าน้อยเมื่อเทียบกับปริมาณอื่นๆ ที่ปรากฏใน S. สมมติให้ $\tilde{S}_1 = \alpha S_1$, การกระจาย cumulant สำหรับ propagator G คือ

$$G = G_o \exp\left[i\alpha G_1 + i\alpha^2 G_2 + \ldots + i\alpha^n G_n + \ldots\right] \tag{19}$$

โดยที่ G_n คือ Cumulant อันดับที่ n. สำหรับการหาค่า $G_1, G_2, ..., G_n$ เราจะกระจาย G เป็นอนุกรมยกกำลัง α แล้วเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของกำลัง α ค่าต่างๆ. สำหรับสองค่าแรกคือ

$$G_1 = \frac{1}{G_o}\int (S - S_o)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_o\right\}D[x(t)] \tag{20}$$

$$G_2 = \frac{1}{2i}\left[G_1^2 - \frac{1}{G_o}\int (S - S_o)^2 \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_o\right\}\right]D[x(t)] \tag{21}$$

ส่วน cumulants อันดับอื่นๆ สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน. อย่างไรก็ตาม, โดยปรกติแล้ว G_1 ซึ่งเป็น cumulant อันดับที่ 1 ก็เพียงพอแล้วสำหรับการหาค่าประมาณต่างๆ. ดังนั้น เทอมแรก G_1 ข้างต้นสามารถเขียนได้เป็น

$$G_1 = \langle S - S_o \rangle \tag{22}$$

โดยที่สัญลักษณ์ $\langle A \rangle$ หมายถึงค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดคะเน (expectation value) ของ A เมื่อเทียบกับ trial action S_0. ดังนั้น การประมาณโดย cumulant อันดับที่หนึ่งของ G จึงเป็น

$$G = G_o \exp\left[\frac{i}{\hbar}\langle S - S_o \rangle\right] \tag{23}$$

ในกรณีพลาสมารอนสองมิติ, propagator $G(x, x'; t)$ สามารถกระจายเป็น

$$G(x, x'; t) = G_o(x, x'; t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\langle S_p - S_o \rangle_{S_o}\right] \tag{24}$$

โดยที่

$$G_o(x, x'; t) = \int_{x'}^{x} D[x(\tau)]\exp\left[\left(i/\hbar\right)S_o(\kappa, \Omega)\right] \tag{25}$$

และค่าเฉลี่ยทั่ว S_0 หรือ $\langle O \rangle_{S_0}$ นิยามโดย

$$\langle O \rangle_{S_o} = \frac{\int_{x'}^{x} D[x(\tau)]\, O \exp\left[\left(i/\hbar\right)S_o(\kappa, \Omega)\right]}{\int_{x'}^{x} D[x(\tau)]\exp\left[\left(i/\hbar\right)S_o(\kappa, \Omega)\right]} \tag{26}$$

พิจารณา trial action [12],

$$S_o(\kappa,\Omega)=\int_0^t d\tau\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2(\tau)-\frac{1}{8}\kappa\Omega\int_0^t d\sigma\left|x(\tau)-x(\sigma)\right|^2\frac{\cos\Omega\left(t/2-|\tau-\sigma|\right)}{\sin\frac{\Omega t}{2}}\right] \tag{27}$$

โดยที่ κ และ Ω คือ พารามิเตอร์ที่จะต้องหาค่า เราสามารถหาค่า G ได้ถ้าเราหาค่าของ G_0 และ $\left\langle S_p-S_0\right\rangle_{S_0}$ ได้.

พิจารณาการหาค่า $\left\langle S_p-S_0\right\rangle_{S_0}$ โดยที่

$$\left\langle S_p-S_o\right\rangle=\left\langle S_p\right\rangle_{S_o}-\left\langle S_o\right\rangle_{S_o} \tag{28}$$

การหาค่าเฉลี่ยนี้เราใช้ generating functional [12, 13],

$$\left\langle \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^t d\tau f(\tau).x(\tau)\right\}\right\rangle_{S_o}$$

$$=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left\{x\int_0^t d\tau f(\tau)\left[\frac{\mu}{m}\left(\frac{\sin\nu\tau}{\sin\nu t}-\sin\frac{\nu}{2}(t-\tau)\sin\frac{\nu\tau}{2}\right)+\frac{\mu\tau}{Mt}\right]\right.\right.$$

$$+x'\int_0^t d\tau f(\tau)\left[\frac{\mu}{m}\left(\frac{\sin\nu(t-\tau)}{\sin\nu t}-\sin\frac{\nu}{2}(t-\tau)\sin\frac{\nu\tau}{2}\right)+\frac{\mu(t-\tau)}{Mt}\right]$$

$$-\int_0^t\int_0^t d\tau d\sigma f(\tau)\cdot f(\sigma)\left[\frac{\mu}{m^2\nu\sin\nu t}\left(\sin\nu(t-\tau)\sin\nu\sigma\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.-4\sin\frac{\nu}{2}(t-\tau)\sin\frac{\nu\tau}{2}\sin\frac{\nu}{2}(t-\sigma)\sin\frac{\nu\sigma}{2}\right)+\frac{\mu}{M}(t-\tau)\frac{\sigma}{t}\right]\right\}\right]$$

(29)

โดยที่ $f(\tau)$ เป็นฟังก์ชันไม่เจาะจง (arbitrary function) ของ τ. M คือ มวลสมมติและ $\mu = \frac{mM}{m+M}$ คือมวลลดทอน (reduced mass).

เนื่องจากเทอมจลน์ (kinetic terms) ใน S_p และ S_0 จะหักล้างกันไปเสมอ, เราจึงให้ $\langle S_p \rangle_{S_0}$ และ $\langle S_0 \rangle_{S_0}$ เป็นค่าเฉลี่ยของเทอมที่สองตามลำดับ

ค่าเฉลี่ย $\langle \exp[i\bar{k}\cdot((\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma))] \rangle_{s_0}$ สามารถกระจายใน cumulant และเนื่องจาก S_0 เป็นฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic), cumulant สองค่าแรกเท่านั้นที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\left\langle \exp\left[i\bar{k}\cdot\left(\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right)\right]\right\rangle_{S_o}$$

$$= i\bar{k}.\left\langle\left[\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right]\right\rangle_{S_o} - \frac{1}{2}k^2\left[\frac{1}{2}\left\langle\left(\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right)^2\right\rangle_{S_o} - \left\langle\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right\rangle_{S_o}^2\right] \tag{30}$$

และ

$$\left\langle S_p\right\rangle_{S_o} = \frac{\pi n e^4}{2m}\int_0^t\int_0^t d\tau d\sigma\int_0^\infty \frac{kdk}{\omega(k)}\left[\frac{\cos\left[\omega(k)(t/2-|\tau-\sigma|\right]}{\sin\left[\omega(k)t/2\right]}\right]\exp\Big\{i\bar{k}\cdot\left\langle\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right\rangle_{S_o}$$

$$-\frac{1}{2}k^2\left[\frac{1}{2}\left\langle\left(\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right)^2\right\rangle_{S_o} - \left\langle\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right\rangle_{S_o}^2\right]\Big\} \tag{31}$$

เราจำเป็นต้องหาค่า $\langle \bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\rangle_{s_0}$ และ $\left[\frac{1}{2}\left\langle \bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)^2\right\rangle_{s_0} - \left\langle\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right\rangle_{s_0}^2\right]$

ค่าเฉลี่ยเหล่านี้สามารถกำหนดในเทอมของค่าเฉลี่ย $\left\langle \bar{x}(\tau) \right\rangle_{s_0}$ และ $\left\langle \bar{x}(\tau)' \cdot \bar{x}(\sigma) \right\rangle_{s_0}$. ค่าเฉลี่ยดังกล่าวหาได้จาก characteristic functional ของ $\left\langle \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau f(\tau) . x(\tau) \right\} \right\rangle_{s_0}$ จาก Feynman and Hibbs [11], characteristic functional ดังกล่าวสามารถเขียนได้เป็น

$$\left\langle \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_o^t d\tau \bar{f}(\tau) . \bar{x}(\tau) \right] \right\rangle_{S_o}$$

$$= \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ S'_{o,c\ell}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1; t, \omega) - S_{o,c\ell}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1; t, \omega) \right\} \right] \tag{32}$$

โดยที่ $S'_{o,c\ell}$ และ $S_{o,c\ell}$ เป็น classical actions. เมื่อหาค่า $S_{o,c\ell}$ ได้แล้ว เราสามารถนำค่าที่ได้ไปหาค่า $S'_{o,c\ell}$ ต่อไปโดยให้ $f(\tau)$ เท่ากับศูนย์. ค่าเฉลี่ย $\left\langle \bar{x}(\tau) \right\rangle_{s_0}$ หาได้จากอนุพันธ์ของ $S'_{o,c\ell}$ เทียบกับ $f(\tau)$ คือ

$$\left\langle \bar{x}(\tau) \right\rangle_{S_o} = \left. \frac{\delta S'_{o,c\ell}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1;\, t,\, \omega)}{\delta f(\tau)} \right|_{f(\tau)=0} \tag{33}$$

และเมื่อหาอนุพันธ์ต่อไปจะได้

$$\left\langle \bar{x}(\tau) . \bar{x}(\sigma) \right\rangle_{S_o}$$

$$= \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\delta^2 S'_{o,c\ell}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1;\, t,\, \omega)}{\delta f(\tau) . \delta f(\sigma)} + \frac{\delta S'_{o,c\ell}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1;\, t,\, \omega)}{\delta f(\tau)} \frac{\delta S'_{o,c\ell}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1;\, t,\, \omega)}{\delta f(\sigma)} \right]_{f(\tau)=0} \tag{34}$$

$$\left\langle \bar{x}(\tau) - \bar{x}(\sigma) \right\rangle_{S_o}$$

$$= \frac{\mu}{m}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\left[\frac{\sin\frac{\nu}{2}(\tau-\sigma)\cos\frac{\nu}{2}\left[t-(\tau-\sigma)\right]}{\sin(\nu t/2)} + \frac{m}{M}\left(\frac{\tau-\sigma}{t}\right)\right] \quad (35)$$

เมื่อ $\tau > \sigma$;

$$\left\langle \bar{x}(\tau) \bullet \bar{x}(\sigma) \right\rangle_{S_o}$$

$$= \left[2\frac{\hbar}{i}\frac{\mu}{m}\left\{\frac{1}{m\nu\sin\nu t}\left[\sin\nu(t-\tau)\sin\nu\sigma - 4\sin\nu\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\sin\frac{\nu\tau}{2} + \sin\nu\left(\frac{t-\sigma}{2}\right)\sin\frac{\nu\sigma}{2}\right]\right.\right.$$

$$\left. + \frac{(t-\tau)\sigma}{Mt}\right\} + \frac{\mu^2}{m^2}\left\{x_2\left(\frac{\sin\nu\tau}{\sin\nu t} - \frac{\sin\nu\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu\tau}{2}\right)}{\cos(\nu t/2)} + \frac{m}{M}\frac{\tau}{t}\right)\right.$$

$$\left. + x_1\left(\frac{\sin\nu(t-\tau)}{\sin\nu t} - \frac{\sin\nu\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu\tau}{2}\right)}{\cos(\nu t/2)} + \frac{m}{M}\left(\frac{t-\tau}{t}\right)\right)\right\}\left\{x_2\left(\frac{\sin\nu\sigma}{\sin\nu t} - \frac{\sin\nu\left(\frac{t-\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu\sigma}{2}\right)}{\cos(\nu t/2)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{m}{M}\frac{\sigma}{t}\right) + x_1\left(\frac{\sin\nu(t-\sigma)}{\sin\nu t} - \frac{\sin\nu\left(\frac{t-\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu\sigma}{2}\right)}{\cos(\nu t/2)} + \frac{m}{M}\left(\frac{t-\sigma}{t}\right)\right)\right\}\right]$$

$$(36)$$

โดยที่แฟกเตอร์ 2 ในวงเล็บแรกมาจากสององค์ประกอบของพิกัด. ดังนั้น ค่าเฉลี่ย $\left\langle \left(\vec{x}(\tau)-\vec{x}(\sigma)\right)^2 \right\rangle_{S_0}$ จึงกลายเป็น

$$\left\langle \left(\vec{x}(\tau) - \vec{x}(\sigma)\right)^2 \right\rangle_{S_0} = \left\langle \vec{x}^2(\tau) \right\rangle_{S_0} - 2\left\langle \vec{x}(\tau)\vec{x}(\sigma) \right\rangle_{S_0} + \left\langle \vec{x}^2(\sigma) \right\rangle_{S_0}$$

$$= -2\frac{\hbar}{i}\frac{\mu}{m}\Big[(m\nu\sin\nu t)^{-1}\Big\{\big[\sin\nu(t-\tau)\sin\nu\tau - 2\sin\nu(t-\tau)\sin\nu\sigma + \sin\nu(t-\sigma)\sin\nu\sigma\big]$$

$$-4\left[\sin\nu\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu\tau}{2}\right) - \sin\nu\left(\frac{t-\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu\sigma}{2}\right)\right]^2\Big\}$$

$$+\frac{1}{Mt}\big[(t-\tau)\tau - 2(t-\tau)\sigma + (t-\sigma)\sigma\big]\Big]$$

$$+\left[x_2\frac{\mu}{m}\left\{\left(\frac{\sin\nu\tau}{\sin\nu t} - \frac{\sin\nu\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu\tau}{2}\right)}{\cos(\nu t/2)}\right) + \frac{m}{M}\frac{\tau}{t} - \left(\frac{\sin\nu\sigma}{\sin\nu t} - \frac{\sin\nu\left(\frac{t-\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu\sigma}{2}\right)}{\cos(\nu t/2)}\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{m}{M}\frac{\sigma}{t}\right\} + x_1\frac{\mu}{m}\left\{\left(\frac{\sin\nu(t-\tau)}{\sin\nu t} - \frac{\sin\nu\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu\tau}{2}\right)}{\cos(\nu t/2)}\right) + \frac{m}{M}\left(\frac{t-\tau}{t}\right)\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\sin\nu(t-\sigma)}{\sin\nu t} - \frac{\sin\nu\left(\frac{t-\sigma}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu\sigma}{2}\right)}{\cos(\nu t/2)}\right) - \frac{m}{M}\left(\frac{t-\sigma}{2}\right)\right\}\right]^2 \tag{37}$$

วงเล็บแรกมีค่าเท่ากับ

$$2i\frac{\hbar\,\mu}{m}\left[\frac{2\sin\nu\left(\frac{\tau-\sigma}{2}\right)\sin\nu\left[\left(t-(\tau-\sigma)\right)/2\right]}{m\nu\sin(\nu t/2)}+\frac{1}{Mt}(\tau-\sigma)\left(t-(\tau-\sigma)\right)\right]$$

วงเล็บที่เกี่ยวกับ x_2 คือ

$$\{-----\}=\frac{\sin\nu\left(\frac{\tau-\sigma}{2}\right)\cos\nu\left[\frac{t-(\tau+\sigma)}{2}\right]}{\sin(\nu t/2)}$$

วงเล็บที่เกี่ยวกับ x_1 คือ

$$\{-----\}=\frac{-\sin\nu\left(\frac{\tau-\sigma}{2}\right)\cos\nu\left[\frac{t-(\tau+\sigma)}{2}\right]}{\sin(\nu t/2)}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\left\langle\left(\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right)^2\right\rangle_{S_o}$$

$$=\frac{1}{2}\left[2i\frac{\hbar\,\mu}{m}\left\{\frac{2\sin\nu\left(\frac{\tau-\sigma}{2}\right)\sin\nu\left[\frac{t-(\tau-\sigma)}{2}\right]}{m\nu\sin(\nu t/2)}+\frac{1}{Mt}(\tau-\sigma)\left(t-(\tau-\sigma)\right)\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{\mu^2}{m^2}\left\{\frac{\sin\nu\left(\frac{\tau-\sigma}{2}\right)\cos\nu\left(\frac{t-(\tau-\sigma)}{2}\right)}{\sin(\nu t/2)}+\frac{m}{M}\left(\frac{\tau-\sigma}{t}\right)\right\}^2\left(\bar{x}_2-\bar{x}_1\right)^2\right] \qquad (38)$$

และ

$$\left\langle\left(\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right)\right\rangle_{S_o}^{2}=\left[\left\langle\left(\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right)\right\rangle_{S_o}\right]^{2}$$

$$=\frac{\mu^2}{m^2}\left\{\frac{\sin\nu\left(\frac{\tau-\sigma}{2}\right)\cos\nu\left(\frac{t-(\tau-\sigma)}{2}\right)}{\sin(\nu t/2)}+\frac{m}{M}\left(\frac{\tau-\sigma}{t}\right)\right\}^{2}\left(\bar{x}_2-\bar{x}_1\right)^2 \tag{39}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{2}\left\langle\left(\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right)^2\right\rangle_{S_o}-\left\langle\left(\bar{x}(\tau)-\bar{x}(\sigma)\right)\right\rangle_{S_o}^{2}$$

$$=i\hbar\frac{\mu}{m}\left\{\frac{2\sin\nu\left(\frac{\tau-\sigma}{2}\right)\sin\nu\left(\frac{t-(\tau-\sigma)}{2}\right)}{m\nu\sin(\nu t/2)}+\frac{1}{Mt}(\tau-\sigma)\left(t-(\tau-\sigma)\right)\right\}$$

และ

$$\left\langle S_p\right\rangle_{S_o}=\frac{\pi n e^4}{2m}\int_o^\infty\frac{kdk}{\omega(k)}\int_o^t d\tau\int_o^t d\sigma\left[\frac{\cos\left[\omega(k)\left(t/2-|\tau-\sigma|\right)\right]}{\sin\left(\omega(k)t/2\right)}\right]\exp\Big\{i\bar{k}\bullet$$

$$\left[\frac{\mu}{m}\left(\bar{x}_2-\bar{x}_1\right)\left\{\frac{\sin\frac{\nu}{2}(\tau-\sigma)\cos\frac{\nu}{2}\left[t-(\tau-\sigma)\right]}{\sin(\nu t/2)}+\frac{m}{M}\frac{(t-\sigma)}{t}\right\}\right]$$

$$-\frac{1}{2}k^2\left[i\hbar\frac{\mu}{m}\left\{\frac{2\sin\frac{\nu}{2}(\tau-\sigma)\sin\frac{\nu}{2}\left[t-(\tau-\sigma)\right]}{m\nu\sin(\nu t/2)}+\frac{1}{Mt}(\tau-\sigma)\left(t-(\tau-\sigma)\right)\right\}\right]\Big\} \tag{40}$$

ค่าเฉลี่ย $\left\langle S_0 \right\rangle_{S_0}$ คือ

$$\left\langle S_o \right\rangle_{S_o} = -\frac{\kappa\Omega}{8}\int_o^t\int_o^t d\tau d\sigma \left\langle \left(\vec{x}(\tau)-\vec{x}(\sigma)\right)^2 \right\rangle_{S_o} \frac{\cos\Omega\left(t/2-|\tau-\sigma|\right)}{\sin(\Omega t/2)}$$

$$= \frac{2}{4} i\hbar t \frac{\kappa}{m\nu}\left(\cot\left(\frac{\nu t}{2}\right) - \frac{2}{\nu t}\right)$$

$$= i\hbar \frac{\kappa}{m\nu^2}\left(\frac{\nu t}{2}\cot\frac{\nu t}{2} - 1\right)$$

หรือ

$$\left\langle S_o \right\rangle_{S_o} = i\hbar \frac{\mu}{m}\left(\frac{\nu t}{2}\cot\frac{\nu t}{2} - 1\right) \tag{41}$$

โดยที่

$$\kappa = \mu\nu^2 = m\omega^2 = M\Omega^2$$

และ

$$\nu^2 = \omega^2 + \Omega^2 \tag{42}$$

ดังนั้น เราจึงได้

$$\left\langle S_p - S_o \right\rangle_{S_o} = \left\langle S_p \right\rangle_{S_o} - \left\langle S_o \right\rangle_{S_o}$$

$$= \frac{\pi m e^4}{2m}\int_o^\infty \frac{kdk}{\omega(k)}\int_o^t d\tau \int_o^t d\sigma F\left(\mu,\nu,|\tau-\sigma|\right) - i\hbar\frac{\mu}{m}\left(\frac{\nu t}{2}\cot\frac{\nu t}{2} - 1\right) \tag{43}$$

โดยที่

$$F(\mu,\nu,|\tau-\sigma|)$$

$$=\left[\frac{\cos\omega(k)\left[\frac{t}{2}-|t-\sigma|\right]}{\sin\omega(k)t/2}\right]\exp\left\{-i\hbar k^2\frac{\mu}{2m}\left[\frac{2\sin\frac{\nu}{2}(\tau-\sigma)\sin\frac{\nu}{2}[t-(\tau-\sigma)]}{m\nu\sin(\nu t/2)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{Mt}(\tau-\sigma)(t-(\tau-\sigma))\right]\right\} \qquad (44)$$

สังเกตุว่าเราใช้ค่า $\vec{x}_2=\vec{x}_1$ ผ่านเทอม $\delta(\vec{x}_2-\vec{x}_1)$.

จากการใช้เอกลักษณ์

$$\int_o^t\int_o^t g(|\tau-\sigma|)d\tau d\sigma=2\int_o^t(t-z)g(z)dz$$

และให้ $u\equiv|\tau-\sigma|$ ดังนั้น

$$\left\langle S_p-S_o\right\rangle_{S_o}=\frac{\pi me^4}{m}\int_o^\infty\frac{kdk}{\omega(k)}\int_o^t du(t-u)F(\mu,\nu,u)-i\hbar\frac{\mu}{m}\left[\frac{\nu t}{2}\cot\frac{\nu t}{2}-1\right] \qquad (45)$$

โดยที่ $F(\mu,\nu,u)$

$$=\left[\frac{\cos\omega(k)\cdot[t/2-u]}{\sin\omega(k)t/2}\right]\exp\left\{-i\hbar k^2\frac{\mu}{2m}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\nu u}{2}\right)\sin\frac{\nu}{2}(t-u)}{m\nu\sin(\nu t/2)}+\frac{1}{Mt}u(t-u)\right]\right\} \qquad (46)$$

propagator $G(\vec{x},\ \vec{x}';\ t)$ สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$G(\vec{x},\vec{x}';t) = G_o(\vec{x},\vec{x}';t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left\langle S_p - S_o\right\rangle_{S_o}\right]$$

$$= G_o(\vec{x},\vec{x}';t)\exp\left[\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left(\frac{\nu t}{2}\cot\frac{\nu t}{2}-1\right)\right.$$

$$\left. + i\hbar\frac{\pi m e^4}{m}\int_o^\infty \frac{kdk}{\omega(k)}\int_o^t du(t-u)F(\nu,\Omega,u)\right] \qquad (47)$$

โดยที่ $F(\nu,\ \Omega,\ u)$

$$= \left[\frac{\cos\omega(k)[t/2-u]}{\sin\omega(k)t/2}\right]\exp\left\{-i\hbar\frac{k^2}{2m}\left(1-\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\left[\frac{2\sin\left(\frac{\nu u}{2}\right)\sin\frac{\nu}{2}(t-u)}{\nu\sin(\nu t/2)}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\Omega^2}{\nu^2-\Omega^2}\right)\frac{u}{t}(t-u)\right]\right\} \qquad (48)$$

และ
$$G_o(\vec{x},\vec{x}';t) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)\left[\frac{\nu\sin(\Omega t/2)}{\Omega\sin(\nu t/2)}\right]^2 \qquad (49)$$

ต่อไปเราจะเปลี่ยนพารามิเตอร์ไปเป็นตัวแปร T และ s ที่ไม่มีมิติ คือ

$$t = \frac{\hbar T}{E_F}, \qquad u = \frac{\hbar s}{E_F} \qquad (50)$$

โดยที่ E_F คือ Fermi energy, ดังนั้น

$$\frac{m}{2\pi i\hbar t} \rightarrow \frac{mE_F}{2\pi i\hbar^2 T}$$

$$\frac{\nu\sin(\Omega t/2)}{\Omega\sin(\nu t/2)} \rightarrow \frac{E_\nu\sin(E_\Omega T/2)}{E_\Omega\sin(E_\nu T/2)}$$

โดยที่ $E_\nu = \dfrac{\hbar\nu}{E_F}$

และ $E_\Omega = \dfrac{\hbar\Omega}{E_F}$

และให้ $E_\omega(k) = \dfrac{\hbar\omega(k)}{E_F}$

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2mE_F}$$

โดยที่ dispersion relation สำหรับพลาสมอนสองมิติกำหนดโดยสมการ (2) คือ

$$\omega^2(k) = \omega_p^2(k)\left[1 + \frac{3}{4}\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)k\right]$$

จากความสัมพันธ์ $E(k) = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2mE_F}$

$$\therefore\ dk = \frac{mE_F}{k\hbar^2}dE(k)$$

$$= \frac{\sqrt{mE_F}}{\hbar}\frac{dE(k)}{\sqrt{E(k)}}$$

และเนื่องจาก $du(t-u) = \frac{\hbar^2}{E_F^2} ds(T-s)$

$$\therefore \quad \frac{i}{\hbar}\frac{\pi n e^4}{m}\int_o^\infty \frac{kdk}{\omega(k)}\int_o^t du(t-u)F(\nu,\Omega,u)$$

$$= \frac{i}{2} r_s^2 \int_o^\infty dEk \frac{1}{E_\omega(k)}\int_o^T ds(T-s)F(E_\nu, E_\Omega, s)$$

โดยที่ $F(E_\nu, E_\Omega, s)$

$$= \left[\frac{\cos E_\omega(k)\left(\frac{T}{2}-s\right)}{\sin E_\omega(k)T/2}\right]\exp\left\{-iE(k)\left(1-\frac{E_\Omega^2}{E_\nu^2}\right)\left[\frac{2\sin\left(\frac{E_\nu}{2}s\right)\sin\left(\frac{E_\nu}{2}(T-s)\right)}{E_\nu \sin(E_\nu T/2)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{E_\Omega^2}{E_\nu^2 - E_\Omega^2}\right)\frac{s}{T}(T-s)\right]\right\}$$

และการใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \qquad k_F^2 = 2\pi n = \frac{2}{r_s^2}$$

$$n^{-1} = \pi r_s^2 \quad ry$$

$$1\ ry = \frac{me^4}{2\hbar^2}$$

r_s คือ พารามิเตอร์ที่ไม่มีหน่วย ซึ่งเป็นรัศมี (ในหน่วยของ Bohr radius) ของทรงกลมที่ครอบครองโดยอิเล็กตรอนหนึ่งตัวโดยเฉลี่ย

propagator $G(\vec{x}, \vec{x}'; T)$ ในเทอมของพารามิเตอร์ตัวใหม่นี้จึงเป็น

$$G(\vec{x}, \vec{x}'; T)$$

$$= \left(\frac{mE_F}{2\pi i\hbar^2 T}\right)\left(\frac{E_\nu \sin(E_\Omega T/2)}{E_\Omega \sin(E_\nu T/2)}\right)^2 \exp\left\{\left(1-\frac{E_\Omega^2}{E_\nu^2}\right)\left(\frac{E_\nu T}{2}\cot\frac{E_\nu T}{2}-1\right)\right.$$

$$\left. + \frac{i}{2} r_s^2 \int_0^\infty \frac{dE(k)}{} \frac{1}{E_\omega(k)} \int_0^T ds (T-s) F(E_\nu, E_\Omega, s)\right\} \qquad (51)$$

4. การหาค่าพลังงานสถานะพื้น

พลังงานสถานะพื้นของระบบหาได้จากการให้ $T \rightarrow \infty$ จากการใช้การประมาณดังต่อไปนี้คือ

$$\int_0^T ds\,(T-s)\,F(E_\nu, E_\Omega, s) \approx T\int_0^T ds\,F(E_\nu, E_\Omega, s)$$

$$\left[\frac{E_\nu \sin(E_\Omega T/2)}{E_\Omega \sin(E_\nu T/2)}\right]^2 \approx \left(\frac{E_\nu}{E_\Omega}\right)^2 \exp\{iT(E_\Omega - E_\nu)\}$$

$$\left(1-\frac{E_\Omega^2}{E_\nu^2}\right)\left[\frac{E_\nu T}{2}\cot\frac{E_\nu T}{2}-1\right] \approx \frac{1}{2} iT\left(1-\frac{E_\Omega^2}{E_\nu^2}\right)E_\nu$$

$$F(E_\nu, E_\Omega, s) \approx i\exp\left\{-iE_\omega(k)s - E(k)\left(1-\frac{E_\Omega^2}{E_\nu^2}\right)\left[\left(\frac{1-e^{-iE_\nu s}}{E_\nu}\right) + \left(\frac{E_\Omega^2}{E_\nu^2 - E_\Omega^2}\right)is\right]\right\}$$

ดังนั้น $G(\vec{x}, \vec{x}'; T)$ จากสมการ (51) จึงลดลงเป็น

$$G(x, x', T \to \infty) = \left(\frac{mE_F}{2\pi i\hbar^2 T}\right)\left(\frac{E_v}{E_\Omega}\right)^2 \exp\left\{-iT(E_v - E_\Omega) + \frac{1}{2} iT\left(1 - \frac{E_\Omega^2}{E_v^2}\right)E_v\right.$$

$$+ \frac{i}{2} r_s^2 T \int_0^\infty \frac{dE(k)}{E_\omega(k)} \int_0^\infty dis \exp\left[-iE_\omega(k)s\right.$$

$$\left.\left. - E(k)\left(1 - \frac{E_\Omega^2}{E_v^2}\right)\left\{\left(\frac{1 - e^{-iE_v s}}{E_v}\right) + \left(\frac{E_\Omega^2}{E_v^2 - E_\Omega^2}\right) is\right\}\right]\right\}.$$

(52)

ให้ is = y และเมื่อ $T \longrightarrow \infty$ ค่าโดยประมาณของ propagator สามารถกระจายเป็นอนุกรมกำลังของฟังก์ชันคลื่น (wave functions) ซึ่งเทอมของสถานะพื้นเป็นเทอมหลักคือ

$$G(x; x'; T \to \infty) \approx \phi_o^*(x)\phi_o(x)e^{-iE_o' T} \qquad (53)$$

โดยที่ E_0' เป็นพลังงานสถานะพื้นวัดในหน่วยของ E_F และ $\phi_0(x)$ คือ ฟังก์ชันคลื่นที่สถานะพื้น จากสมการ (52) และ (53). พลังงานสถานะพื้นของระบบในหน่วยของ E_F จึงเป็น

$$E_o' = (E_v - E_\Omega) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E_\Omega^2}{E_v^2}\right)E_v - \frac{1}{2} r_s^2 \int_0^\infty \frac{dE(k)}{E_\omega(k)} \int_0^\infty y \exp\left[-E_\omega(k)y\right.$$

$$\left. - E(k)\left(1 - \frac{E_\Omega^2}{E_v^2}\right)\left\{\left(\frac{1 - e^{E_v y}}{E_v}\right) + \left(\frac{E_\Omega^2}{E_v^2 - E_\Omega^2}\right) y\right\}\right]$$

$$= \frac{E_v}{2}\left(1 - \frac{E_\Omega}{E_v}\right)^2 - \frac{1}{2} r_s^2 \int_0^\infty \frac{dE(k)}{E_\omega(k)} \int_0^T dy \exp\left[-E_\omega(k)y\right.$$

$$\left. - E(k)\left(1 - \frac{E_\Omega^2}{E_v^2}\right)\left\{\left(\frac{1 - e^{E_v y}}{E_v}\right) + \left(\frac{E_\Omega^2}{E_v^2 - E_\Omega^2}\right) y\right\}\right] \qquad (54)$$

ให้ $\rho = E_\Omega / E_\nu$

$$E_\nu y = \xi \qquad , \qquad dy = \frac{1}{E_\nu} d\xi$$

$$\therefore \; E_o' = \frac{E_\nu}{2}(1-\rho)^2 - \frac{1}{2} r_s^2 \int_o^\infty \frac{dE(k)}{E_\omega(k)} \exp\left\{-\frac{E(k)}{E_\nu}\left(1-\rho^2\right)\right\} \int_o^\infty \frac{d\xi}{E_\nu}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{E_\nu}\left(E_\omega(k) + E(k)\rho^2\right)\xi + \frac{E(k)}{E_\nu}\left(1-\rho^2\right)e^{-\xi}\right]$$

(55)

และให้
$$\beta \equiv -\frac{E(k)}{E_\nu}\left(1-\rho^2\right) \tag{56}$$

$$\mu \equiv \frac{1}{E_\nu}\left[E_\omega(k) + E(k)\rho^2\right] \tag{57}$$

$$\therefore \; E_o' = \frac{E_\nu}{2}(1-\rho)^2 - \frac{1}{2} r_s^2 \int_o^\infty dE(k) \frac{e^\beta}{E_\omega(k) E_\nu} \int_o^\infty d\xi \exp\left[-\mu\xi - \beta e^{-\xi}\right] \tag{58}$$

จากการใช้รูปแบบมาตรฐานของการอินทิเกรต

$$\int_o^\infty dx \exp\left[-\beta e^{-x} - \mu x\right] = \beta^{-\mu} \gamma(\mu, \beta)$$

โดยที่ $\gamma(\mu, \beta)$ คือ incomplete gamma function. พลังงานสถานะพื้นตามสมการ (58) ในหน่วยของ E_F จะกลายเป็น

$$E_o' = \frac{E_\nu}{2}(1-\rho)^2 - \frac{1}{2} r_s^2 \int_o^\infty dE(k) \frac{e^\beta}{E_\omega(k)} \frac{\beta^{-\mu}\gamma(\mu, \beta)}{E_\nu} \tag{59}$$

พารามิเตอร์ 2 ตัว คือ ρ และ E_v จะต้องปรับค่าแยกจากกันเพื่อให้ได้ค่าพลังงานสถานะพื้นที่แท้จริง ค่าต่ำสุดของสมการ (59) เมื่อเทียบกับ ρ และ E_v ไม่สามารถเขียนในรูป แบบปิดได้และต้องคำนวณโดยวิธีเชิงตัวเลข

5. ผลการคำนวณเชิงตัวเลข

จากข้อจำกัดของค่า β ใน incomplete gamma function, $\gamma[\mu, \beta]$, ซึ่ง β จะต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้นค่า ρ ในสมการ (56) สำหรับ β จึงต้องมีค่ามากกว่าหนึ่ง การคำนวณเชิงตัวเลขสำหรับพลังงานสถานะพื้น E'_0 ตามสมการ (59) จึงเริ่มต้นจากการกำหนดค่า r_s ซึ่งเริ่มจากค่าน้อยๆ ไปจนถึงค่ามาก คือ จาก 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0 จนถึง 50.0 สำหรับ r_s ค่าหนึ่งๆ, ค่า ρ จะมีการกำหนดค่าต่างๆ โดยเริ่มจาก 1.5, 2, 5, 10, 50 และสำหรับ r_s และ ρ ที่กำหนด, พารามิเตอร์ E_v จะมีการปรับเป็นค่าต่างๆ คือ 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, 20.0 และ 50.0 ดังนั้น พลังงานสถานะพื้น E'_0 สำหรับ r_s, ρ และ E_v ค่าต่างๆ จึงสามารถคำนวณเชิงตัวเลขได้ดังต่อไปนี้:

$r_s = 0.1$	$\rho = 1.5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = -1.419$
		$= 0.2$	$= -1.381$
		$= 0.5$	$= -1.311$
		$= 1$	$= -1.186$
		$= 2$	$= -0.988$
		$= 5$	$= -0.586$
		$= 10$	$= -0.068$
		$= 20$	$= 1.328$
		$= 50$	$= 5.118$
	$\rho = 2$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = -1.175$
		$= 0.2$	$= -1.047$
		$= 0.5$	$= -0.862$
		$= 1$	$= -0.473$
		$= 2$	$= 0.013$
		$= 5$	$= 1.586$
		$= 10$	$= 4.122$
		$= 20$	$= 9.156$
		$= 50$	$= 24.184$
	$\rho = 5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 0.196$
		$= 10$	$= 79.655$
		$= 20$	$= 160.001$
		$= 50$	$= 399.705$
	$\rho = 10$	$E_v = 0.5$	$E'_0 = 20.038$
		$= 5$	$= 202.340$
		$= 10$	$= 404.860$
		$= 20$	$= 809.861$
		$= 50$	$= 2024.901$
	$\rho = 50$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 120.02$

$r_s = 0.2$	$\rho = 1.5$	$E_v = 0.1$	$E_0' = -1.471$
		$= 0.2$	$= -1.435$
		$= 0.5$	$= -1.300$
		$= 1$	$= -1.177$
		$= 2$	$= -1.015$
		$= 5$	$= -0.568$
		$= 10$	$= 0.092$
		$= 20$	$= 1.374$
		$= 50$	$= 5.163$
	$\rho = 2$	$E_v = 0.1$	$E_0' = -1.193$
		$= 0.5$	$= -0.896$
		$= 1$	$= -0.568$
		$= 2$	$= -0.005$
		$= 5$	$= 1.568$
		$= 10$	$= 4.120$
		$= 20$	$= 9.155$
		$= 50$	$= 24.198$
	$\rho = 5$	$E_v = 0.1$	$E_0' = 0.017$
		$= 1$	$= 7.547$
		$= 2$	$= 15.512$
		$= 5$	$= 39.608$
		$= 10$	$= 79.652$
		$= 20$	$= 159.680$
		$= 50$	$= 399.705$
	$\rho = 10$	$E_v = 0.1$	$E_0' = 3.839$
		$= 0.2$	$= 7.975$
		$= 5$	$= 202.340$
		$= 10$	$= 404.820$
		$= 20$	$= 809.880$
		$= 50$	$= 2024.900$
	$\rho = 50$	$E_v = 1$	$E_0' = 1200$

$r_s = 0.5$	$\rho = 1.5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = -1.291$
		$= 0.2$	$= -1.280$
		$= 0.5$	$= -1.157$
		$= 1$	$= -1.066$
		$= 2$	$= -0.889$
		$= 5$	$= -0.463$
		$= 10$	$= 0.203$
		$= 20$	$= 1.488$
		$= 50$	$= 5.281$
	$\rho = 2$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = -0.938$
		$= 0.2$	$= -0.867$
		$= 0.5$	$= -0.727$
		$= 1$	$= -0.544$
		$= 2$	$= 0.014$
		$= 5$	$= 1.602$
		$= 10$	$= 4.164$
		$= 20$	$= 8.833$
		$= 50$	$= 24.262$
	$\rho = 5$	$E_v = 0.5$	$E'_0 = 3.353$
		$= 1$	$= 7.469$
		$= 2$	$= 15.510$
		$= 5$	$= 39.608$
		$= 10$	$= 79.638$
		$= 20$	$= 159.771$
		$= 50$	$= 399.793$
	$\rho = 10$	$E_v = 2$	$E'_0 = 80.818$
		$= 5$	$= 202.361$
		$= 10$	$= 404.820$
		$= 20$	$= 809.895$
		$= 50$	$= 2024.923$
	$\rho = 50$	$E_v = 10$	$E'_0 = 12005$

$r_s = 1.0$	$\rho = 1.5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = -0.046$
		$= 0.2$	$= -0.989$
		$= 0.5$	$= -0.914$
		$= 1$	$= -0.845$
		$= 2$	$= -0.684$
		$= 5$	$= -0.262$
		$= 10$	$= 0.394$
		$= 20$	$= 1.679$
		$= 50$	$= 5.464$
	$\rho = 2$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = -0.661$
		$= 0.2$	$= -0.788$
		$= 0.5$	$= -0.640$
		$= 1$	$= -0.369$
		$= 2$	$= 0.182$
		$= 5$	$= 1.723$
		$= 10$	$= 4.276$
		$= 20$	$= 9.320$
		$= 50$	$= 24.371$
	$\rho = 5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 0.335$
		$= 0.2$	$= 1.189$
		$= 0.5$	$= 3.471$
		$= 1$	$= 7.552$
		$= 2$	$= 15.519$
		$= 5$	$= 39.583$
		$= 10$	$= 79.671$
		$= 20$	$= 159.68$
		$= 50$	$= 399.72$
	$\rho = 10$	$E_v = 0.5$	$E'_0 = 7.640$
		$= 1$	$= 40.315$
		$= 5$	$= 202.261$
		$= 10$	$= 404.823$
		$= 20$	$= 809.852$
		$= 50$	$= 2024.9$

$r_s = 2$	$\rho = 1.5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = -0.570$
		$= 0.2$	$= -0.526$
		$= 0.5$	$= -0.484$
		$= 1$	$= -0.457$
		$= 2$	$= -0.325$
		$= 5$	$= 0.051$
		$= 10$	$= 0.706$
		$= 20$	$= 1.958$
		$= 50$	$= 5.731$
	$\rho = 2$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = -0.505$
		$= 0.2$	$= -0.455$
		$= 0.5$	$= -0.323$
		$= 1$	$= -0.077$
		$= 2$	$= 0.438$
		$= 5$	$= 1.960$
		$= 10$	$= 4.487$
		$= 20$	$= 9.530$
		$= 50$	$= 24.572$
	$\rho = 5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 0.370$
		$= 0.2$	$= 1.51$
		$= 0.5$	$= 3.612$
		$= 1$	$= 7.561$
		$= 2$	$= 15.607$
		$= 5$	$= 39.652$
		$= 10$	$= 79.689$
		$= 20$	$= 159.710$
		$= 50$	$= 399.77$

$r_s = 2$	$\rho = 10$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 3.890$
		$= 0.2$	$= 7.808$
		$= 0.5$	$= 20.121$
		$= 1$	$= 40.387$
		$= 2$	$= 80.806$
		$= 5$	$= 202.320$
		$= 10$	$= 404.850$
		$= 20$	$= 809.861$
		$= 50$	$= 2024.901$
	$\rho = 50$	$E_v = 1$	$E'_0 = 1200.5$
		$= 2$	$= 2401$
		$= 5$	$= 6002.5$

$r_s = 5$	$\rho = 1.5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = -0.105$
		$= 0.2$	$= -0.169$
		$= 0.5$	$= -0.131$
		$= 1$	$= -0.066$
		$= 2$	$= 0.052$
		$= 5$	$= 0.428$
		$= 10$	$= 1.053$
		$= 20$	$= 2.289$
		$= 50$	$= 6.065$
	$\rho = 2$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = -0.068$
		$= 0.2$	$= -0.071$
		$= 0.5$	$= 0.111$
		$= 1$	$= 0.346$
		$= 2$	$= 0.829$
		$= 5$	$= 2.304$
		$= 10$	$= 4.807$
		$= 20$	$= 9.810$
		$= 50$	$= 24.816$
	$\rho = 5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 0.659$
		$= 0.5$	$= 3.863$
		$= 1$	$= 7.864$
		$= 2$	$= 15.836$
		$= 5$	$= 39.826$
		$= 10$	$= 79.859$
		$= 20$	$= 159.840$
		$= 50$	$= 399.860$
	$\rho = 10$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 3.969$
		$= 0.5$	$= 20.234$
		$= 1$	$= 40.399$
		$= 2$	$= 80.854$
		$= 5$	$= 202.370$
		$= 10$	$= 404.901$
		$= 20$	$= 809.899$
		$= 50$	$= 2024.866$
	$\rho = 50$	$E_v = 1$	$E'_0 = 1200.5$

$r_s = 10$	$\rho = 1.5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = -0.016$
		$= 0.2$	$= -0.005$
		$= 0.5$	$= 0.034$
		$= 1$	$= 0.084$
		$= 2$	$= 0.189$
		$= 5$	$= 0.565$
		$= 10$	$= 1.186$
		$= 20$	$= 2.417$
		$= 50$	$= 6.172$
	$\rho = 2$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 0.013$
		$= 0.2$	$= 0.051$
		$= 0.5$	$= 0.205$
		$= 1$	$= 0.444$
		$= 2$	$= 0.936$
		$= 5$	$= 2.424$
		$= 10$	$= 4.940$
		$= 20$	$= 9.926$
		$= 50$	$= 24.923$
	$\rho = 5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 0.771$
		$= 0.2$	$= 1.563$
		$= 0.5$	$= 3.952$
		$= 1$	$= 7.955$
		$= 2$	$= 15.952$
		$= 5$	$= 39.953$
		$= 10$	$= 79.942$
		$= 20$	$= 159.941$
		$= 50$	$= 399.96$

$r_s = 10$	$\rho = 10$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 4.029$
		$= 0.2$	$= 8.079$
		$= 0.5$	$= 20.201$
		$= 1$	$= 40.464$
		$= 2$	$= 80.959$
		$= 5$	$= 202.451$
		$= 10$	$= 404.952$
		$= 20$	$= 809.960$
		$= 50$	$= 2025.001$
	$\rho = 50$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 120.041$
		$= 1$	$= 1200.502$

$r_s = 50$	$\rho = 1.5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 0.009$
		$= 0.2$	$= 0.023$
		$= 0.5$	$= 0.060$
		$= 1$	$= 0.116$
		$= 2$	$= 0.244$
		$= 5$	$= 0.620$
		$= 10$	$= 1.247$
		$= 20$	$= 2.496$
		$= 50$	$= 6.250$
	$\rho = 2$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 0.047$
		$= 0.2$	$= 0.097$
		$= 0.5$	$= 0.247$
		$= 1$	$= 0.496$
		$= 2$	$= 0.996$
		$= 5$	$= 2.497$
		$= 10$	$= 4.996$
		$= 20$	$= 9.997$
		$= 50$	$= 24.997$
	$\rho = 5$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 0.795$
		$= 0.2$	$= 1.597$
		$= 0.5$	$= 3.994$
		$= 1$	$= 7.997$
		$= 2$	$= 15.998$
		$= 5$	$= 39.998$
		$= 10$	$= 79.998$
		$= 20$	$= 160.010$
		$= 50$	$= 400.001$
	$\rho = 10$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 4.047$
		$= 0.2$	$= 8.097$
		$= 0.5$	$= 20.248$
		$= 1$	$= 40.498$
	$\rho = 50$	$E_v = 0.1$	$E'_0 = 120.050$
		$= 0.2$	$= 240.101$
		$= 0.5$	$= 600.252$

6. สรุปและข้อเสนอแนะ

จากผลการคำนวณเชิงตัวเลขของพลังงานที่สถานะพื้นของพลาสมารอนสองมิติจะเห็นได้ว่า E_0' จะเปลี่ยนจากเครื่องหมายลบเป็นบวกที่ตัวแปร r_s, ρ และ E_v ค่าแตกต่างกัน กล่าวคือ ค่า ρ ที่จุดเปลี่ยนเครื่องหมายจะอยู่ระหว่าง 1 – 2 เท่านั้น เมื่อ $\rho > 2$ จะไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายเลย สำหรับ r_s ค่าต่ำๆ, E_0' จะมีการเปลี่ยนเครื่องหมายเมื่อ E_v มีค่าค่อนข้างมาก แต่เมื่อ r_s เพิ่มขึ้น, การเปลี่ยนเครื่องหมายจะเกิดขึ้นเมื่อ E_v มีค่าลดลง และเป็นที่น่าสังเกตุว่าเมื่อ r_s มีค่ามากๆ เช่น $r_s = 50$, จะไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมายเกิดขึ้นเลย

โดยทั่วไปแล้วการศึกษาระบบอนุภาคทั้งสองและสามมิตินั้นจะต้องพิจารณาให้ตลอดพิสัยของทั้งความหนาแน่นและอุณหภูมิ การศึกษาในครั้งนี้จะศึกษาเฉพาะพิสัยของความหนาแน่นเท่านั้นและที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ การศึกษาจึงถูกกำหนดโดยพารามิเตอร์ที่ปราศจากหน่วย คือ $r_s = a/a_0$ ซึ่งกำหนดในเทอมของรัศมีโบร์ $a_0 = \hbar^2/me^2$ และรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบอนุภาคหนึ่งตัวโดยเฉลี่ย $a = 1/\sqrt{\pi n}$ และ n คือความหนาแน่นของจำนวนอนุภาค สำหรับพลังงานจะกำหนดในหน่วยของ rydbergs, $ry = me^4/2\hbar^2$

ที่ r_s ค่าน้อยๆ หรือความหนาแน่นอิเล็กตรอนสูงๆ ทำให้พลังงานจลน์มีค่ามากกว่าพลังงานศักย์, อิเล็กตรอนในระบบจะคู่ควบกันอย่างอ่อนกลายเป็น Fermi liquid และเป็นที่ทราบกันดีว่าพลังงานสถานะพื้นของระบบแก๊สอิเล็กตรอนสองมิติประกอบด้วยพลังงานจลน์ $E_k = \frac{1}{r_5^2}$, พลังงานแลกเปลี่ยน $E_{ex} = \frac{-1.2}{r_s}$, และพลังงานสหสัมพันธ์
$E_c = -0.38 - 0.172\, r_s \ell n r_s + O(r_s)$ [14], ซึ่งจะเห็นได้ว่า E_c มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับ E_k และ E_{ex} ดังนั้นพลังงานสถานะพื้นของระบบจึงประกอบด้วยพลังงานจลน์และพลังงานแลกเปลี่ยนเท่านั้น

ที่ค่า r_s มากๆ หรือความหนาแน่นอิเล็กตรอนค่อนข้างต่ำจนพลังงานศักย์มีค่ามากกว่าพลังงานจลน์มาก, ระบบจะเริ่มเปลี่ยนเฟสและกลายเป็นผลึกและพลังงานสถานะพื้นจะมีค่าโดยประมาณเป็น [15]

$$E_0(r_s) = \frac{-2.21}{r_s} + \frac{1.63}{r_s^{3/2}} + \frac{0.05}{r_s^2} + \ldots$$

การกลายเป็นผลึกของระบบเรียกว่า Wigner crystallization และพบว่าจะเริ่มเกิดที่ค่า $r_s \approx 37 \pm 5$

พลังงานสถานะพื้น E_0 ในหน่วย ry ของพลาสมารอนสองมิติหาได้โดยการคูณ E'_0 ด้วย E_F หรือ $E_0 = E_F E'_0$ เป็นที่น่าเสียดายว่ารูปแบบของสมการ (59) สำหรับการหาค่า E'_0 ค่อนข้างยุ่งยากต่อการหาค่าเชิงเส้นกำกับ (asymptotic) ได้ อีกทั้งยังไม่มีรายงานผลการวิจัยที่ใช้อ้างอิงและเชื่อถือได้เกี่ยวกับเรื่องนี้ ผลการวิจัยนี้จึงไม่อาจตรวจสอบความถูกต้องได้ แต่อย่างไรก็ตาม, แนวทางในการศึกษาครั้งนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาสมบัติด้านอื่นๆ ของระบบแก๊สอิเล็กตรอนสองมิติได้

บรรณานุกรม

1. Bohm, D. and Pines, D. : Phys. Rev. 92, 609 (1953).
2. Gell-Mann, M.and Brueckner, K.A. : Phys.Rev. 106, 364 (1957).
3. Nozieres, P.and Pines, D. : I ℓ Nuovo Cimento [X] 9, 470 (1958).
4. Pines, D. : The Many-Body Problem, New York ; W.A. Benjamin Inc. (1962).
5. Lundqvist, B.I. : Phys. Kondens. Materie. 6, 193 (1967).
6. Sa-yakanit, V., Nithisoontorn, M. and Sritrakool, W. ; Physica Scripta 32, 334 (1985).
7. Stern, F. ; Phys. Rev. Lett. 18, 546 (1967).
8. Rajagopal, A.K. : Phys. Rev> B 15, 4264 (1977).
9. Jonson, M. : J. Phys. C 9, 3055 (1976).
10. Singwi, K.S., Tosi, M.P., Land, R.H. and Sjölander , A. : Phys. Rev. 176, 589 (1968).
11. Feynman, R.P. and Hibbs, A.R. : Path Integrals and Quantum Mechanics, New York : McGraw Hill (1965).
12. Samathiyakanit, V. (or Sa-yakanit) : J. Phys. C.7, 2849 (1974).
13. Sa-yakanit, V. : Phys. Rev. B19, 2377 (1979).
14. Rajagopal, A.K. and Kimball, J. : Phys. Rev. B15, 2819 (1977).
15. Tanatar, B. and Ceperley, D.M. : Phys. Rev. B39, 5005(1989).

ประวัตินักวิจัย

ชื่อ-สกุล : รศ.ดร.สำเนา ผาติเสนะ

ตำแหน่ง : รองศาสตราจารย์

วัน เดือน ปี เกิด : 9 กรกฎาคม 2492

สถานที่เกิด : จังหวัดปัตตานี

วุฒิการศึกษา :

ปริญญาบัตร	สถานศึกษา	ปีที่สำเร็จการศึกษา
วท.บ. (ฟิสิกส์)	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่	2515
วท.ม. (ฟิสิกส์)	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย	2520
Ph.D. (Physics)	University of Poona (India)	2528

ประสบการณ์ :

ระหว่างปี 2515 – 2516 อาจารย์ที่สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ธนบุรี

ระหว่างปี 2516 – 2535 อาจารย์ที่สถาบันราชภัฏอุบลราชธานี

ระหว่างปี 2535 – ปัจจุบัน อาจารย์ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ผลงานวิชาการ :

เขียนตำรา และเอกสารประกอบการสอน ไม่น้อยกว่า 15 เรื่อง

บทความทางวิชาการ ปีละไม่น้อยกว่า 1 เรื่อง

งานวิจัย ไม่น้อยกว่า 10 เรื่อง

สถานที่ติดต่อได้ :

สถาบันวิจัยและพัฒนา

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี