ฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์

MATHEMATICAL PHYSICS

รองศาสตราจารย์ ดร. สำเนา ผาติเสนะ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

คำนำ

วิชาฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์หรือ Mathematical Physics เป็นวิชาหนึ่งที่นักฟิสิกส์ทุกคนต้องเรียนรู้โดยเฉพาะอย่างยิ่งนักฟิสิกส์ทฤษฎีต้องมีความเข้าใจเป็นพิเศษ ทั้งนี้เพราะเทคนิคทางคณิตศาสตร์พบว่ามีประโยชน์เป็นอย่างมากต่อการวิเคราะห์ปัญหาต่าง ๆ ของวิชาฟิสิกส์ เนื้อหาสาระที่นำเสนอนี้จึงเน้นไปที่การใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์เพื่อการแก้ปัญหาในรูปแบบต่าง ๆ ของฟิสิกส์เกือบทั้งสิ้นโดยสมมติว่าผู้อ่านมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นและได้เรียนรู้ในระดับปริญญาตรีมาบ้างแล้ว เช่นวิชาแคลคูลัส, สมการเชิงอนุพันธ์และตัวแปรเชิงซ้อน เป็นต้น หวังว่าเอกสารเล่มนี้คงเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจทางด้านนี้ได้มากพอสมควร

รองศาสตราจารย์ ดร. สำเนา ผาติเสนะ

สารบัญ

บรรณานุกรมคำย่อ

DE = differential equation สมการเชิงอนุพันธ์

LDE = linear differential equation สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

ODE = ordinary differential equation สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

PDE = partial differential equation สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

LODE = linear ordinary differential equation สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น

SOLDE = second-order linear differential equation สมการเชิงเส้นอันดับสอง

HSOLDE = homogeneous second-order linear differential equation

ISOLDE = inhomogeneous second-order linear differential equation

NOLDE = nth- order linear differential equation สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

HNOLDE = homogeneous NOLDE

INOLDE = inhomogeneous NOLDE

FODE = first order differential equation สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

FDE = Fuchsian differential equation สมการเชิงอนุพันธ์ Fuchsian

SOFDE = second-order Fuchsian differential equation สมการเชิงอนุพันธ์ Fuchsian อันดับสอง

HDE = hypergeometric differential equation สมการเชิงอนุพันธ์ไฮเพอร์จีออเมตริก

CHDE = confluent hyper geometric differential equation สมการเชิงอนุพันธ์ที่คล้อยตามไฮเพอร์จีออเมตริก

บทที่ 1
การแยกตัวแปรในสมการเชิงอนุพันธ์

1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ในฟิสิกส์

สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation, DE) ที่เราคุ้นเคยและเป็นที่ทราบกันดี คือ กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt, t) \qquad (1.1)$$

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $\mathbf{p}(t) = m d\mathbf{r}/dt$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์โมเมนตัม เราจะทราบเวกเตอร์ของแรง $\mathbf{F}$ ตัวแปรตาม (dependent variable), $\mathbf{r}$, กำหนดจากสมการที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรอิสระ t, และอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้อง ในทางตรงกันข้าม หากเราทราบ $\mathbf{F}$ แต่ $\mathbf{p}(t)$ ไม่ทราบค่า สมการ (1.1) จะเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์หรือ DE การแก้สมการ DE ก็คือการหาค่าฟังก์ชัน $\mathbf{p}(t)$ ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ที่กำหนด

ในกรณีของอนุภาคที่เล็กมากจนถือได้ว่าเป็นจุด จะมีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว จึงเป็น**สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** หรือ ODE (ordinary differential equation) แต่ในฟิสิกส์สาขาอื่นๆ ซึ่งอาจกำหนดอนุภาคเป็นสนาม (fields), การแปรผันตามตำแหน่งจะมีความสำคัญมาก **อนุพันธ์ย่อย** (partial derivative) เทียบกับตัวแปรพิกัด (coordinate variables) จะปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์ และเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือ** PDE (partial differential equations) ตัวอย่างเช่นในไฟฟ้าสถิต (electrostatics) ซึ่งศึกษาเกี่ยวกับสนามสเกลาร์หรือศักย์ (potential) และสนามเวกเตอร์ กฎดังกล่าวอธิบายโดย**สมการปัวส์ซอง** (Poisson's equation) คือ $\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$ โดยที่ Φ เป็นศักย์ไฟฟ้าสถิตและ $\rho(\mathbf{r})$ เป็นความหนาแน่นประจุ ในทฤษฎีของการถ่ายโอนความร้อน, อุณหภูมิ T เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและเวลา สมการที่เกี่ยวข้องคือ**สมการความร้อน**ซึ่งเขียนในรูปแบบ $\partial T/\partial t = (\kappa/\rho c)\nabla^2 T$ โดยที่ κ เป็นสภาพนำความร้อน (heat conductivity), ρ เป็นความหนาแน่นและ c เป็นความจุความร้อนของตัวกลาง ในทำนองเดียวกัน**สมการชเรอดิงเงอร์** (Schrödinger equation), $i\hbar\,\partial\Psi/\partial t = -(\hbar^2/2m)\nabla^2\Psi + V(\mathbf{r})\Psi$ เป็นสมการสำคัญในกลศาสตร์ควอนตัม และ**สมการคลื่น**, $\nabla^2\Psi - (1/c^2)\partial^2\Psi/\partial t^2 = 0$ จะปรากฏในหลายๆ สาขาของฟิสิกส์

เราทราบว่าการไหลของความร้อนผ่านตัวกลางสามารถอธิบายด้วยฟลักซ์ (flux), **F**, ซึ่งเป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางแสดงการไหลของความร้อน และขนาดแสดงปริมาณการไหลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ต่อหนึ่งหน่วยเวลา ฟลักซ์นี้สามารถเขียนในเทอมของเกรเดียนต์ของอุณหภูมิ T ได้เป็น $\mathbf{F} = -\kappa\nabla T$ โดยที่ κ คือสภาพนำความร้อน เนื่องจากการไหลทุกชนิดเกี่ยวข้องกับเวลาเสมอ ดังนั้น เวลา t จึงปรากฏในสมการความร้อนในรูปของอัตราการเปลี่ยนอุณหภูมิตามเวลาที่สัมพันธ์กับเกรเดียนต์ของอุณหภูมิ คือ

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\kappa}{\rho c}\right)\nabla^2 T = \chi\nabla^2 T \qquad (1.2)$$

โดยที่ $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ซึ่งก็คือ**ลาปลาเชียน หรือ** Laplacian นั่นเอง

แนวคิดของการแพร่ (diffusion) ของอนุภาคจะมีลักษณะที่คล้ายกับการไหลของความร้อน กล่าวคือถ้า $n(\mathbf{r}, t)$ เป็นความหนาแน่นของอนุภาค ฟลักซ์ของอนุภาคกำหนดโดย $\mathbf{F} = -C\nabla n$ โดยที่ C เป็นค่าคงตัว **สมการการแพร่** (diffusion equation) ของอนุภาคที่มีโครงสร้างคล้ายกับสมการความร้อนคือ

$$\nabla^2 n = \frac{1}{C}\frac{\partial n}{\partial t} \qquad (1.3)$$

ในกรณีที่อุณหภูมิ T และความหนาแน่นของอนุภาค n เป็นอิสระต่อเวลา สมการ (1.2) และ (1.3) จะกลายเป็น**สมการลาปลาซ** (Laplace's equation) :

$$\nabla^2 T = 0 \qquad \text{หรือ} \qquad \nabla^2 n = 0 \qquad (1.4)$$

และในกรณีที่ T และ n เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและเวลา คือ

$$T(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{-Ak^2 t}$$

$$n(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{-Ck^2 t}$$

เราจะได้**สมการเฮล์มโฮลตซ์** (Helmholtz equation):

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)u(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.5}$$

ในอุทกพลศาสตร์ (hydrodynamics) และอากาศพลศาสตร์ (aerodynamics) กฎข้อที่ 2 ของนิวตันคือ $\mathbf{F} = ma$ จะเปลี่ยนไปเป็น

$$\rho dV \frac{d\mathbf{v}}{dt} = ma$$

โดยที่ dV คือ ปริมาตรของของไหลที่ไหลไปในช่วงเวลา dt ด้วยความเร็ว v และ ρ คือความหนาแน่นของของไหล เนื่องจาก $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ และ $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและเวลา กฎข้อที่ 2 ของนิวตันจึงเขียนใหม่ในรูปแบบของ

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla p \tag{1.6}$$

โดยที่ p คือความดันและสมมติให้เป็นปริมาณสเกลาร์ที่ขึ้นกับตำแหน่งและเวลาหรือ $p = p(\mathbf{r}, t)$ นอกเหนือจากสมการ (1.6) ซึ่งเป็นกฎของนิวตันแล้วยังมี**สมการความต่อเนื่อง** (continuity equation) ซึ่งแสดงการอนุรักษ์สสาร คือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{1.7}$$

การแกว่งกวัดเล็กน้อย (small oscillations) ทำให้ความหนาแน่น ρ และความดัน p เปลี่ยนไปเล็กน้อยเป็น $\rho = \rho_\circ + \rho'$ และ $p = p_\circ + p'$ โดยที่ $\rho' << \rho_\circ$ และ $p' << p_\circ$ ในกรณีของคลื่นเสียง (acoustic wave) ในของไหลที่อัดได้ (compressible fluid) เราอาจสมมติว่าแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดมีค่าน้อยมาก หรือความเร็ว v มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความเร็วของเสียง ดังนั้น กฎข้อที่ 2 ของนิวตันในสมการ (1.6) จะกลายเป็น

$$\rho_\circ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' \tag{1.8}$$

และสมการความต่อเนื่อง (1.7) จะกลายเป็น

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_\circ \nabla . \mathbf{v} = 0 \qquad (1.9)$$

นิวตันสมมติว่าความดัน p เป็นฟังก์ชันของความหนาแน่น ρ เท่านั้น ซึ่งเป็น isothermal fluctuations และให้ตัวแปรอื่นคงตัว ลาปลาซยังสังเกตุว่าคลื่นเสียงมีความเร็วมากจนไม่มีการถ่ายโอนความร้อน หรือเป็นกระบวนการแอเดียแบติก (adiabatic) จากข้อสมมติทั้งสองนี้จึงนำไปสู่สมการคลื่นคือ

$$\nabla^2 \rho' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \qquad (1.10)$$

และ

$$\nabla^2 \mathbf{p}' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{p}'}{\partial t^2} \qquad (1.11)$$

โดยที่ c เป็นความเร็วของคลื่น ทั้ง 2 สมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นเพราะเราสมมติว่าแอมพลิจูดมีค่าน้อย หากเราคิดเทอมที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะให้คลื่นกระแทก (shock waves)

ถ้าของไหลอัดไม่ได้ (incompressible fluid), ความหนาแน่น ρ จะคงตัวและถ้าเป็นการไหลที่ปราศจากการหมุนวน (irrotational flow) นั่นคือ $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ สมการการเคลื่อนที่จะกลายเป็น

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{p}}{\rho}\right) \qquad (1.12)$$

สำหรับการไหลที่คงที่ (steady state flow), $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$, เราจะได้

$$\frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2 + p = \text{const.} \qquad (1.13)$$

และเมื่อคิดศักย์ที่เกิดจากแรงโน้มถ่วงของโลกด้วย สมการ (1.13) จะกลายเป็น

$$\frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2 + \rho g h + p = \text{const.} \qquad (1.14)$$

ซึ่งก็คือ **สมการแบร์นูลลี** (Bernoulli's equation) นั่นเอง

เราคงคุ้นเคยกันดีกับ**สมการแมกซ์เวลล์** (Maxwell's equations) ซึ่งอธิบายสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}$ และสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}$ ซึ่งกำหนดจากแรง $\mathbf{F}$ ที่กระทำต่อจุดประจุ e ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\mathbf{v}$ โดยสมการ $\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}\right)$ แหล่งกำเนิดของสนามทั้งสองคือ ประจุและความหนาแน่นกระแส (current density) ρ และ $\mathbf{j}$ สมการแมกซ์เวลล์ดังกล่าวคือ

$$\nabla . \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{1.15}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.16}$$

$$\nabla . \mathbf{B} = 0 \tag{1.17}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.18}$$

โดยที่ c คือ ความเร็วของแสง สมการแมกซ์เวลล์มีลักษณะเป็นสมการเชิงเส้นและสามารถแปลงไปสู่สมการคลื่นหรือสมการลาปลาซก็ได้

ในกรณีของไฟฟ้าสถิต สมการ (1.15) จะยังคงเดิม แต่สมการ (1.16) จะกลายเป็น

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{1.19}$$

ซึ่งแสดงว่าสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}$ เป็นสนามอนุรักษ์ (conservative) ส่วนสมการ (1.15) เป็นรูปแบบเชิงอนุพันธ์ของกฎของเกาส์ ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟลักซ์ของเวกเตอร์การกระจัด (displacement vector), $\mathbf{D}$, ภายในผิวปิดและจำนวนประจุอิสระที่อยู่ภายในผิวปิดนั้น

จาก $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ และการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์ (vector analysis) แสดงว่า $\mathbf{E}$ เป็นเกรเดียนต์ของสนามสเกลาร์ หรือ $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ หรืออีกนัยหนึ่ง, $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ โดยที่ $\mathbf{P}$ เป็นเวกเตอร์ของโพลาไรเซชัน และโดยทั่วไปเป็นฟังก์ชันของ $\mathbf{E}$ หรือ $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}) = \mathbf{P}(-\nabla\Phi)$ และสมการ (1.15) จะเปลี่ยนไปและให้ผลดังนี้ :

$$\nabla.(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = -\nabla^2\Phi + 4\pi\nabla.\mathbf{P}(\mathbf{E}) = 4\pi\rho_f$$

หรือ
$$\nabla^2\Phi - 4\pi\nabla.\mathbf{P}(\mathbf{E}) = -4\pi\rho_f \qquad (1.20)$$

ความสัมพันธ์ของ **P** ที่ขึ้นกับ **E** ทำให้สมการมีลักษณะไม่เชิงเส้น ยกเว้นในกรณีที่ตัวกลางเป็นสุญญากาศ ($\mathbf{P} = 0$) หรือเป็นเชิงเส้น $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$ (โดยที่ χ เป็นค่าคงตัว) เราจะได้สมการปัวส์ซอง :

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \qquad (1.21)$$

สำหรับตัวกลางเชิงเส้น ค่าของ **D** อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\chi\mathbf{E} = (1 + 4\pi\chi)\mathbf{E} \equiv \varepsilon\mathbf{E}$$

และสมการ (1.15) ในรูปของ **D** จะกลายเป็น

$$\nabla.\mathbf{D} = \nabla.(\varepsilon\mathbf{E}) = \varepsilon\nabla.(-\nabla\Phi) = 4\pi\rho_f$$

หรือ
$$\nabla^2\Phi = -4\pi\frac{\rho_f}{\varepsilon} \equiv -4\pi\rho$$

ในสุญญากาศ ซึ่งให้ค่า $\rho(\mathbf{r}) = 0$, สมการ (1.21) จะกลายเป็นสมการลาปลาซ คือ

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = 0 \qquad (1.22)$$

ในหลายๆ ปัญหาของไฟฟ้าสถิตจะเกี่ยวข้องกับตัวนำที่อยู่ในศักย์ต่างๆ ในสุญญากาศและศักย์ไฟฟ้าจะเป็นไปตามสมการ (1.22) นี้

ในทำนองเดียวกันนี้ สำหรับสนามแม่เหล็กที่เป็นอิสระต่อเวลาจะได้

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \qquad (1.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \qquad (1.24)$$

จากการวิเคราะห์เชิงเวกเตอร์บอกเราให้ทราบว่า สมการ (1.23) แสดงว่า **B** จะต้องเป็น $\text{cur}\ell$ ของสนามเวกเตอร์ที่เรียกว่า **ศักย์เวกเตอร์** (vector potential) แทนด้วย **A** ดังนั้น

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.25}$$

เมื่อแทนค่าสมการ (1.25) ลงใน (1.24) และใช้เอกลักษณ์ของเวกเตอร์คือ

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla . \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

ดังนั้นเราจึงได้

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla . \mathbf{A}) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{1.26}$$

ซึ่งจะให้รูปแบบของสมการปัวส์ซองหากไม่มีเทอมที่ 2 ทางซ้ายมือ

นอกจากนี้หากมีศักย์เวกเตอร์ตัวใหม่คือ $\mathbf{A}'$ ที่เกิดจาก**การแปลงเกจ** (gauge transformation) จากศักย์เวกเตอร์ตัวเดิมหรือ $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$ โดยที่ Λ เป็นสนามสเกลาร์ใดๆ เราพบว่า

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.27}$$

และสมการ (1.26) จะยังคงใช้ได้กับ $\mathbf{A}'$ ด้วย

หากเราเลือก Λ โดยให้ $\mathbf{A}'$ มีรูปแบบที่เป็นสมการปัวส์ซอง คือ

$$\nabla^2 \mathbf{A}' = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{1.28}$$

ซึ่งจะเป็นไปได้เมื่อ $\nabla . \mathbf{A}' = 0$ ฟังก์ชันเกจ Λ ดังกล่าวจะต้องมีรูปแบบที่เป็นสมการปัวส์ซองสำหรับฟังก์ชันสเกลาร์ คือ

$$\nabla^2 \Lambda = -\nabla . \mathbf{A} \tag{1.29}$$

ต่อไปเราจะพิจารณาสมการแมกซ์เวลล์ที่ง่ายกว่าสมการ (1.15) - (1.18) คือกรณี $\rho = 0$ และ $\mathbf{j} = 0$ รวมทั้งใช้เอกลักษณ์ทางเวกเตอร์พบว่า

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.30)$$

และ

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.31)$$

จะเห็นว่าทั้ง **E** และ **B** สอดคล้องกับสมการคลื่นสำหรับกรณีเช่นนี้

จากสมการ (1.25) เมื่อนำไปแทนค่าลงในสมการ (1.16) แล้วเราจะพบว่าจะต้องมีศักย์สเกลาร์ Φ ที่จะทำให้

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad (1.32)$$

และศักย์สเกลาร์ Φ' ที่เกิดจากการแปลงเกจจาก Φ ตัวเดิมหรือ $\Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ โดยที่ Λ เป็นสนามสเกลาร์ใดๆ รวมทั้งการแปลงเกจ $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$ ทำให้สมการ (1.32) ยังคงรูปแบบเดิมคือ

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \qquad (1.33)$$

หากเราเลือก Λ ที่ทำให้

$$\nabla . \mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0$$

เราจะได้สมการสำหรับ Φ' และ $\mathbf{A}'$ คือ

$$\nabla^2 \Phi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} = -4\pi\rho \qquad (1.34)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t^2} = \frac{-4\pi}{c}\mathbf{j} \tag{1.35}$$

สมการที่สำคัญอีกสมการหนึ่งในวิชาฟิสิกส์คือสมการคลื่น หรือ wave equation,

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.36}$$

สมการนี้ใช้กับการสั่นของเส้นเชือกหรือสายโลหะและกลอง การแผ่ของคลื่นเสียงในแก๊ส ของเหลวและของแข็ง การแผ่ของการรบกวนในพลาสมาและการแผ่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

อีกสมการหนึ่งที่มีความสำคัญมากในวิชากลศาสตร์ควอนตัมคือสมการชเรอดิงเงอร์ หรือ Schrödinger equation ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$\nabla^2 \Psi - \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r})\Psi = -\frac{2im}{\hbar}\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{1.37}$$

โดยที่ m เป็นมวลของอนุภาคที่มีขนาดเล็กมากระดับจุลทรรศน์ (microscopic) $\hbar$ คือค่าคงตัวของพลังค์หรือ Planck's constant ที่หารด้วย 2π, V คือ พลังงานศักย์ของอนุภาค และ $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ **คือความหนาแน่นความน่าจะเป็น** (probability density) ที่จะพบอนุภาคที่ตำแหน่ง $\mathbf{r}$ ที่เวลา t

สมการชเรอดิงเงอร์ในเชิงสัมพัทธภาพ (relativistic) สำหรับอนุภาคเสรีมวล m คือ **สมการไคลน์-กอร์ดอน** (Klein-Gordon equation) ซึ่งเขียนในหน่วย $\hbar = 1 = c$ ได้เป็น

$$\nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = m^2 \Phi \tag{1.38}$$

จากที่กล่าวมาทั้งหมดนี้เราพอจะสรุปเป็นภาพรวมทั่วๆ ไปได้ว่าเราไม่อาจหาวิธีใดๆ ที่สามารถแก้ปัญหาที่แตกต่างกันนี้ได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น วัตถุประสงค์ของหัวข้อนี้เพียงแต่สาธิตให้เห็นว่าสมการเชิงอนุพันธ์เข้ามามีบทบาทในหลายๆ สาขาของฟิสิกส์ อย่างไรก็ตาม เราจะสังเกตุเห็นว่าหากมีการแยกแยะและการใช้การประมาณ (approximations) ที่เหมาะสมแล้ว เราอาจสรุปรูปแบบของสมการออกเป็น 3 รูปแบบคือ :

$$\nabla^2\Psi = -4\pi\rho \tag{1.39}$$

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{\chi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -4\pi\rho \tag{1.40}$$

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{1.41}$$

หาก $\rho = 0$ ทางขวามือของทั้ง 3 สมการแล้ว สมการเหล่านี้จะเป็นสมการเอกพันธุ์ (homogeneous equations) และเรามักประสบบ่อยครั้งเช่นกัน อย่างไรก็ตาม แม้ว่าเราอาจจัดการให้ปัญหาต่างๆ มีรูปแบบทั้ง 3 นี้ แต่เงื่อนไขขอบ (boundary conditions) ของแต่ละปัญหาจะแตกต่างกัน เช่น เงื่อนไขขอบของสมการลาปลาซในไฟฟ้าสถิตจะแตกต่างจากเงื่อนไขขอบของสมการลาปลาซของการไหลของของไหลที่อัดไม่ได้ การใช้เทคนิคที่เหมาะสมและการกำหนดค่าเริ่มต้นที่แตกต่างกัน จะได้กล่าวในหัวข้อต่อๆ ไป

เนื่องจากกฎต่างๆ ของฟิสิกส์ส่วนใหญ่กำหนดโดย PDE และมีความหลากหลายวิธีในการแก้ PDE เหล่านี้ แต่ที่นิยมและมักใช้กันคือวิธีการแยกตัวแปร (separation of variables) ซึ่งแยก PDE ออกเป็นหลาย ๆ ODE ซึ่งในบทนี้จะเน้นขั้นตอนนี้ เมื่อแยกออกเป็น ODE หลายๆ สมการแล้ว, ในบทที่ 2 จะได้กล่าวถึงรายละเอียดของ ODE ต่อไป

1.2 การแยกเวลาออกจากพิกัด

เนื่องจากฟังก์ชัน Ψ เป็นฟังก์ชันของพิกัด $\mathbf{r}$ และเวลา t หรือ $\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$ เราจึงเริ่มต้นด้วยการแยกฟังก์ชัน Ψ ออกเป็นผลคูณของแต่ละตัวแปร หรือ

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv R(\mathbf{r})\,T(t)$$

การแยกเช่นนี้ทำให้ $\nabla^2\Psi$ ถูกแทนที่ด้วย $T\nabla^2R$ และ $\partial\Psi/\partial t$ ถูกแทนที่ด้วย $R\,dT/dt$ และเพื่อให้เป็นรูปแบบทั่วไป เราจะใช้สัญลักษณ์ $\hat{\mathbf{L}}$ แทนการดำเนินการบน Ψ ที่ปราศจากอนุพันธ์เทียบกับเวลา นั่นคือ

$$\hat{\mathbf{L}}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

หรือ $$\hat{L}\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

ดังนั้น $\hat{L}$ ในสมการ (1.37) จะเป็น $\hat{L} = -\frac{\hbar}{2mi}\nabla^2 + \frac{1}{i\hbar}V$, และในสมการ (1.38) จะเป็น $\hat{L} = \nabla^2 - m^2$

ด้วยสมการเช่นนี้ เราจึงได้

$$\hat{L}(RT) = T(\hat{L}R) = R\frac{dT}{dt} \left(\text{หรือ } R\frac{d^2T}{dt^2}\right)$$

เมื่อหารตลอดด้วย RT จะได้

$$\frac{1}{R}\hat{L}(R) = \begin{cases} \frac{1}{T}\frac{dT}{dt} \\ \frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} \end{cases} \qquad (1.42)$$

เทอมทางซ้ายมือของสมการ (1.42) เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งเท่านั้น และทางขวามือของสมการเป็นฟังก์ชันของเวลาเท่านั้น เนื่องจาก r และ t เป็นตัวแปรอิสระ, ทางเดียวเท่านั้นที่สมการ (1.42) จะเป็นจริงคือทั้งสองข้างของสมการจะต้องเท่ากับค่าคงตัว สมมติแทนด้วย α ดังนั้น

$$\frac{1}{R}\hat{L}(R) = \alpha \qquad \text{หรือ} \qquad \hat{L}R = \alpha R$$

และ $$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \alpha \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{dT}{dt} = \alpha T$$

หรือ $$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = \alpha \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{d^2T}{dt^2} = \alpha T$$

จะเห็นได้ว่าเราได้ลด PDE จากเดิมที่ขึ้นกับเวลาไปเป็น ODE,

$$\frac{dT}{dt} = \alpha T \quad \text{หรือ} \quad \frac{d^2T}{dt^2} = \alpha T \tag{1.43}$$

และเป็น PDE ที่ขึ้นกับตัวแปรตำแหน่งเท่านั้น,

$$\left(\hat{L} - \alpha\right)R = 0$$

เนื่องจากรูปแบบทั่วไปของ $\hat{\mathbf{L}} - \alpha$ จากที่กล่าวมาแล้ว คือ

$$\hat{\mathbf{L}} - \alpha \equiv \nabla^2 + f(\mathbf{r})$$

ดังนั้น สมการสำหรับตัวแปรตำแหน่งคือ

$$\nabla^2 R + f(\mathbf{r})R = 0 \tag{1.44}$$

หาก $f(r) = 0$, สมการ (1.44) จะกลายเป็นสมการลาปลาซ นอกจากนี้ถ้าขวามือของสมการ (1.44) ไม่เท่ากับศูนย์แต่แทนด้วย $g(\mathbf{r}) \equiv -4\pi\rho(\mathbf{r})$, ก็จะกลายเป็นสมการปัวส์ซอง:

$$\nabla^2 R + f(\mathbf{r})R = g(\mathbf{r})$$

เราจึงสรุปได้ว่า PDE ส่วนใหญ่ที่เราพบในฟิสิกส์สามารถลดลงมาเหลือ ODE ที่มีรูปแบบง่ายขึ้นคือ สมการ (1.43) และ PDE ตามสมการ (1.44) ในขั้นต้นนี้เราจะพิจารณากรณีสมการเอกพันธุ์และเขียนสมการ (1.44) เสียใหม่เป็น

$$\nabla^2\Psi(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.45}$$

ส่วนสมการที่ไม่ใช่เอกพันธุ์หรือ $g(\mathbf{r}) \neq 0$ จะได้กล่าวในตอนต่อๆ ไป

1.3 การแยกในพิกัดคาร์ทีเซียน

ในพิกัดคาร์ทีเซียน (cartesian coordinates), สมการ (1.45) จะกลายเป็น

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + f(x, y, z)\Psi = 0$$

เราอาจแยกฟังก์ชัน Ψ ออกเป็นผลคูณของฟังก์ชันของพิกัดย่อย คือ

$$\Psi(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

และแยกฟังก์ชัน *f(x, y, z)* ออกเป็นผลบวกของ 3 ฟังก์ชัน คือ

$$f(x, y, z) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z)$$

หลังจากจัดรูปแบบเสียใหม่จะได้

$$\left[\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + f_1(x)\right] + \left[\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + f_2(y)\right] + \left[\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + f_3(z)\right] = 0$$

ซึ่งแยกออกเป็น 3 เทอมที่ขึ้นกับตัวแปรย่อยที่แตกต่างกัน เนื่องจากผลบวกของทั้ง 3 เทอม เป็นค่าคงตัวคือเท่ากับศูนย์ แต่ละเทอมจะต้องเท่ากับค่าคงตัว, สมมติเท่ากับ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ตามลำดับ ดังนั้น สมการข้างต้นจึงแยกออกเป็น 4 สมการย่อย คือ

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \left[f_1(x) - \alpha_1\right]X = 0 \tag{1.46}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \left[f_2(y) - \alpha_2\right]Y = 0 \tag{1.47}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left[f_3(z) - \alpha_3\right]Z = 0 \tag{1.48}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \tag{1.49}$$

ซึ่งเป็นเซตของ ODE ที่เป็นผลจากการแยก PDE ของสมการ (1.45)

สำหรับสมการลาปลาซในวิชาไฟฟ้าสถิต เนื่องจาก f(r) = 0, สมการ (1.46) - (1.48) จะเป็น ODE คือ

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \alpha_1 X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} - \alpha_2 Y = 0, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} + (\alpha_1 + \alpha_2)Z = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลยที่อาจเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไฮเพอร์โบลา หรือเลขชี้กำลัง (exponential) **ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบ** ซึ่งในที่นี้คือผิวของตัวนำ

ในกลศาสตร์ควอนตัม, สมการชเรอดิงเงอร์ที่เป็นอิสระต่อเวลาสำหรับอนุภาคเสรีใน 3 มิติ คือ

$$\nabla^2\Psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi = 0$$

โดยที่มวล m, พลังงาน E ของอนุภาค รวมทั้ง $\hbar$ เป็นค่าคงตัว ในกรณีนี้ $f(\mathbf{r}) = 2mE/\hbar^2$ ซึ่งอาจรวมเข้ากับ α_1 ในสมการ (1.46) ดังนั้น

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \left(\alpha_1 - \frac{2mE}{\hbar^2}\right)X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} - \alpha_2 Y = 0$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \alpha_3 Z = 0, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

ในกรณีสมการความร้อนและสมการคลื่น หลังจากที่เราแยกเวลาออกจากตัวแปรของพิกัดแล้ว สมการ ODE ข้างต้นจะยังคงใช้ได้กับกรณีนี้เช่นกัน

สำหรับตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกชนิดไอโซโทรปี (isotropic harmonic oscillator) สมการชเรอดิงเงอร์ คือ

$$\nabla^2\Psi - \left(\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}r^2 - \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\Psi = 0$$

ดังนั้น $f(\mathbf{r}) = -\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = -\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \frac{2mE}{\hbar^2}$

เมื่อรวมค่าคงตัว $2mE/\hbar^2$ และ α_1 เข้าด้วยกันจะได้สมการย่อย

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2X = \left(\alpha_1 - \frac{2mE}{\hbar^2}\right)X$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}y^2Y = \alpha_2Y$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}z^2Z = \alpha_3Z$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

เพื่อให้เราได้คุ้นเคยรูปแบบของสมการรวมทั้งการแยกตัวแปรในพิกัดคาร์ทีเซียนและรูปแบบของผลเฉลยทั่วไป จะขอยกตัวอย่างแสดงดังนี้ :

สมการลาปลาซ 2 มิติ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ให้ $u(x, y) = f_1(x)\,f_2(y)$, สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$\frac{1}{f_1(x)}\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{f_2(y)}\frac{\partial^2 f_2(y)}{\partial y^2} = 0$$

ให้ $$\frac{1}{f_1(x)}\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} = \lambda, \quad \frac{1}{f_2(y)}\frac{\partial^2 f_2(y)}{\partial y^2} = -\lambda$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} - \lambda f_1(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_2(y)}{\partial y^2} + \lambda f_2(y) = 0$$

ถ้า $\lambda > 0;$ $$f_1(x) = A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$f_2(y) = A_3\cos\sqrt{\lambda}\,y + A_4\sin\sqrt{\lambda}\,y$$

ถ้า $\lambda = 0;$ $$f_1(x) = A_1x + A_2$$

$$f_2(y) = A_3y + A_4$$

ถ้า $\lambda < 0;$ $$f_1(x) = A_1\cos\sqrt{-\lambda}\,x + A_2\sin\sqrt{-\lambda}\,x$$

$$f_2(y) = A_3 e^{\sqrt{-\lambda}y} + A_4 e^{-\sqrt{-\lambda}y}$$

ดังนั้น เมื่อรวมผลของแต่ละเงื่อนไขเข้าด้วยกันแล้ว จะได้ผลเฉลยรวมเป็น

$$u(x, y) = \begin{cases} \left(A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}\right)\left(A_3\cos\sqrt{\lambda}\,y + A_4\sin\sqrt{\lambda}\,y\right) & \lambda > 0 \\ \left(A_1x + A_2\right)\left(A_3y + A_4\right) & \lambda = 0 \\ \left(A_1\cos\sqrt{-\lambda}\,x + A_2\sin\sqrt{-\lambda}\,x\right)\left(A_3 e^{\sqrt{-\lambda}y} + A_4 e^{-\sqrt{-\lambda}y}\right) & \lambda < 0 \end{cases}$$

สมการการนำความร้อน

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}$$

ให้ $K(x, t) = X(x)\,T(t)$, ดังนั้นสมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \beta$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2 X}{dx^2} - \beta X = 0$$

$$\frac{dT}{dt} - \alpha\beta T = 0$$

ถ้า $\beta = \lambda^2;$ $\qquad X = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x}$

$$T = A_3 e^{\alpha\lambda^2 t}$$

ถ้า $\beta = -\lambda^2;$ $\qquad X = A_1 \cos\lambda x + A_2 \sin\lambda x$

$$T = A_3 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

ถ้า $\beta = 0;$ $\qquad X = A_1 x + A_2$ $\quad$ และ $T = A_3$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการการนำความร้อน จึงเป็น

$$K(x, t) = \begin{cases} \left(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}\right)e^{\alpha\lambda^2 t} & \beta = \lambda^2 \\ \left(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x\right)e^{-\alpha\lambda^2 t} & \beta = -\lambda^2 \\ Ax + B & \beta = 0 \end{cases}$$

โดยที่ $A = A_1A_3$ และ $B = A_2A_3$

ผลเฉลยจำนวนจริงและเชิงซ้อนที่แยกจากกัน

ในบางครั้งเราอาจแยกฟังก์ชัน Ψ ออกเป็นผลคูณของฟังก์ชันของพิกัดย่อยที่เป็นจำนวนจริงและเชิงซ้อน (complex) ได้ **ประพจน์** (proposition) ทั้งสองต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่าส่วนจริงและส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของผลเฉลยดังกล่าวยังคงสอดคล้องกับ PDE เช่นเดิม

ประพจน์ 1

ให้ $u(x, y) = v_1(x, y) + iv_2(x, y)$ เป็นผลเฉลยค่าเชิงซ้อนของ PDE

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ A, B, C, D, E, F, G เป็นฟังก์ชันค่าจริงของ (x, y) ดังนั้น $v_1(x, y) = \text{Re}\,u(x, y)$ สอดคล้องกับ PDE และ $v_2(x, y) = \text{Im}\,u(x, y)$ สอดคล้องกับสมการเอกพันธุ์ ด้วยค่า $G = 0$

การพิสูจน์ประพจน์นี้ค่อนข้างง่ายเพราะอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันเป็นแบบเชิงเส้นดังนั้น

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}$$

อนุพันธ์ $\partial u/\partial y, \partial^2 u/\partial^2 y$ และ $\partial^2 u/\partial x\partial y$ ก็มีลักษณะเชิงเส้นเช่นเดียวกันด้วย เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงใน PDE แล้วแยกค่าจริงและค่าจินตภาพออกจากกันก็จะให้ผลเป็นไปตามประพจน์

จากสมการลาปลาซ 2 มิติที่ได้เสนอเป็นตัวอย่างมาแล้วนั้น เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่าฟังก์ชัน $u(x, y) = e^{x+iy} = e^x.e^{iy}$ สอดคล้องกับสมการลาปลาซทั้งนี้เพราะ $\partial^2 u/\partial x^2 = u$ และ $\partial^2 u/\partial y^2 = -u$ ในการหาค่าจริงและค่าจินตภาพ, เราจะเขียน

$$u(x, y) = e^{x}(\cos y + i\sin y) = e^{x}\cos y + ie^{x}\sin y$$

เนื่องจากสมการลาปลาซเป็นสมการเอกพันธุ์ เราจึงสรุปว่าทั้ง $e^{x}\cos y$ และ $e^{x}\sin y$ เป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซ ซึ่งสอดคล้องกับกรณี $\lambda = 1$ ของตัวอย่างที่แล้วที่ใช้วิธีแยกตัวแปร

ผลเฉลยที่แยกออกเป็นค่าเชิงซ้อนนี้อาจพบบ่อยครั้งเมื่อฟังก์ชัน A, B, C, D, E, F ที่ปรากฏในสมการเป็นอิสระต่อ (x, y) กรณีเช่นนี้เป็น PDE ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ซึ่งมีผลเฉลยที่อาจเขียนเป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ประพจน์ 2

PDE ที่เป็นเอกพันธุ์

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

โดยที่ A, B, C, D, E, F เป็นค่าคงตัวจำนวนจริง ดังนั้นจะมีผลเฉลยที่แยกค่าเชิงซ้อนในรูปแบบ

$$u(x, y) = e^{\alpha x}e^{\beta y}$$

สำหรับการเลือกจำนวนเชิงซ้อน α, β ที่เหมาะสม

ในการพิสูจน์ประพจน์นี้ ให้เราสังเกตุว่ากฎทั่วไปสำหรับการหาอนุพันธ์ $e^{\alpha x}$ ยังคงใช้ได้เสมอกับฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน ตัวอย่างเช่น ถ้า $\alpha = a + ib$,

$$\therefore \frac{de^{\alpha x}}{dx} = \frac{d}{dx}\left[e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)\right]$$

$$= ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx + i\left(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx\right)$$

$$= e^{ax}(a + ib)(\cos bx + i\sin bx)$$

$$= (a + ib)e^{(a+ib)x}$$

$$= \alpha e^{\alpha x}$$

ในทำนองเดียวกัน, $(d^2/dx^2)(e^{\alpha x}) = \alpha^2 e^{\alpha x}$ รวมทั้งอนุพันธ์ $d/dy, d^2/dy^2$ จะให้ผลในลักษณะเช่นเดียวกัน เมื่อใช้กับฟังก์ชัน $u(x, y) = e^{\alpha x}e^{\beta y}$ จะได้ $\partial u/\partial x = \alpha u, \partial^2 u/\partial x^2 = \alpha^2 u, \partial u/\partial y = \beta u, \partial^2 u/\partial y^2 = \beta^2 u, \partial^2 u/\partial x\partial y = \alpha\beta u$ เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงใน PDE จะได้

$$(A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F)e^{\alpha x}e^{\beta y} = 0$$

แต่ $e^{\alpha x}e^{\beta y} \neq 0$ ดังนั้น เราจึงได้ผลเฉลยถ้า α, β สอดคล้องกับสมการกำลังสอง

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F = 0$$

สำหรับค่า β ที่กำหนดให้, เราอาจแก้สมการเพื่อหาค่า α ที่มีราก α_1, α_2 และสำหรับค่า α ที่ตรึง, เราอาจแก้สมการเพื่อหาค่า β ที่มีราก β_1, β_2 ซึ่งเป็นการพิสูจน์ประพจน์ 2 นั่นเอง

เพื่อให้เห็นแนวทางในการหาผลเฉลยดังได้กล่าวมานี้ ลองศึกษาจากตัวอย่างที่จะนำเสนอต่อไปนี้:

(1) การหาผลเฉลยแยกของสมการ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ ในรูปแบบ $u(x, t) = e^{i\mu x}e^{\beta t}$ ด้วยค่าจริง μ, β.

แทนค่า $u(x, t) = e^{i\mu x}e^{\beta t}$ ลงในสมการทำให้ได้สมการกำลังสอง $-\mu^2 - \beta = 0$ ดังนั้น $\beta = -\mu^2$, เราจึงแยกผลเฉลยออกเป็น

$$u(x, t) = e^{i\mu x}e^{-\mu^2 t}$$

$$= \cos\mu x e^{-\mu^2 t} + i\left(\sin\mu x e^{-\mu^2 t}\right)$$

ดังนั้น เราจึงได้ผลเฉลยค่าจริง $\sin \mu x e^{-\mu^2 t}$ และ $\cos \mu x e^{-\mu^2 t}$ ซึ่งเข้าใกล้ศูนย์เมื่อเวลา t เข้าใกล้อนันต์ ในบางกรณีเราอาจต้องการผลเฉลยที่แกว่งกวัด (oscillate) ตามเวลาซึ่งแสดงการกระตุ้นแบบมีจังหวะ ❖

(2) การหาผลเฉลยแยกของสมการ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ ในรูปแบบ $u(x, t) = e^{\alpha x} e^{i\omega t}$ โดยที่ ω เป็นจำนวนจริงค่าบวก

แทนค่า $u(x, t) = e^{\alpha x} e^{i\omega t}$ ลงในสมการทำให้ได้สมการกำลังสอง $\alpha^2 - i\omega = 0$ ซึ่งมีผลเฉลย 2 ค่า และหาได้ดังนี้ ถ้าเขียนจำนวนเชิงซ้อน i ในรูปแบบเชิงขั้วเป็น $i = e^{i\pi/2}$ เราจะได้ราก 2 ค่าคือ

$$\sqrt{i} = \pm e^{i\pi/4} = \pm \frac{(1 + i)}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการกำลังสองคือ $\alpha = \pm(1 + i)\sqrt{\omega / 2}$

ผลเฉลยแยกจะกลายเป็น

$$u(x, t) = \begin{cases} \exp\left[x(1 + i)\sqrt{\omega / 2}\right]\exp(i\omega t) = \exp\left(x\sqrt{\omega / 2}\right)\exp\left[i\left(\omega t + x\sqrt{\omega / 2}\right)\right] \\ \exp\left[-x(1 + i)\sqrt{\omega / 2}\right]\exp(i\omega t) = \exp\left(-x\sqrt{\omega / 2}\right)\exp\left[i\left(\omega t - x\sqrt{\omega / 2}\right)\right] \end{cases}$$

ซึ่งอาจแยกออกเป็นผลเฉลยค่าจริงจำนวน 4 ค่าคือ

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{x\sqrt{\omega/2}} \cos\left(\omega t + x\sqrt{\omega / 2}\right) \\ e^{x\sqrt{\omega/2}} \sin\left(\omega t + x\sqrt{\omega / 2}\right) \\ e^{-x\sqrt{\omega/2}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\omega / 2}\right) \\ e^{-x\sqrt{\omega/2}} \sin\left(\omega t - x\sqrt{\omega / 2}\right) \end{cases}$$

ผลเฉลยค่าจริงเหล่านี้ไม่ได้อยู่ในรูแบบแยก $f_1(x)f_2(t)$ อีกต่อไป แต่เนื่องจากค่าเหล่านี้เกิดจากส่วนจริงและส่วนจินตภาพของผลเฉลยแยกที่เป็นค่าเชิงซ้อนเราจึงเรียกค่าเหล่านี้ว่า **quasi-separated solution** ❖

ถ้าสัมประสิทธิ์บางตัวของ A, B, C, D, E, F ไม่คงตัว, เราไม่อาจได้ผลเฉลยแยกในรูปแบบฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล รวมทั้งไม่อาจให้ผลเฉลยในรูแปบบผสมเช่นกัน อย่างไรก็ตาม รูปแบบต่างๆ ของสมการอาจแก้ได้โดยการแยกตัวแปร เช่น ถ้าสมการมีรูปแบบ

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x)\frac{\partial u}{\partial x} + E(y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

สมมติให้ $u(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ เราต้องได้

$$A(x)\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2}f_2(y) + C(y)f_1(x)\frac{\partial^2 f_2(y)}{\partial y^2} + D(x)\frac{\partial f_1(x)}{\partial x}f_2(y) + E(y)f_1(x)\frac{\partial f_2(y)}{\partial y} = 0$$

เมื่อหารตลอดด้วย $f_1(x)f_2(y)$ จะได้

$$\left[A(x)\frac{\partial^2 f_1(x)/\partial x^2}{\partial f_1(x)/\partial x} + D(x)\frac{\partial f_1(x)/\partial x}{f_1(x)}\right] + \left[C(y)\frac{\partial^2 f_2(y)/\partial y^2}{f_2(y)} + E(y)\frac{\partial f_2(y)/\partial y}{f_2(y)}\right] = 0$$

เทอมในวงเล็บแรกขึ้นกับ x เท่านั้น ในขณะที่เทอมในวงเล็บที่ 2 ขึ้นกับ y เท่านั้น ดังนั้น ทั้งสองวงเล็บจะต้องเท่ากับค่าคงตัว และเราได้ลดสมการลงมาเหลือเพียง ODE เท่านั้น

(3) การหาผลเฉลยแยกของสมการ $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ให้
$u(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ ดังนั้น

$$\frac{1}{f_1(x)}\left[x^2\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial f_1(x)}{\partial x}\right] + \frac{1}{f_2(y)}\frac{\partial^2 f_2(y)}{\partial y^2} = 0$$

เราแยกสมการออกเป็น

$$x^2\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial f_1(x)}{\partial x} - \lambda f_1(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_2(y)}{\partial y^2} + \lambda f_2(y) = 0$$

สมการแรกอยู่ในรูปแบบ**สมการออยเลอร์** (Euler's equidimensional equation) ซึ่งมีผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ $f_1(x) = x^\gamma$ โดยที่ $\gamma(\gamma - 1) + 2\gamma - \lambda = 0$ ซึ่งมีรากเป็น $\gamma_1 = -\frac{1}{2} + ic_\lambda$ และ $\gamma_2 = -\frac{1}{2} - ic_\lambda$ โดยที่ $c_\lambda = \sqrt{-\lambda - \frac{1}{4}}$ ดังนั้น

$$f_1(x) = \begin{cases} A_1 x^{\gamma_1} + A_2 x^{\gamma_2} & \lambda + \frac{1}{4} > 0 \\ A_1|x|^{-\frac{1}{2}} + A_2|x|^{-\frac{1}{2}}\,\ell og|x| & \lambda + \frac{1}{4} = 0 \\ |x|^{-\frac{1}{2}}\left[A_1\cos\left(c_\lambda \ell og|x|\right) + A_2\sin\left(c_\lambda \ell og|x|\right)\right] & \lambda + \frac{1}{4} < 0 \end{cases}$$

สมการที่สองจะเหมือนกับที่เคยหาไว้แล้วคือกรณี $\lambda > 0, \lambda = 0$ และ $\lambda < 0$ ดังนั้น ผลเฉลยแยกจึงมีค่าดังนี้:

$$|x|^{-\frac{1}{2}}\left[A_1\cos\left(c_\lambda \ell og|x|\right) + A_2\sin\left(c_\lambda \ell og|x|\right)\right]\left(A_3 e^{y\sqrt{\lambda}} + A_4 e^{-y\sqrt{-\lambda}}\right) \qquad \lambda < -\frac{1}{4}$$

$$\left(A_1|x|^{-\frac{1}{2}} + A_2|x|^{-\frac{1}{2}}\,\ell og|x|\right)\left(A_3 e^{y/2} + A_4 e^{-y/2}\right. \qquad \lambda = -\frac{1}{4}$$

$$\left(A_1|x|^{\gamma_1} + A_2|x|^{\gamma_2}\right)\left(A_3 e^{y\sqrt{-\lambda}} + A_4 e^{-y\sqrt{-\lambda}}\right. \qquad -\frac{1}{4} < \lambda < 0$$

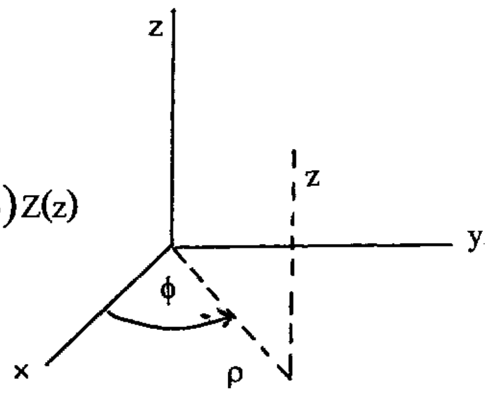
$$\left(A_1 + A_2 x^{-1}\right)\left(A_3 + A_4 y\right) \qquad \lambda = 0$$

$$\left(A_1|x|^{\gamma_1} + A_2|x|^{\gamma_2}\right)\left(A_3\cos y\sqrt{\lambda} + A_4\sin y\sqrt{\lambda}\right. \qquad \lambda > 0$$

1.4 การแยกในพิกัดทรงกระบอก

สมการ (1.45) ในพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinates) คือ

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + f(\rho,\phi,z)\Psi = 0$$



ฟังก์ชัน Ψ อาจแยกออกได้เป็น

$$\Psi(\rho,\phi,z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$$

และฟังก์ชัน $f(\rho,\phi,z)$ อาจแยกเป็น

$$f(\rho,\phi,z) = f_1(\rho) + \frac{1}{\rho^2}f_2(\phi) + f_3(z)$$

เมื่อจัดรูปแบบเสียใหม่และใช้ฟังก์ชันเหล่านี้ สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$\left[\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + f_1(\rho)\right] + \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + f_2(\phi)\right] + \left[\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + f_3(z)\right] = 0$$

เนื่องจาก 2 เทอมแรกไม่ขึ้นกับตัวแปร z เราจึงแยกออกเป็น 2 สมการย่อย คือ

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + f_3(z) = \alpha_1$$

$$\left[\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + f_1(\rho)\right] + \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + f_2(\phi)\right] + \alpha_1 = 0$$

เมื่อคูณตลอดด้วย ρ^2 สมการสุดท้ายจะกลายเป็น

$$\left[\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \rho^2 f_1(\rho) + \alpha_1\rho^2\right] + \left[\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + f_2(\phi)\right] = 0$$

เนื่องจากเทอมแรกเป็นฟังก์ชันของ ρ เท่านั้น ในขณะที่เทอมที่สองเป็นฟังก์ชันของ ϕ เท่านั้น ทั้ง 2 เทอมจะต้องมีค่าคงตัว และเมื่อรวมกันจะต้องเท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + f_2(\phi) = \alpha_2$$

$$\frac{1}{R}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \rho^2 f_1(\rho) + \alpha_1\rho^2 + \alpha_2 = 0$$

เมื่อรวมผลที่ได้ข้างต้นเข้าด้วยกัน เราจึงสรุปว่า เมื่อสมการ (1.45) ถูกแยกออกโดยใช้พิกัดทรงกระบอกจะได้ ODE จำนวน 3 สมการ คือ

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left[f_3(z) - \alpha_1\right]Z = 0 \qquad (1.50)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \left[f_2(\phi) - \alpha_2\right]\Phi = 0 \qquad (1.51)$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left[\rho^2\left\{f_1(\rho) + \alpha_1\right\} + \alpha_2\right]R = 0 \qquad (1.52)$$

ในกรณี $f_1(\rho) = 0$, เราจะได้**สมการเชิงอนุพันธ์เบสเซล** (Bessel differential equation) คือ

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \left(\alpha_1\rho^2 + \alpha_2\right)R = 0$$

ซึ่งมักปรากฏในวิชาไฟฟ้าสถิตและการถ่ายโอนความร้อนในวัตถุรูปทรงกระบอก รวมทั้งปัญหาเกี่ยวกับสมการคลื่น 2 มิติ เช่น คลื่นบนหน้ากลอง เป็นต้น

ลองพิจารณาโลหะทรงกระบอกยาว ℓ ซึ่งมีศักย์ไฟฟ้า V_o ที่บริเวณผิวด้านข้าง ส่วนผิวด้านบนและล่างจะต่อลงดินทำให้มีศักย์ไฟฟ้าเป็นศูนย์

ในกรณีเช่นนี้จะมีรูปแบบเป็นสมการลาปลาซ โดย $f(\mathbf{r}) = 0$ ซึ่งแสดงว่า $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ และสมการ (1.50) จะกลายเป็น

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - \alpha_1 Z = 0$$

หาก $\alpha_1 \neq 0$, ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$Z = Ae^{\sqrt{\alpha_1}z} + Be^{-\sqrt{\alpha_1}z}$$

เมื่อใช้เงื่อนไขขอบของศักย์ไฟฟ้า $V(\rho, \phi, 0) = 0$ จะได้

$$R(\rho)\Phi(\phi)Z(0) = 0$$

ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ ρ และ ϕ ดังนั้น $Z(0)$ จะต้องเท่ากับศูนย์เท่านั้น หรือ $A + B = 0$ เราจึงได้

$$Z = A\left(e^{\sqrt{\alpha_1}z} - e^{-\sqrt{\alpha_1}z}\right)$$

ที่ $z = \ell$, ศักย์ไฟฟ้าจะเป็นศูนย์เช่นกันเพราะต่อลงดิน ดังนั้น $Z(\ell) = 0$ หรือ

$$Z(\ell) = A\left(e^{\sqrt{\alpha_1}\ell} - e^{-\sqrt{\alpha_1}\ell}\right) = 0$$

สำหรับ $A = 0$, ทำให้ $Z = 0$ ซึ่งหมายถึง $V = 0$ จึงเป็นกรณีที่ไม่น่าสนใจแต่อย่างใด แต่เราจะสนใจไปที่เทอมในวงเล็บมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$e^{\sqrt{\alpha_1}\ell} = e^{-\sqrt{\alpha_1}\ell} \qquad \text{หรือ} \qquad e^{2\sqrt{\alpha_1}\ell}$$

สำหรับค่า $\sqrt{\alpha_1}$ ที่เป็นจริง ผลเฉลยที่เป็นไปได้คือ $\alpha_1 = 0$ เท่านั้น และสำหรับค่า $\sqrt{\alpha_1}$ ที่เป็นเลขจินตภาพ (imaginary number) เราพบว่า $2\sqrt{\alpha_1}\ell = 2in\pi$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม (integer) ดังนั้น

$$\alpha_1 = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \qquad\qquad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

หาก $\alpha_1 = 0$, ดังนั้น $d^2Z/dz^2 = 0$ ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปเป็น $Z = az + b$ โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัวใดๆ

ต่อไปเราลองพิจารณาข้อจำกัดของ α_2 ในสมการ (1.51) ด้วยค่า $f_2 \equiv 0$ ดังนั้น

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} - \alpha_2\Phi = 0$$

ซึ่งมีรูปแบบที่คล้ายกับกรณีแรก จึงมีผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$\Phi = \begin{cases} Ce^{\sqrt{\alpha_2}\phi} + De^{-\sqrt{\alpha_2}\phi} & \alpha_2 \neq 0 \\ C'\phi + D' & \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

ไม่ว่าจะมีเงื่อนไขขอบเป็นแบบใดก็ตาม Φ จะต้องมีค่าเท่ากันที่ ϕ และที่ $\phi + 2\pi$ ซึ่งหมายความว่า $\alpha_2 \neq 0$ โดยเราไม่นับ $\Phi = D'$ ดังนั้น

$$R(\rho)\Phi(\phi)Z(z) = R(\rho)\Phi(\phi + 2\pi)Z(z)$$

เมื่อแทนค่าลงในผลเฉลยทั่วไปข้างต้นจะได้

$$Ce^{\sqrt{\alpha_2}\phi} + De^{-\sqrt{\alpha_2}\phi} = Ce^{\sqrt{\alpha_2}(\phi + 2\pi)} + De^{-\sqrt{\alpha_2}(\phi + 2\pi)}$$

หรือ $$Ce^{\sqrt{\alpha_2}\phi}\left(1 - e^{\sqrt{\alpha_2}2\pi}\right) + De^{-\sqrt{\alpha_2}\phi}\left(1 - e^{-\sqrt{\alpha_2}\pi}\right) = 0$$

คูณตลอดด้วย $e^{\sqrt{\alpha_2}\phi}$ จะได้

$$Ce^{2\sqrt{\alpha_2}\phi}\left(1 - e^{\sqrt{\alpha_2}2\pi}\right) + D\left(1 - e^{-\sqrt{\alpha_2}2\pi}\right) = 0$$

ซึ่งใช้ได้กับทุกค่าของ ϕ และจะเป็นจริงได้เมื่อ

$$1 - e^{\sqrt{\alpha_2}2\pi} = 0 \qquad \text{และ} \qquad 1 - e^{-\sqrt{\alpha_2}2\pi} = 0$$

เท่านั้น ผลเฉลยทั่วไปของทั้ง 2 กรณี คือ

$$\sqrt{\alpha_2} = im \quad \text{หรือ} \quad \alpha_2 = -m^2, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

ในบางครั้งผลเฉลยของสมการในพิกัดทรงกระบอกอาจมีลักษณะเป็นคาบ เช่น ผลเฉลยของสมการคลื่นหนึ่งมิติในพิกัดทรงกระบอกซึ่งฟังก์ชัน Ψ ขึ้นกับ ρ เพียงอย่างเดียว คือ

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

ถ้าเราให้ผลเฉลยที่เป็นคาบตามเวลา เขียนเป็น

$$\Psi(\rho, t) = R(\rho)e^{i\omega t}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = \frac{\partial R}{\partial\rho}e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 R(\rho)e^{i\omega t}$$

เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงไปจะทำให้สมการคลื่นกลายเป็น

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}e^{i\omega t}\right] = -\frac{\omega^2}{c^2}R(\rho)e^{i\omega t}$$

หรือ
$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho} + \frac{\omega^2}{c^2}R = 0$$

ซึ่งมีรูปแบบเป็น**สมการเบสเซล** และผลเฉลยคือ

$$R(\rho) = AJ_\circ\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) + BY_\circ\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)$$

โดยที่ J_o และ Y_o **เป็นฟังก์ชันเบสเซลอันดับที่ศูนย์ชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สอง** (zero-order Bessel functions of first and second kind) ตามลำดับ

ในรูปเชิงซ้อน, เราสามารถเขียนสมการนี้ได้เป็น

$$R(\rho) = C_1\left[J_\circ\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) + iY_\circ\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\right] + C_2\left[J_\circ\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) - iY_\circ\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\right]$$

หรือสามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$R(\rho) = C_1 H_\circ^{(1)}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) + C_2 H_\circ^{(2)}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)$$

โดยที่ $H_\circ^{(1)}$, $H_\circ^{(2)}$ **เป็นฟังก์ชันฮันเกล** (Hankel function) กำหนดโดย

$$H_\circ^{(1)} = J_\circ\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) + iY_\circ\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)$$

$$H_\circ^{(2)} = J_\circ\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) - iY_\circ\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)$$

ซึ่งมีลักษณะคล้ายฟังก์ชันตรีโกณมิติแบบหน่วง (damped) เมื่อ ρ มีค่ามาก ดังนั้น ผลเฉลยของสมการคลื่นหนึ่งมิติจะกลายเป็น

$$\Psi(\rho, t) = C_1 e^{i\omega t} H_\circ^{(1)}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right) + C_2 e^{i\omega t} H_\circ^{(2)}\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)$$

การกระจายเชิงเส้นกำกับ (asymptotic expansion) สำหรับ $H_\circ^{(1)}$ และ $H_\circ^{(2)}$ คือ

$$H_\circ^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i(x-\pi/4)}$$

$$H_\circ^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i(x-\pi/4)} \qquad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่ามาก}$$

ผลเฉลยทั่วไปที่เป็นคาบของสมการคลื่นหนึ่งมิติในพิกัดทรงกระบอกคือ

$$\Psi(\rho, t) = \sqrt{\frac{2c}{\pi\omega}}\left[C_1 e^{-i\pi/4}\frac{\exp[i(\omega / c)(\rho + ct)]}{\sqrt{\rho}} + C_2 e^{i\pi/4}\frac{\exp[i(\omega / c)(\rho - ct)]}{\sqrt{\rho}}\right]$$

เพื่อให้เกิดทักษะในการแยกตัวแปรในพิกัดทรงกระบอกมากยิ่งขึ้น พิจารณาสมการการแพร่ใน 3 มิติ คือ

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha\nabla^2 n$$

ในพิกัดทรงกระบอก (ρ, ϕ, z) สมการการแพร่ดังกล่าวจะกลายเป็น

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial^2 n}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial n}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 n}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}$$

โดยที่ความหนาแน่นของอนุภาค $n = n(\rho, \phi, z, t)$

สมมติเราแยกตัวแปรออกเป็น

$$n(\rho, \phi, z, t) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)T(t)$$

เมื่อแทนค่าลงไปในสมการแพร่จะได้

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2}\Phi ZT + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial \rho}\Phi ZT + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}RZT + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}R\Phi T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}R\Phi Z$$

หรือ

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho R}\frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha T}\frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda^2$$

โดยที่ $-\lambda^2$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้น

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \alpha\lambda^2 T = 0$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho R}\frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \lambda^2 = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\mu^2$$

ดังนั้น สมการที่กำหนดค่า R, Z และ Φ คือ

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \mu^2 Z = 0$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho R}\frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \lambda^2 + \mu^2 = 0$$

หรือ $$\frac{\rho^2}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{\rho}{R}\frac{\partial R}{\partial \rho} + \left(\lambda^2 + \mu^2\right)\rho^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = \nu^2$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \nu^2 \Phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial \rho} + \left[\left(\lambda^2 + \mu^2\right) - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right]R = 0$$

ผลเฉลยของแต่ละฟังก์ชันย่อยของตัวแปรที่แยกจากกันนี้ คือ

$$T = e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\Phi = C\cos\nu\phi + D\sin\nu\phi$$

$$Z = Ae^{\mu z} + Be^{-\mu z}$$

ส่วนสมการสุดท้ายสำหรับ R เป็นสมการเบสเซลอันดับที่ ν ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$R(\rho) = c_1 J_\nu(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\rho) + c_2 Y_\nu(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\rho)$$

โดยที่ $J_\nu(\rho)$ และ $Y_\nu(\rho)$ เป็นฟังก์ชันเบสเซลอันดับที่ ν ชนิดที่หนึ่งและชนิดที่สองตามลำดับ เป็นที่น่าสังเกตว่าสมการเบสเซลนี้ เป็นเอกฐาน (singular) เมื่อ $r = 0$ ความหมายของผลเฉลยต้องหาอนุพันธ์ที่ต่อเนื่อง 2 ครั้งในช่วง $0 \leq \rho \leq a$ ทำให้มีผลเฉลยมีขอบเขตเพียงค่าเดียว คือ

$$R(\rho) = J_o(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\,\rho)$$

ผลเฉลยทั่วไปรวมของสมการการแพร่ คือ

$$n(\rho, \phi, z, t) = e^{-\alpha\lambda^2 t}[Ae^{\mu z} + Be^{-\mu z}]\,[C\cos\nu\phi + D\sin\nu\phi]J_\nu(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}\,\rho)$$

1.5 การแยกในพิกัดทรงกลม

พิกัดทรงกลม (spherical coordinates) เป็นพิกัดที่เรามักพบบ่อยในฟิสิกส์ เพราะแรง, พลังงานศักย์ และธรรมชาติอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับรูปทรงทางเรขาคณิตจะมีลักษณะสมมาตรเชิงทรงกลม ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณารายละเอียดในการแยกตัวแปรในพิกัดเชิงทรงกลม

1.5.1 การแยกลาปลาเซียนออกเป็นส่วนของมุมและรัศมี

ด้วยตัวแปรในพิกัดคาร์ทีเซียนและทรงกระบอกจะเห็นได้ว่าเงื่อนขอบไขขอบมีความสำคัญมากต่อผลเฉลยของ ODE ที่ได้จาก PDE โดยมี α_1 และ α_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ เงื่อนไข-ขอบจะเป็นตัวกำหนดว่าจะต้องเป็นจำนวนเต็ม จำนวนจริงหรือเลขเชิงซ้อน และโดยทั่วไปตัวแปรของพิกัดทรงกลมในส่วนที่เป็นมุม (angular part) สามารถแยกออกจากกันได้และแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น ที่เป็นเช่นนี้เพราะส่วนที่เป็นมุมของลาปลาเซียนในพิกัดทรงกลมจะสัมพันธ์กับการดำเนินการหมุนและโมเมนตัมเชิงมุม ซึ่งเป็นอิสระต่อสถานะการณ์จำเพาะใดๆ นั่นเอง

การแยกส่วนที่เป็นมุมในพิกัดทรงกลมสามารถกระทำได้ในลักษณะที่อุปมากับการแยกในพิกัดคาร์ทีเซียนและพิกัดทรงกระบอก คือโดยการเขียน Ψ ให้เป็นผลคูณของ 3 ฟังก์ชันที่ต่างก็ขึ้นกับตัวแปร r, θ และ ϕ ที่แยกจากกัน นอกจากนี้ เราอาจใช้วิธีการแยกที่ตั้งอยู่บนการ

ดำเนินการที่ใช้ในสมการชเรอดิงเงอร์ของกลศาสตร์ควอนตัม กล่าวคือ ตัวดำเนินการโมเมนตัม $\hat{p}$ กำหนดโดย

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla = -\sqrt{-1}\,\nabla$$

และตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม $\hat{\mathbf{L}}$ กำหนดโดย

$$\hat{\mathbf{L}} = (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}})$$

ตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม $\hat{\mathbf{L}}$ สามารถเขียนในเทอมของมุม θ และ ϕ ด้วยเหตุนี้ $\mathbf{L}^2 = \hat{\mathbf{L}}.\hat{\mathbf{L}}$ จึงขึ้นกับมุมเท่านั้น ทำให้ลาปลาเซียน ∇^2 แยกออกเป็นเทอมของ $\mathbf{L}^2$ และเทอมที่ขึ้นกับ r เท่านั้น

จากการใช้คุณสมบัติของตัวดำเนินการทั้งสอง เราจะได้รูปแบบของ $\nabla^2\Psi$ คือ

$$\nabla^2\Psi = -\frac{1}{r^2}\mathbf{L}^2\Psi + \frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \qquad (1.53)$$

สมการ (1.45) ในพิกัดทรงกลมจึงกลายเป็น

$$-\frac{1}{r^2}\mathbf{L}^2\Psi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + f(r)\Psi = 0$$

โดยที่ f(r) เป็นฟังก์ชันของ r เท่านั้น เมื่อเราแยกฟังก์ชัน Ψ ออกเป็น

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$$

เมื่อนำไปแทนค่าในสมการข้างต้น แล้วคูณตลอดด้วย (r^2 / RY) จะได้

$$\left[\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} + r^2 f(r)\right] - \frac{1}{Y}\mathbf{L}^2(Y) = 0$$

และด้วยเหตุผลที่คล้ายกับหัวข้อที่ผ่านๆ มา เราจึงได้

$$-\frac{1}{Y}\mathbf{L}^2(Y) = -\alpha$$

หรือ

$$\mathbf{L}^2 Y(\theta, \phi) = \alpha Y(\theta, \phi) \tag{1.54}$$

และ

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} + r^2 f(r) = \alpha$$

หรือ

$$\frac{d^2R}{dr} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[f(r) - \frac{\alpha}{r^2}\right]R = 0 \tag{1.55}$$

ในตอนต้นเราจะสนใจในส่วนที่ขึ้นกับมุม (θ, ϕ) ก่อน นั่นคือสมการ (1.54) ในส่วนที่ขึ้นกับรัศมี r จะได้กล่าวในหัวข้อที่ 1.5.5 รวมทั้งรายละเอียดอีกครั้งใน ODE ของบทที่ 2

เนื่องจาก $\hat{\mathbf{L}}$ เป็นตัวดำเนินการ ซึ่งสามารถแยกออกเป็นองค์ประกอบ $\hat{\mathbf{L}}_x, \hat{\mathbf{L}}_y$ และ $\hat{\mathbf{L}}_z$ เราจะแสดงให้เห็นว่าทั้ง 3 องค์ประกอบนี้ขึ้นกับมุม θ และ ϕ เท่านั้น

ตัวแปร x, y, z ในพิกัดคาร์ทีเซียนจะกำหนดในตัวแปร r, θ, ϕ เป็น

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta$$

และการผกผันจะให้

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}, \qquad \cos\theta = \frac{z}{r}, \qquad \tan\phi = \frac{y}{x}$$

เราอาจกำหนดอนุพันธ์ในพิกัดคาร์ทีเซียน ในเทอมของพิกัดทรงกลม โดยใช้กฎลูกโซ่คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(2x)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{r}$$

หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ $\cos\theta = \frac{z}{r}$ จะได้

$$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{z\partial r/\partial x}{r^2} = -\frac{zx}{r^3}$$

หรือ $$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{zx}{r^3\sin\theta}$$

ในทำนองเดียวกัน, $\frac{\partial}{\partial x}(\tan\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$ จะให้ $\sec^2\phi\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$

หรือ $$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cos^2\phi$$

เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงในกฎลูกโซ่ข้างต้นจะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{xz}{r^3\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta} - \frac{y}{x^2}\cos^2\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}$$

อนุพันธ์ย่อย $\partial f/\partial y$ และ $\partial f/\partial z$ สามารถหาได้ในทำนองเดียวกับการหา $\partial f/\partial x$ ผลที่ได้คือ

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{yz}{r^3\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta} - \frac{1}{x}\cos^2\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{z^2}{r^3} - \frac{1}{r}\right)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}$$

องค์ประกอบ $\hat{L}_x$ ของตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม $\hat{L}$ หาได้โดยให้ดำเนินการบนฟังก์ชันใด ๆ ดังนี้ :

$$\hat{\mathbf{L}}_x f = \left(y\mathbf{p}_z - z\mathbf{p}_y\right) f = -i\left(y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= +i\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) f$$

ดังนั้น

$$\hat{\mathbf{L}}_x = i\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad (1.56)$$

ทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\hat{\mathbf{L}}_y = i\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad (1.57)$$

และ

$$\hat{\mathbf{L}}_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad (1.58)$$

เราจึงสรุปเป็นประพจน์ (proposition) ว่า "เมื่อกำหนดในพิกัดทรงกลม, องค์ประกอบ $\hat{\mathbf{L}}_x$, $\hat{\mathbf{L}}_y$ และ $\hat{\mathbf{L}}_z$ ของตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม $\hat{\mathbf{L}}$ จะขึ้นกับมุม θ และ ϕ เท่านั้น"

ตัวดำเนินการ $\mathbf{L}^2$ ที่ปรากฏในลาปลาเซียน จะกลายเป็น

$$\mathbf{L}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \qquad (1.59)$$

1.5.2 การหาค่าเจาะจงของ $\mathbf{L}^2$

จะเห็นได้ว่าสมการ (1.54) เป็นสมการค่าเจาะจง (eigenvalue equation) สำหรับ $\mathbf{L}^2$ สิ่งที่เราต้องการหาค่าคือค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของ $\mathbf{L}^2$ นี้

ถ้าเราพิจารณา $\mathbf{L}^2$ ว่าเป็นตัวดำเนินการนามธรรม (abstract operator) แล้วเขียนสมการ (1.54) เสียใหม่เป็น

$$L^2|Y\rangle = \alpha|Y\rangle$$

โดยที่ $|Y\rangle$ เป็นเวกเตอร์นามธรรมที่จะหาค่าองค์ประกอบ θ และ ϕ เนื่องจาก L^2 เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ ที่ไม่อาจมีตัวแทนเมทริกซ์ (matrix representation) ดังนั้นการคำนวณหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงจึงใช้วิธีของดีเทอร์มิแนนต์ไม่ได้ แต่เราจะใช้วิธีพิจารณาเซตสูงสุดของตัวดำเนินการที่สลับที่ได้ (commuting operators) เพื่อหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงที่สมนัยกัน

สมการข้างต้นจะระบุค่าเจาะจง α และเวกเตอร์เจาะจง $|Y\rangle$ อย่างไรก็ตาม อาจมี $|Y\rangle$ หลายค่าที่สมนัยกับ α ค่าเดียว การแยกแยะเวกเตอร์ที่มีสภาพซ้อนสถานะ (degenerate eigenvectors) เหล่านี้ เราจะเลือกตัวดำเนินการ $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ ที่สลับที่ได้ (commute) กับตัวดำเนินการ L^2 สมมติเราเลือก $\hat{L}_z$ เพราะต่างก็เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มิเทียน (hermitian operator) ในปริภูมิของฟังก์ชันที่อินทิเกรตหรือหาปริพันธ์ได้ L^2 สลับที่ได้กับ $\hat{L}_x, \hat{L}_y$ และ $\hat{L}_z$ แต่ $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ ไม่อาจสลับที่กันเองได้ ดังนั้นค่าสูงสุดของเซตของตัวดำเนินการที่สลับที่ได้ประกอบด้วย L^2 และ $\hat{L}_x$ หรือ $\hat{L}_y$ หรือ $\hat{L}_z$ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ดังนั้น $\{L^2, \hat{L}_z\}$ เป็นเซตสูงสุดของตัวดำเนินการที่สลับที่กันได้ เนื่องจาก $[L^2, \hat{L}_z] = 0$, เราสามารถเลือกเวกเตอร์ที่เป็นเวกเตอร์เจาะจงของตัวดำเนินการทั้งสอง สมมติเรากำหนดเวกเตอร์เหล่านี้ด้วยค่าเจาะจงของของตัวดำเนินการทั้งสองเป็น

$$L^2\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle = \alpha\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle \tag{1.60}$$

$$\hat{L}_z\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle = \beta\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle \tag{1.61}$$

ความเป็นเฮอร์มิเทียนของ L^2 และ $\hat{L}_z$ แสดงค่าจริงของ α และ β ขั้นต่อไปเราจะหาค่าที่เป็นไปได้ของ α และ β นี้

เรานิยามตัวดำเนินการใหม่ดังนี้

$$\hat{L}_+ \equiv \hat{L}_x + i\,\hat{L}_y$$

$$\hat{L}_- \equiv \hat{L}_x - i\,\hat{L}_y$$

และสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\left[L^2, \hat{L}_\pm\right] = 0 \qquad (1.62)$$

$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hat{L}_\pm \qquad (1.63)$$

$$\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = 2\hat{L}_z \qquad (1.64)$$

สมการ (1.62) แสดงว่า $\hat{L}_\pm$ เป็นตัวดำเนินการยืนยง (invariant operators) ในปริภูมิย่อยที่สมนัยกับค่าเจาะจง α หรือ

$$L^2\left(\hat{L}_\pm\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle\right) = \alpha\left(\hat{L}_\pm\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle\right)$$

แต่สมการ (1.63) จะให้

$$\hat{L}_z\left(\hat{L}_+\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle\right) = \left(\hat{L}_z\hat{L}_+\right)\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle = \left(\hat{L}_+\hat{L}_z + \hat{L}_+\right)\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle$$

$$= \hat{L}_+\hat{L}_z\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle + \hat{L}_+\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle$$

$$= \beta\hat{L}_+\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle + \hat{L}_+\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle$$

$$= (\beta + 1)\left(\hat{L}_+\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle\right)$$

ซึ่งแสดงว่า $\hat{L}_+\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle$ มีจำนวนค่าเจาะจงของ $\hat{L}_z$ ที่มากกว่ากรณี $\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle$ อยู่จำนวนหนึ่งหน่วย หรืออีกนัยหนึ่ง $\hat{L}_+$ "เพิ่ม" ค่าเจาะจงของ $\hat{L}_z$ จำนวนหนึ่งหน่วย ด้วยเหตุนี้จึงเรียก $\hat{L}_+$ ว่า **"raising operator"** และในทำนองเดียวกัน $\hat{L}_-$ จะเรียกว่า **"lowering operator"** เพราะลดจำนวนลงหนึ่งหน่วย คือ

$$\hat{L}_z\left(\hat{L}_-\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle\right) = (\beta - 1)\left(\hat{L}_-\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle\right)$$

เราจึงสรุปรวมกันว่า

$$\hat{L}_\pm\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle = C_\pm\left|Y_{\alpha,\beta\pm1}\right\rangle$$

โดยที่ $C_\pm$ เป็นค่าคงตัวที่กำหนดจาก"ความเป็นปรกติ" (normalization) ที่เหมาะสม

มีข้อจำกัดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง α และ β ก่อนอื่นขอให้สังเกตุว่า $\mathbf{L}^2$ เป็นผลบวกของกำลังสองของเมทริกซ์เฮอร์มิเทียน ซึ่งจะต้องเป็นตัวดำเนินการที่เป็นบวก กล่าวคือ

$$\langle a|\mathbf{L}^2|a\rangle \geq 0$$

ในกรณีเฉพาะ,

$$0 \leq \left\langle Y_{\alpha,\beta}\middle|\mathbf{L}^2\middle|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle = \alpha\left\langle Y_{\alpha,\beta}\middle|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle \equiv \alpha\left\|Y_{\alpha,\beta}\right\|^2$$

ดังนั้น $\alpha \geq 0$ หรืออีกนัยหนึ่งเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\mathbf{L}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \mathbf{L}_z^2 - \hat{L}_z \tag{1.65}$$

และ

$$\mathbf{L}^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \mathbf{L}_z^2 + \hat{L}_z \tag{1.66}$$

เมื่อคูณสมการ (1.65) ด้วย $\left|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle$ และ $\left\langle Y_{\alpha,\beta}\right|$ จะได้

$$\left\langle Y_{\alpha,\beta}\middle|\mathbf{L}^2\middle|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle = \left\langle Y_{\alpha,\beta}\middle|\hat{L}_+\hat{L}_-\middle|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle + \left\langle Y_{\alpha,\beta}\middle|\mathbf{L}_z^2\middle|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle - \left\langle Y_{\alpha,\beta}\middle|\hat{L}_z\middle|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle$$

หรือ $\alpha\left\|Y_{\alpha,\beta}\right\|^2 = \left\langle Y_{\alpha,\beta}\middle|\hat{L}_+\hat{L}_-\middle|Y_{\alpha,\beta}\right\rangle + \beta^2\left\|Y_{\alpha,\beta}\right\|^2 - \beta\left\|Y_{\alpha,\beta}\right\|^2$

เนื่องจาก $\hat{L}_+ = \left(\hat{L}_-\right)^+$,

$$\left\| \hat{\mathbf{L}}_{-} \left| Y_{\alpha,\beta} \right\rangle \right\|^2 = \left(\alpha - \beta^2 + \beta\right) \left\| Y_{\alpha,\beta} \right\|^2$$

เนื่องจากความเป็นค่าบวกของค่าประจำหรือนอร์ม (norm) ทำให้

$$\alpha \geq \beta^2 - \beta$$

และเช่นเดียวกับกรณีสมการ (1.66) จะให้

$$\alpha \geq \beta^2 + \beta$$

เมื่อรวมอสมการเข้าด้วยกันจะได้ $2\alpha \geq 2\beta^2$

นั่นคือ $|\beta| \leq \sqrt{\alpha}$ หรือ $-\sqrt{\alpha} \leq \beta \leq \sqrt{\alpha}$

ซึ่งแสดงว่าค่าของ β มีขอบเขต (bounded) และจะเกิดขึ้นได้ถ้า

$$\hat{\mathbf{L}}_{+} \left| Y_{\alpha,\beta+} \right\rangle = 0$$

$$\hat{\mathbf{L}}_{-} \left| Y_{\alpha,\beta-} \right\rangle = 0$$

เพราะหาก $\hat{\mathbf{L}}_{\pm} \left| Y_{\alpha,\beta\pm} \right\rangle$ ไม่เท่ากับศูนย์แล้วจะต้องมีค่าของ β ที่สมนัยกับ $\beta_{\pm} \pm 1$ ซึ่งไม่เป็นไปตามที่เราสมมติเอาไว้ในตอนต้น

ต่อไปเราคูณสมการ (1.66) ด้วย $\left\langle Y_{\alpha,\beta} \right|$ และ $\left| Y_{\alpha,\beta} \right\rangle$ และใช้ $\hat{\mathbf{L}}_{+} \left| Y_{\alpha,\beta_{+}} \right\rangle$ จะได้

$$\alpha \left\| Y_{\alpha,\beta_{+}} \right\|^2 = 0 + \beta_{+}^2 \left\| Y_{\alpha,\beta_{+}} \right\|^2 + \beta_{+} \left\| Y_{\alpha,\beta_{+}} \right\|^2$$

หรือ

$$\left(\alpha - \beta_{+}^2 + \beta_{+}\right) \left\| Y_{\alpha,\beta_{+}} \right\|^2 = 0$$

จากนิยาม $\left|Y_{\alpha,\beta_+}\right\rangle \neq 0$ (เพราะมิฉะนั้น $\beta_+ - 1$ จะเป็นค่าสูงสุด) ดังนั้น

$$\alpha = \beta_+^2 + \beta_+$$

ขั้นตอนเดียวกันนี้เมื่อใช้กับสมการ (1.65) จะให้

$$\alpha = \beta_-^2 - \beta_-$$

ค่าของ β_+ และ β_- ที่หาได้จากทั้ง 2 สมการนี้ คือ

$$\beta_+ = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}\right)$$
$$\beta_- = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha}\right)$$

เนื่องจาก $\beta_+ \geq \beta_-$ และ $\sqrt{1 + 4\alpha} \geq 1$ บังคับให้เราเลือก

$$\beta_+ = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 4\alpha}\right)$$

และ $$\beta_- = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 + 4\alpha}\right) = -\beta_+$$

เมื่อใช้ $\hat{\mathbf{L}}_-$ ดำเนินการบน $\left|Y_{\alpha,\beta_+}\right\rangle$ ซ้ำแล้วซ้ำอีก โดยแต่ละครั้งจะลดค่าของ β ลงไป 1 หน่วย ต้องมีขีดจำกัดของจำนวนเวกเตอร์ที่หาได้โดยวิธีนี้เพราะ $|\beta| \leq \sqrt{\alpha}$ ดังนั้น จึงมีจำนวนเต็ม k ที่ไม่เป็นค่าลบ โดยที่

$$\left(\hat{\mathbf{L}}_-\right)^{k+1}\left|Y_{\alpha,\beta_+}\right\rangle = 0$$

หรือ $$\hat{\mathbf{L}}_-\left(\hat{\mathbf{L}}_-^k\left|Y_{\alpha,\beta_+}\right\rangle\right) = 0$$

ดังนั้น $\hat{\mathbf{L}}_-^k\left|Y_{\alpha,\beta_+}\right\rangle$ ต้องเป็นสัดส่วนกับ $\left|Y_{\alpha,\beta_-}\right\rangle$ และเนื่องจาก $\hat{\mathbf{L}}_-^k\left|Y_{\alpha,\beta_+}\right\rangle$ มีค่า β เท่ากับ $\beta_+ - k$ เราจึงได้

$$\beta_- = \beta_+ - k$$

เมื่อใช้ $\beta_- = -\beta_+$ ที่ได้มาแล้ว จะให้ผลที่มีความสำคัญมากคือ:

$$\beta_+ = \frac{k}{2} \equiv j$$

และเนื่องจาก $\alpha = \beta_+^2 + \beta_+$,

$$\alpha = j(j+1)$$

เราจึงสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ว่า:

"เวกเตอร์เจาะจงของ $\mathbf{L}^2$ สามารถเขียนได้เป็น $\left|Y_{jm}\right\rangle$, และ

$$\mathbf{L}^2\left|Y_{jm}\right\rangle = j(j+1)\left|Y_{jm}\right\rangle$$

$$\hat{\mathbf{L}}_z\left|Y_{jm}\right\rangle = m\left|Y_{jm}\right\rangle$$

โดยที่ j เป็นจำนวนเต็มบวก หรือกึ่งจำนวนเต็ม และ m จะเป็นค่าของเซต $\{-j, -j+1, \ldots, j-1, j\}$ จำนวน $2j+1$ ค่า

ต่อไปเราลองพิจารณาความเป็นปรกติของเวกเตอร์เจาะจง เนื่องจาก $\left|Y_{jm}\right\rangle$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงของตัวดำเนินการเฮอร์มิเทียน $\mathbf{L}^2$ และ $\hat{\mathbf{L}}_z$ เวกเตอร์เจาะจงนี้มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉาก (orthogonal) และมีค่าประจำเป็นหนึ่งหรือ

$$\left\langle Y_{j'm'}\middle|Y_{jm}\right\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

ซึ่งใช้กำหนดค่า $C_\pm$ ดังได้กล่าวแล้ว ในกรณีของ C_+ ซึ่งกำหนดโดย

$$\hat{\mathbf{L}}_+\left|Y_{jm}\right\rangle = C_+\left|Y_{j,m+1}\right\rangle$$

เฮอร์มิเทียนสังยุค (hermitian conjugate) ของสมการนี้ คือ

$$\left\langle Y_{jm}\right|\hat{\mathbf{L}}_- = C_+^*\left\langle Y_{j,m+1}\right|$$

เมื่อนำ 2 สมการเข้ามารวมกันจะได้

$$\left\langle Y_{jm}\right|\hat{\mathbf{L}}_-\hat{\mathbf{L}}_+\left|Y_{jm}\right\rangle = \left|C_+\right|^2\left\langle Y_{j,m+1}\middle|Y_{j,m+1}\right\rangle$$

เมื่อใช้สมการ (1.66), ทฤษฎีบทล่าสุด, และความเป็นปรกติ จะได้

$$j(j+1) - m(m+1) = \left|C_+\right|^2$$

หรือ $\quad \left|C_+\right| = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}$

เนื่องจากอาร์กิวเมนต์ (argument) หรือเฟสของเลขเชิงซ้อน C_+ เป็นศูนย์ทำให้ C_+ เป็นจำนวนจริงค่าบวก หรือ

$$C_+ = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}$$

และในทำนองเดียวกันสำหรับ C_- คือ

$$C_- = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}$$

ดังนั้นเราจึงได้ว่า

$$\hat{\mathbf{L}}_+\left|Y_{jm}\right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,\left|Y_{j,m+1}\right\rangle \tag{1.67}$$

$$\hat{\mathbf{L}}_-\left|Y_{jm}\right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,\left|Y_{j,m-1}\right\rangle \tag{1.68}$$

ที่กล่าวมาในหัวข้อนี้ทั้งหมดเป็นการหาโมเมนต์ตัมเชิงมุมในกลศาสตร์ควอนตัม อย่างไรก็ตาม สำหรับเนื้อหาของกลศาสตร์ควอนตัมจริงๆ แล้ว **ทฤษฎีบทข้างต้นยังนำไปสู่ผลสรุปที่สำคัญคืออนุภาคมีสปิน (spin) เป็นจำนวนเต็มหรือกึ่งจำนวนเต็มอีกด้วย** ผลสรุปนี้ยังรวมไปถึงการหมุนในทฤษฎีกลุ่ม (group theory) ใน 3 มิติ ซึ่งเป็นตัวอย่างหนึ่งของกลุ่มลี (Lie grouup) หรือกลุ่มต่อเนื่องของการแปลงซึ่งจะไม่กล่าวไว้ ณ ที่นี้

1.5.3 การหาค่าเวกเตอร์เจาะจงของ L^2

ในหัวข้อที่แล้วเราได้กำหนดเวกเตอร์เจาะจงของ L^2 ในเชิงนามธรรม ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการกำหนดเวกเตอร์เจาะจงในเทอมของ θ และ ϕ

เราจะเริ่มจาก $\hat{L}_z$ ในรูปแบบของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ตามสมการ (1.58) สมการค่าเจาะจงสำหรับ $\hat{L}_z$ คือ

$$-i\frac{\partial}{\partial\phi}Y_{jm}(\theta,\phi) = mY_{jm}(\theta,\phi)$$

สมมติเราแยก $Y_{jm}(\theta,\phi)$ ออกเป็น $Y_{jm}(\theta,\phi) = P_{jm}(\theta)\,Q_{jm}(\phi)$ แล้วแทนลงในสมการข้างต้นจะได้

$$\frac{dQ_{jm}}{d\phi} = imQ_{jm}$$

ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$Q_{jm}(\phi) = C_{jm}e^{im\phi}$$

โดยที่ C_{jm} เป็นค่าคงตัว สมมติเรารวม C_{jm} เข้าไว้แล้วใน P_{jm} ดังนั้น

$$Y_{jm}(\theta,\phi) = P_{jm}(\theta)e^{im\phi}$$

ในกลศาสตร์แผนเดิม, ฟังก์ชันนี้จะมีค่าเท่ากันที่ ϕ และ $\phi + 2\pi$ ทำให้จำกัดค่าของ m ต้องเป็นจำนวนเต็ม แต่ในกลศาสตร์ควอนตัม, ค่าสัมบูรณ์ของฟังก์ชันจะทำให้ m เป็นกึ่งจำนวน

ต็มได้ด้วย ต่อจากนี้ไปเราจะสมมติว่า m เป็นจำนวนเต็ม และให้ $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงของ L^2 โดยที่ ℓ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นค่าลบ เราต้องการหาค่า $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ นี้

ตัวดำเนินการ $\hat{L}_{\pm}$ ซึ่งกำหนดจาก $\hat{L}_x$ และ $\hat{L}_y$ ในสมการ (1.56) และ (1.57) คือ

$$\hat{L}_{\pm} = e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{1.69}$$

มื่อ $\hat{L}_+$ ดำเนินการบน $Y_{\ell\ell}(\theta, \phi) \equiv P_{\ell\ell}(\theta)e^{i\ell\phi}$, ผลที่ได้จะเป็นศูนย์ ทำให้เราได้สมการเชิงอนุพันธ์

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(P_{\ell\ell}(\theta)e^{i\ell\phi}\right) = 0$$

ซึ่งทำให้

$$\left(\frac{d}{d\theta} - \ell\cot\theta\right)P_{\ell\ell}(\theta) = 0$$

ผลเฉลยของสมการนี้คือ

$$P_{\ell\ell}(\theta) = C_{\ell}(\sin\theta)^{\ell}$$

ค่าคงตัว C_{ℓ} จะต้องห้อยดรรชนีล่างไว้เพราะ $P_{\ell\ell}$ อาจให้ค่าคงตัวของการอินทิเกรตที่แตกต่างกันออกไป ดังนั้นเราจึงเขียน

$$Y_{\ell\ell}(\theta, \phi) = P_{\ell\ell}(\theta)e^{i\ell\phi} = C_{\ell}(\sin\theta)^{\ell}e^{i\ell\phi} \tag{1.70}$$

ค่าของ $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ อาจหาได้จากการให้ $\hat{L}_-$ ดำเนินการบน $\left|Y_{\ell\ell}(\theta, \phi)\right\rangle$ ซ้ำเดิมหลายครั้ง ดังนี้:

$$\hat{L}_-\left|Y_{\ell\ell}\right\rangle = \sqrt{\ell(\ell+1) - \ell(\ell-1)}\left|Y_{\ell,\ell-1}\right\rangle = \sqrt{2\ell}\left|Y_{\ell,\ell-1}\right\rangle$$

$$\left(\hat{L}_-\right)^2\left|Y_{\ell\ell}\right\rangle = \sqrt{2\ell}\,\hat{L}_-\left|Y_{\ell,\ell-1}\right\rangle = \sqrt{2\ell}\sqrt{2(2\ell-1)}\left|Y_{\ell,\ell-2}\right\rangle$$

$$= (-1)e^{i(\ell-1)\phi}\left(\frac{d}{d\theta} + \ell\cot\theta\right) P_{\ell\ell}(\theta)$$

เนื่องจากเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\left(\frac{d}{d\theta} + n\cot\theta\right) f(\theta) = \frac{1}{(\sin\theta)^n}\frac{d}{d\theta}\left[(\sin\theta)^n f(\theta)\right] \qquad (1.71)$$

ดังนั้น

$$\hat{L}_- Y_{\ell\ell} = (-1)e^{i(\ell-1)\phi}\frac{1}{(\sin\theta)^\ell}\frac{d}{d\theta}\left[\sin^\ell\theta\left(C_\ell \sin^\ell\theta\right)\right]$$

$$= (-1)C_\ell \frac{e^{i(\ell-1)\phi}}{(\sin\theta)^\ell}\frac{d}{d\theta}\left[\left(\sin^2\theta\right)^\ell\right]$$

$$\equiv e^{i(\ell-1)\phi} P_{\ell,\ell-1}(\theta)$$

ซึ่งแสดงว่า

$$P_{\ell,\ell-1}(\theta) = (-1)C_\ell \frac{1}{(\sin\theta)^\ell}\frac{d}{d\theta}\left[\left(\sin^2\theta\right)^\ell\right]$$

เมื่อให้ $\hat{L}_-$ ดำเนินการอีกครั้งจะได้

$$\left(\hat{L}_-\right)^2 Y_{\ell\ell} = \hat{L}_-\left[e^{i(\ell-1)\phi}P_{\ell,\ell-1}(\theta)\right]$$

$$= e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left[e^{i(\ell-1)\phi} P_{\ell,\ell-1}(\theta)\right]$$

$$= e^{-i\phi}\left[-\frac{\partial}{\partial\theta} - (\ell-1)\cot\theta\right]\left[e^{i(\ell-1)\phi} P_{\ell,\ell-1}(\theta)\right]$$

$$= (-1)e^{i(\ell-2)\phi}\left(\frac{d}{d\theta} + (\ell-1)\cot\theta\right) P_{\ell,\ell-1}(\theta)$$

ให้ $n = \ell - 1$ แล้วใช้สมการ (1.71)

$$(\hat{L}_-)^2 Y_{\ell\ell} = (-1)e^{i(\ell-2)\phi} \frac{1}{(\sin\theta)^{\ell-1}} \frac{d}{d\theta}\left[(\sin\theta)^{\ell-1} P_{\ell,\ell-1}(\theta)\right]$$

แทนค่า $P_{\ell,\ell-1}(\theta)$ ที่ได้ลงไป ดังนั้น

$$(\hat{L}_-)^2 Y_{\ell\ell} = (-1)^2 C_\ell e^{i(\ell-2)\phi} \frac{1}{(\sin\theta)^{\ell-1}} \frac{d}{d\theta}\left[(\sin\theta)^{\ell-1} \frac{1}{(\sin\theta)^{\ell}} \frac{d}{d\theta}\left(\sin^2\theta\right)^{\ell}\right]$$

$$= (-1)^2 C_\ell \frac{e^{i(\ell-2)\phi}}{(\sin\theta)^{\ell-1}} \frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{(\sin\theta)} \frac{d}{d\theta}\left(\sin^2\theta\right)^{\ell}\right]$$

ต่อไปให้ $u = \cos\theta$;

$$(\hat{L}_-)^2 Y_{\ell\ell} = C_\ell \frac{e^{i(\ell-2)\phi}}{\left[\sqrt{1-u^2}\right]^{\ell-2}} \frac{d^2}{du^2}\left[\left(1 - u^2\right)^{\ell}\right]$$

และสำหรับการดำเนินการ k ครั้ง จะได้ว่า

$$(\hat{L}_-)^k Y_{\ell\ell} = C_\ell \frac{e^{i(\ell-k)\phi}}{\left(1-u^2\right)^{(\ell-k)/2}} \left(\frac{d}{du}\right)^k \left[\left(1-u^2\right)^{\ell}\right]$$

ให้ $k = \ell - m$;

$$(\hat{L}_-)^{\ell-m} Y_{\ell\ell} = C_\ell \frac{e^{im\phi}}{\left(1-u^2\right)^{m/2}} \left(\frac{d}{du}\right)^{\ell-m} \left[\left(1-u^2\right)^{\ell}\right]$$

แทนผลที่ได้จากการกำหนดในรูปแบบนามธรรมที่ได้หาไว้แล้วลงไป จะได้

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!\,(2\ell)!}}C_\ell \frac{e^{im\phi}}{\left(1-u^2\right)^{m/2}} \left(\frac{d}{du}\right)^{\ell-m} \left[\left(1-u^2\right)^\ell\right]$$

เพื่อให้ $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ มีความสมบูรณ์, เราต้องหาค่า C_ℓ ด้วย เนื่องจาก C_ℓ ไม่มีดรรชนี m ห้อยไว้ เราจึงให้ $m = 0$, ดังนั้น

$$Y_{\ell o}(u, \phi) = \frac{1}{\sqrt{(2\ell)!}} C_\ell \frac{d^\ell}{du^\ell} \left[\left(1-u^2\right)^\ell\right]$$

ขวามือของสมการมีลักษณะคล้าย**พหุนามเลอจองด์** (Legendre polynomials) ดังนั้น

$$Y_{\ell o}(u, \phi) = \frac{C_\ell}{\sqrt{(2\ell)!}} (-1)^\ell 2^\ell (\ell!)\, P_\ell(u) \equiv A_\ell P_\ell(u)$$

อย่าลืมว่า $|Y_{\ell m}\rangle$ มีคุณสมบัติ**เชิงตั้งฉากปรกติ** (orthonormal) ในกรณีของ $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ หมายถึง

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\, Y^*_{\ell' m'}(\theta, \phi)\, Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

ซึ่งในเทอมของ $u = \cos\theta$, จะกลายเป็น

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} Y^*_{\ell' m'}(u, \phi)\, Y_{\ell m}(u, \phi) du = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

แทนค่า $Y_{\ell 0}$ ในเทอมของพหุนามเลอจองด์ จะได้

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} |A_\ell|^2 [P_\ell(u)]^2 du = 1 = 2\pi |A_\ell|^2 \int_{-1}^{1} [P_\ell(u)]^2 du$$

$$= 2\pi |A_\ell|^2 \frac{2}{2\ell + 1}$$

$$= \frac{4\pi}{2\ell + 1} |A_\ell|^2$$

หากเราให้เฟสของเลขเชิงซ้อน A_ℓ เท่ากับศูนย์ ค่าของ A_ℓ จะเป็น

$$A_\ell = \frac{C_\ell}{\sqrt{(2\ell)!}} (-1)^\ell \, 2^\ell \, (\ell!) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}}$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์นี้ สุดท้ายเราจะได้

$$Y_{\ell m}(u, \phi) = (-1)^\ell \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \left(\frac{e^{im\phi}}{2^\ell \ell!}\right) \sqrt{\frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}} \left(1 - u^2\right)^{-m/2} \left(\frac{d}{du}\right)^{\ell - m} \left[\left(1 - u^2\right)^\ell\right] \quad (1.72)$$

โดยที่ $u = \cos\theta$, $Y_{\ell m}(u, \phi)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเฉพาะของ L^2 และ L_z เรียกว่า "**spherical harmonics**" และมักปรากฏบ่อยครั้งเมื่อลาปลาเซียนกำหนดในเทอมของพิกัดทรงกลม

เราอาจแยกส่วนของ θ ออกมาจากฟังก์ชันในสมการ (1.72) :

$$P_{\ell m}(u) = (-1)^\ell \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \left(\frac{1}{2^\ell \ell!}\right) \sqrt{\frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}} \left(1 - u^2\right)^{-m/2} \left(\frac{d}{du}\right)^{\ell - m} \left[\left(1 - u^2\right)^\ell\right]$$

แต่ในที่นี้เราจะไม่ทำเช่นนั้น เพราะจากเหตุผลของประวัติความเป็นมาเรามักใช้**ฟังก์ชันเลอจองด์สมทบ** (associated Legendre function) หรือ $P_\ell^m(u)$ แทน และนิยามให้ว่า

$$P_\ell^m(u) \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell + 1}} \, P_{\ell m}(u)$$

$$= (-1)^{\ell+m} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} \left[\frac{\left(1-u^2\right)^{-m/2}}{2^{\ell} \ell!} \right] \left(\frac{d}{du}\right)^{\ell-m} \left[\left(1-u^2\right)^{\ell}\right] \qquad (1.73)$$

ดังนั้น

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi) = (-1)^m \left\{ \frac{2\ell + 1}{4\pi} \left[\frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \right] \right\}^{1/2} P_\ell^m (\cos\theta)\, e^{im\phi} \qquad (1.74)$$

เราได้หาค่า spherical harmonics โดยเริ่มจาก $Y_{\ell\ell}(\theta, \phi)$ แล้วใช้ตัวดำเนินการ $\hat{L}_-$ หาก เราเริ่มจาก $Y_{\ell,-\ell}(\theta, \phi)$ แล้วใช้ตัวดำเนินการ $\hat{L}_+$ ก็จะให้ค่าที่ได้เหมือนกันทุกประการ วิธีการประการหลังนี้จะเหมือนกับที่จะกล่าวต่อไปนี้

เราเริ่มจาก

$$\left|Y_{\ell,-m}\right\rangle = \sqrt{\frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!(2\ell)!}} \left(\hat{L}_+\right)^{\ell-m} \left|Y_{\ell,-\ell}\right\rangle \qquad (1.75)$$

ถ้าเราใช้ $\hat{L}_-\left|Y_{\ell,-\ell}\right\rangle = 0$ ในรูปแบบเชิงอนุพันธ์จะได้

$$\left(\frac{d}{d\theta} - \ell\cot\theta\right) P_{\ell,-\ell}(\theta) = 0$$

ซึ่งมีรูปแบบที่เหมือนกับสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับ $P_{\ell\ell}$ ดังนั้นผลเฉลยจึงเป็น

$$P_{\ell,-\ell} = C'_\ell(\sin\theta)^\ell$$

และ $$Y_{\ell,-\ell}(\theta, \phi) \equiv P_{\ell,-\ell}(\theta)e^{-i\ell\phi} = C'_\ell(\sin\theta)^\ell e^{-i\ell\phi}$$

เมื่อใช้ $\hat{L}_+$ ดำเนินการจำนวน k ครั้ง จะได้

$$\left(\hat{L}_+\right)^k Y_{\ell,-\ell}(u, \phi) = C'_\ell \frac{(-1)^k e^{-i(\ell-k)\phi}}{\left(1-u^2\right)^{(\ell-k)/2}} \left(\frac{d}{du}\right)^k \left[\left(1 - u^2\right)^\ell\right]$$

โดยที่ $u = \cos\theta$ ถ้าให้ $k = \ell - m$, แล้วใช้สมการ (1.75) จะได้

$$Y_{\ell,-m}(u, \phi) = \sqrt{\frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!(2\ell)!}} \, C'_\ell e^{im\phi} \frac{(-1)^{\ell-m}}{\left(1-u^2\right)^{-m/2}} \left(\frac{d}{du}\right)^{\ell-m} \left[\left(1-u^2\right)^\ell\right]$$

เกิน

ค่าคงตัว C'_ℓ หาได้ดังเช่นที่ผ่านมา และถ้า $m = 0$, เราจะได้ผลเหมือนที่ผ่านมา C'_ℓ จึงเหมือนกับ C_ℓ ดังนั้น

$$Y_{\ell,-m}(u, \phi) = (-1)^{\ell+m} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \left(\frac{e^{-im\phi}}{2^\ell \ell!}\right) \sqrt{\frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}} \left(1-u^2\right)^{-m/2} \left(\frac{d}{du}\right)^{\ell-m} \left[\left(1-u^2\right)^\ell\right] \tag{1.76}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (1.72) จะได้

$$Y_{\ell,-m}(\theta, \phi) \equiv (-1)^m Y^*_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{1.77}$$

และเมื่อใช้นิยาม $Y_{\ell,-m}(\theta, \phi) \equiv P_{\ell,-m}(\theta)e^{-im\phi}$ และช่วงแรกของสมการ (1.73) จะได้

$$P_\ell^{-m}(\theta) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(\theta) \tag{1.78}$$

ตัวอย่างบางส่วนของ spherical harmonics ด้วยค่า m เป็นบวก แสดงข้างล่างนี้ ในกรณีของค่า m เป็นลบสามารถหาได้โดยใช้สมการ (1.77)

สำหรับ $\ell = 0$, $\quad Y_{0,0} = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$

สำหรับ $\ell = 1$, $\quad Y_{1,1} = -\sqrt{\dfrac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sin^2\theta \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}} \cos\theta$

สำหรับ $\ell = 2$, $\quad Y_{2,2} = \sqrt{\dfrac{15}{32\pi}} e^{2i\phi} \sin^2\theta \qquad Y_{2,1} = -\sqrt{\dfrac{15}{8\pi}} e^{i\phi} \sin\theta \cos\theta$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

สำหรับ $\ell = 3$, $\quad Y_{3,3} = -\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\, e^{3i\phi}\sin^3\theta \qquad Y_{3,2} = \sqrt{\frac{105}{32\pi}}\, e^{2i\phi}\sin^2\theta\,\cos\theta$

$$Y_{3,1} = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\, e^{i\phi}\sin\left(5\cos^2\theta - 1\right)$$

$$Y_{3,0} = \sqrt{\frac{7}{16\pi}}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$$

เมื่อทราบ spherical harmonics, เราสามารถกำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ที่ให้ค่าเหล่านั้นได้ จากสมการ (1.54), (1.59) และ (1.74) และค่า $\alpha = \ell(\ell + 1)$ เราจะได้

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left[P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}\right] - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\left[P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\phi}\right]$$

$$= \ell(\ell+1)P_\ell^m\, e^{im\phi}$$

ซึ่งให้

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_\ell^m}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}P_\ell^m + \ell(\ell+1)P_\ell^m = 0$$

ถ้าให้ $u = \cos\theta$ สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$\boxed{\frac{d}{du}\left[\left(1 - u^2\right)\frac{dP_\ell^m}{du}\right] + \left[\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - u^2}\right]P_\ell^m = 0}$$

ซึ่งเรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์สมทบ (associated Legendre differential equation) ที่มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันเลอจองด์สมทบกำหนดเป็นรูปแบบปิดตามสมการ (1.73)

ในกรณี $m = 0$ จะให้สมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์ (Legendre differential equation) คือ

$$\boxed{\frac{d}{du}\left[\left(1 - u^2\right)\frac{dP_\ell^\circ}{du}\right] + \ell(\ell + 1)P_\ell^\circ = 0}$$

ซึ่งมีผลเฉลยเป็นพหุนามเลอจองด์ เมื่อ m = 0, spherical harmonics จะเป็นอิสระต่อ ϕ ซึ่งสมนัยกับสมมาตรมุมเชิงขั้วโดยชัดแจ้ง (explicit azimuthal symmetry) ในกรณีเช่นนี้พหุนามเลอจองด์เท่านั้น (ซึ่งขึ้นกับ $\cos\theta$) ที่ใช้คูณกับฟังก์ชันเชิงรัศมี

1.5.4 การกระจายฟังก์ชันเชิงมุม

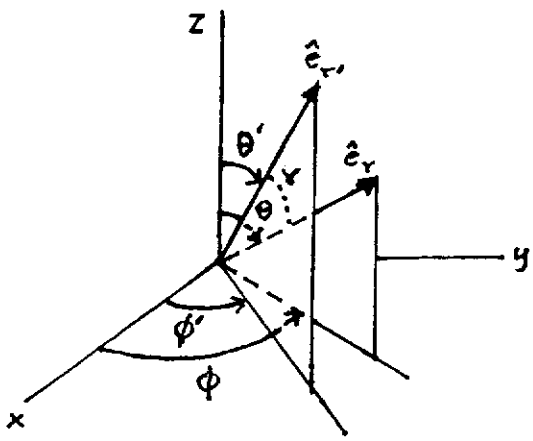
คุณสมบัติเชิงตั้งฉากปรกติของ $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ บอกให้ทราบว่าน่าจะกระจายฟังก์ชันนี้ในเทอมของ spherical harmonics ความจริงแล้วฟังก์ชันเหล่านี้บริบูรณ์ (complete) เราจึงเขียน

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{+\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{1.79}$$

เพื่อหาค่า $a_{\ell m}$ เราคูณทั้งสองข้างด้วย $Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi)$ แล้วอินทิเกรตตลอดทุกมุมตัน โดยใช้คุณสมบัติเชิงตั้งฉากปรกติ จะได้

$$a_{\ell m} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \quad f(\theta, \phi) Y^*_{\ell m}(\theta, \phi) d\theta \tag{1.80}$$

ผลที่สำคัญของการกระจายดังเช่นข้างบนนี้คือทฤษฎีบทการบวก (addition theorem) สำหรับ spherical harmonics ให้ $\hat{e}_r$ และ $\hat{e}_{r'}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยของมุมเชิงทรงกลม (θ, ϕ) และ (θ', ϕ') ตามลำดับ และให้ γ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองนี้ ดังแสดงในรูป



เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi - \phi')$$

พิจารณาพหุนามเลอจองด์ $P_\ell(\cos\gamma)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ θ และ ϕ จากสมการทั้งสองข้างต้นนี้ เราสามารถกระจายออกเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ เนื่องจาก $P_\ell(\cos\gamma)$ เป็นฟังก์ชันของ θ' และ ϕ' ด้วย เราจึงหวังว่า $a_{\ell m}$ จะเป็นฟังก์ชันของ θ' และ ϕ' เราจึงอาจกระจาย

$$P_\ell(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{\alpha}\sum_{m=-k}^{+k} a_{km}(\theta',\phi')Y_{km}(\theta,\phi)$$

ทฤษฎีบทการบวกกล่าวว่า

$$a_{km} = \delta_{k\ell}\frac{4\pi}{2\ell+1}Y^*_{\ell m}(\theta',\phi')$$

ดังนั้น

$$\boxed{P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y^*_{\ell m}(\theta',\phi')Y_{\ell m}(\theta,\phi)} \qquad (1.81)$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ ให้สังเกตุว่า $\cos\gamma = \cos\theta$ เมื่อ $\theta' = 0$ หรืออีกนัยหนึ่ง

$$L^2P_\ell(\cos\theta) = L^2Y_{\ell 0}(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)P_\ell(\cos\theta)$$

และ $P_\ell(\cos\theta)$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงของ L^2 ด้วยค่าเจาะจง $\ell(\ell+1)$ และสังเกตุด้วยว่า $P_\ell(\cos\gamma)$ หาได้จาก $P_\ell(\cos\theta)$ โดยการหมุนแกน แต่ $L^2 = \hat{L}.\hat{L}$ เป็นผลคูณเชิงสเกลาร์ของ 2 ตัวดำเนินการ การยืนยงของผลคูณเชิงสเกลาร์ภายใต้การหมุนแสดงการยืนยงของ L^2 ซึ่งอาจเขียนเป็นสัญกรณ์ได้เป็น $\hat{R}L^2\hat{R}^{-1} = L^2$ โดยที่ $\hat{R}$ เป็นตัวดำเนินการการหมุน ดังนั้น เราจึงเขียน

$$L^2|\ell,0> = \ell(\ell+1)|\ell,0>$$

และ $\hat{\mathbf{R}}\mathbf{L}^2|\ell,0> \;=\; \ell(\ell+1)\hat{\mathbf{R}}|\ell,0>$

หรือ $\hat{\mathbf{R}}\mathbf{L}^2\hat{\mathbf{R}}^{-1}\left(\hat{\mathbf{R}}|\ell,0>\right) \;=\; \ell(\ell+1)\left(\hat{\mathbf{R}}|\ell,0>\right)$

$$\therefore \quad \mathbf{L}^2\left(\hat{\mathbf{R}}|\ell,0>\right) \;=\; \ell(\ell+1)\left(\hat{\mathbf{R}}|\ell,0>\right)$$

ดังนั้นเวกเตอร์ที่หมุนไป $\hat{\mathbf{R}}|\ell,0>$ จึงมีค่าของ ℓ เท่ากับก่อนการหมุน ซึ่งหมายความว่าพหุนามเลอจองด์ที่มีการหมุน, $P_\ell(\cos\gamma)$, มีค่าของ ℓ เท่าเดิม ดังนั้นในการกระจาย $P_\ell(\cos\gamma)$ เราจึงมีแต่เทอม $k = \ell$ เท่านั้น ผลบวกจึงลดลงเหลือ

$$P_\ell(\cos\gamma) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_m(\theta', \phi')\, Y_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{1.82}$$

โดยที่ $a_{\ell m} \equiv A_m$ เพราะ ℓ ถูกตรึงไว้ สิ่งที่เราต้องการจะแสดงคือ

$$A_m(\theta', \phi') \;=\; \frac{4\pi}{2\ell+1}\, Y^*_{\ell m}(\theta', \phi')$$

ก่อนอื่นสังเกตุว่า

$$Y_{\ell m}(0, \phi) \;=\; \delta_{mo} Y_{\ell 0}(0, \phi) \;=\; \delta_{mo}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, P_\ell(1) \;=\; \delta_{mo}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$

ซึ่งสามารถเห็นได้จากสมการ (1.73) เว้นเสียแต่ว่า $m = 0$, แฟกเตอร์ $(1 - u^2)$ จะคงเก็บไว้ในทุกเทอมที่เป็นผลจากอนุพันธ์ของ $\left(1 - u^2\right)^\ell$

ต่อไปถ้าให้ $\theta = 0$ ทั้งสองข้างของสมการ (1.79) จะได้

$$f_\ell(\theta,\phi)\big|_{\theta=0} \;=\; \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell 0}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$$

และหากมีเทอมของ ℓ เพียงเทอมเดียวในผลบวก ดังนั้น

$$f_\ell(\theta,\phi)\big|_{\theta=0} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}a_{\ell 0}$$

จากสมการ (1.80) ,

$$a_{\ell 0} = \iint d\Omega\, f_\ell(\theta,\phi)\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\,P_\ell(\cos\theta)$$

โดยที่ $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ มุม (θ, ϕ) บ่งบอกการเลือกแกน สมมติเราเลือก (γ, β) เป็นมุมในพิกัดใดๆ ดังนั้น

$$a_{\ell 0} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\iint d\Omega\, f_\ell(\gamma,\beta)\; P_\ell(\cos\gamma)$$

ขั้นต่อไปเราคูณทั้งสองข้างของสมการ (1.82) ด้วย $Y^*_{\ell m}(\theta, \phi)$ แล้วอินทิเกรตจะได้

$$A_m(\theta', \phi') = \iint d\Omega\, Y^*_{\ell m}(\theta, \phi)\, P_\ell(\cos\gamma)$$

2 สมการสุดท้ายจะเหมือนกันถ้าเราใช้เอกลักษณ์ :

$$f_\ell(\gamma, \beta) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,Y^*_{\ell m}\big[\theta(\gamma, \beta, \theta', \phi'),\ \phi(\gamma, \beta, \theta', \phi')\big]$$

ดังนั้น

$$A_m(\theta', \phi') \equiv a_{\ell 0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,f_\ell(\gamma, \beta)\big|_{\gamma=0}$$

$$= \frac{4\pi}{2\ell+1}Y^*_{\ell m}\big[\theta(\gamma, \beta, \theta', \phi'),\ \phi(\gamma, \beta, \theta', \phi')\big]_{\gamma=0}$$

แต่ $\gamma = 0$ หมายถึง $\theta = \theta'$ และ $\phi = \phi'$ ซึ่งตรวจจสอบได้จากรูป ดังนั้น

$$A_m(\theta', \phi') = \frac{4\pi}{2\ell+1} Y^*_{\ell m}(\theta', \phi')$$

ซึ่งเป็นสิ่งที่เราต้องการจะพิสูจน์นั่นเอง

ทฤษฎีบทการบวกมีประโยชน์มากในการกระจายฟังก์ชัน $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ที่ปรากฏบ่อยครั้งในฟิสิกส์ทฤษฎี ถ้า $|\mathbf{r}'| \equiv r'$, $|\mathbf{r}| \equiv r$ และ $r' < r$, ดังนั้นเมื่อ $t = r'/r$ เราจะได้

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\left[r^2 + (r')^2 - 2rr'\cos\gamma\right]^{1/2}} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\left(1+t^2 - 2t\cos\gamma\right)^{1/2}}\right]$$

จากนิยามของ<u>**ฟังก์ชันก่อกำเนิด**</u> (generating function) สำหรับพหุนามเลอจองด์ คือ

$$g(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n P_n(x)$$

และเมื่อรวมกับทฤษฎีบทการบวก จะได้

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(\cos\gamma)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(r')^\ell}{r^{\ell+1}} \left(\frac{4\pi}{2\ell+1}\right) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

$$= 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1}\left[\frac{(r')^\ell}{r^{\ell+1}}\right] Y^*_{\ell m}(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

จะเห็นได้ว่า ถ้า $r < r'$, เราสามารถกระจายในเทอมของอัตราส่วน r / r' ได้ ดังนั้น ถ้าให้ $r_<$ แสดงค่าที่น้อยกว่า และ $r_>$ แสดงค่ามากกว่าของรัศมีทั้งสอง สมการข้างต้นจะเขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left[\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}\right] Y_{\ell m}^{*}(\theta', \phi') Y_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{1.83}$$

สมการนี้มีประโยชน์มากในการศึกษาศักย์คูลอมบ์ (Coulomb potentials)

เราย้อนกลับไปหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1.45) ในระบบพิกัดทรงกลม เราได้ลดสมการให้เหลือสมการ (1.54) และ (1.55) เราเขียนสมการ (1.55) เสียใหม่เป็น

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left[f(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]R = 0$$

และให้ $R = u/r$ ดังนั้น

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[f(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]u = 0 \tag{1.84}$$

โดยทั่วไป $f(r)$ มักมีค่าคงตัวซึ่งมีดรรชนีเช่น n ที่เป็นจำนวนจริงไปจนถึงอนันต์ ดังนั้น u จึงมีดรรชนี 2 ตัว คือ n และ ℓ และเนื่องจากเราแยก $\Psi(\mathbf{r}) = R(r)\,Y(\theta, \phi)$ สำหรับค่า n, ℓ และ m ใดๆ เราจึงมีผลเฉลยเป็น

$$\Psi_{n\ell m}(\mathbf{r}) = R_{n\ell}(r)\,Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \frac{u_{n\ell}}{r}Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

และผลเฉลยทั่วไปจะมีรูปแบบเป็น

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n,\ell,m} C_{n\ell m}\frac{u_{n\ell}(r)}{r}Y_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{1.85}$$

1.5.5 รูปแบบของสมการและผลเฉลยในส่วนของรัศมี

เนื่องจากส่วนของรัศมีในพิกัดทรงกลมอาจมีรูปแบบที่แตกต่างกันไปบ้าง นั่นคือ เทอมที่ 3 ของสมการ (1.55) อาจมีรูปแบบต่างๆ รวมทั้งผลเฉลยของสมการที่ต่างกันไป อีกทั้งทางขวามือของสมการ (1.55) อาจไม่เท่ากับศูนย์เช่นเป็นฟังก์ชันของเวลา ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงได้รวบรวมรูปแบบต่างๆ ที่เราอาจพบในปัญหาของฟิสิกส์ และผลเฉลยรูปแบบต่างๆ โดยไม่กล่าวถึงรายละเอียดของการแก้สมการ แต่จะได้กล่าวในรายละเอียดในบทที่ 2 และบทต่อๆ ไป

(1) ส่วนของรัศมีในลาปลาเซียน

ถ้า f(r) ในสมการ (1.55) มีค่าเท่ากับศูนย์ สมการ (1.55) จะกลายเป็น

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - \alpha R = 0 \qquad (1.86)$$

ซึ่งเป็นสมการออยเลอร์ ถ้าให้ $-\alpha = -\mu(\mu + 1)$, ผลเฉลยของสมการออยเลอร์จะเป็น

$$R(r) = Ar^{\mu} + Br^{-(\mu+1)} \qquad (1.87)$$

(2) ผลเฉลยสมมาตรเชิงทรงกลมของสมการเฮล์มโฮลตซ์

สมการเฮล์มโฮลตซ์ตามสมการ (1.5) คือ

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)u(r) = 0$$

ในพิกัดเชิงทรงกลม, สมการเฮล์มโฮลตซ์ สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - k^2 u = 0$$

จากสมมาตรเชิงทรงกลม (spherical symmetry) ทำให้ทราบว่า u เป็นฟังก์ชันของ r เท่านั้น ดังนั้น สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - k^2 u = 0$$

หรือ

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u}{\partial r} - k^2 r^2 u = 0 \qquad (1.88)$$

ให้

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}} F(r)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ r รวม 2 ครั้ง แล้วจัดรูปแบบเสียใหม่จะได้

$$2r\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{F(r)}{\sqrt{r}} + 2\sqrt{r}\frac{\partial F(r)}{\partial r}$$

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{3}{4}r^{-\frac{1}{2}}F(r) - r^{1/2}\frac{\partial F(r)}{\partial r} + r^{3/2}\frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2}$$

แทนค่าที่ได้นี้ลงในสมการ (1.88) จะได้

$$r^2\frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} + r\frac{\partial F(r)}{\partial r} - \left(k^2r^2 + \frac{1}{4}\right)F(r) = 0$$

หรือ
$$r^2\frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} + r\frac{\partial F(r)}{\partial r} + \left[(ik)^2r^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]F(r) = 0 \qquad (1.89)$$

ซึ่งเป็นสมการเบสเซลที่มีผลเฉลยเป็น

$$F(r) = AJ_{1/2}(ikr) + BY_{1/2}(ikr) \qquad (1.90)$$

โดยที่ $J_{1/2}$ และ $Y_{1/2}$ เป็นฟังก์ชันเบสเซลที่มีอาร์กิวเมนต์เป็นค่าจินตภาพ (imaginary arguments) และสามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$F(r) = AI_{1/2}(kr) + BK_{1/2}(kr)$$

ดังนั้น
$$u(r) = r^{-1/2}\left[AI_{1/2}(kr) + BK_{1/2}(kr)\right]$$

เมื่อ $r \to \infty$, ผลเฉลยจะเป็นอันตะ (finite) ซึ่งเป็นไปได้เมื่อ $A = 0$ เท่านั้น เป็นที่ทราบกันดีว่า เมื่อ z มีค่ามาก, $K_{1/2}(z) = \sqrt{\pi/2z}\, e^{-z}$, ดังนั้นผลเฉลยสมมาตรเชิงทรงกลมของสมการเฮล์มโฮลตซ์คือ

$$u(r) = Br^{-1/2}\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\,e^{-kr} = \frac{C}{r}e^{-kr}$$

$$C = B\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \tag{1.91}$$

(3) ผลเฉลยของสมการการแพร่

ในพิกัดทรงกลม, สมการการแพร่สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial n}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 n}{\partial\phi^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial n}{\partial t}$$

สมมติความหนาแน่นของอนุภาค n เขียนอยู่ในรูป

$$n(r, \theta, \phi, t) = R(r)\,H(\theta)\,\Phi(\phi)\,T(t)$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการข้างต้นจะได้

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2\sin\theta H}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = \frac{1}{\alpha T}\frac{dT}{dt} = -\lambda^2 \tag{1.92}$$

โดยที่ λ^2 เป็นค่าคงตัว ดังนั้น

$$\frac{dT}{dt} + \lambda^2\alpha T = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$T = c_1 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

และ

$$r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta H}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right) + \lambda^2\right] = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = m^2$$

ดังนั้น $$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลยเป็น $$\Phi(\phi) = c_1e^{im\phi} + c_2e^{-im\phi}$$

สมการที่เหลือคือ

$$\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{Hr^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right) + \lambda^2 = \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}$$

หรือ

$$\frac{r^2}{R}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right) + \lambda^2r^2 = \frac{m^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{H\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right) = n(n+1)$$

ซึ่งสามารถจัดรูปแบบใหม่ให้ได้ 2 สมการย่อยคือ

$$-\frac{1}{H\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{d^2H}{d\theta^2} + \cos\theta\frac{dH}{d\theta}\right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} = n(n+1)$$

หรือ $$\frac{d^2H}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{dH}{d\theta} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}H = 0$$

ถ้าให้ $\mu = \cos\theta$, ดังนั้น $\cot\theta = \dfrac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}$

$$\frac{dH}{d\theta} = -\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{dH}{d\mu}$$

$$\frac{d^2H}{d\theta^2} = \left(1-\mu^2\right)\frac{d^2H}{d\mu^2} - \mu\frac{dH}{d\mu}$$

สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$\left(1-\mu^2\right)\frac{d^2H}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dH}{d\mu} + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}H = 0 \qquad (1.93)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์สมทบ ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$H(\theta) = A'P_n^m(\mu) + B'Q_n^m(\mu) \qquad (1.94)$$

โดยที่ $P_n^m(\mu)$ และ $Q_n^m(\mu)$ เป็นฟังก์ชันเลอจองด์สมทบด้วยระดับขั้น n และอันดับ m ชนิดที่หนึ่งและสองตามลำดับ

อีกสมการย่อยที่เหลือคือ

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left\{\lambda^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right\}R = 0$$

ให้ $R = (\lambda r)^{-1/2}\Psi(r)$, สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$(\lambda r)^{-1/2}\left[\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \left\{\lambda^2 - \frac{(n+1/2)^2}{r^2}\right\}\psi\right] = 0$$

เนื่องจาก $\lambda r \neq 0$ เราจึงให้

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} + \left\{\lambda^2 - \frac{(n+1/2)^2}{r^2}\right\}\psi = 0 \qquad (1.95)$$

ซึ่งเป็นสมการเบสเซลอันดับ $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ ที่มีผลเฉลยเป็น

$$\psi(r) = AJ_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + BY_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) \qquad (1.96)$$

ทำให้

$$R(r) = (\lambda r)^{-\frac{1}{2}}\left[AJ_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + BY_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)\right]$$

โดยที่ J_n และ Y_n เป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งและสองตามลำดับ

ผลเฉลยรวมของสมการการแพร่ คือ

$$n(r, \theta, \phi, t) = \sum_{\lambda, m, n} A_{\lambda mn}(\lambda r)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) P_n^m(\cos\theta) e^{\pm im\phi - \alpha\lambda^2 t} \qquad (1.97)$$

จะสังเกตุว่าไม่มีเทอมของ $Q_n^m(\mu)$ และ $(\lambda r)^{-1/2} Y_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ ปรากฏในผลเฉลยทั่วไปเพราะฟังก์ชันเหล่านี้มีโพล (pole) ที่ $\mu = \pm 1$ และ $r = 0$ ตามลำดับ

(4) ผลเฉลยที่เป็นคาบของสมการคลื่นหนึ่งมิติ

ในพิกัดทรงกลม, เมื่อฟังก์ชันคลื่น ψ ขึ้นกับรัศมี r เพียงเท่านั้น สมการคลื่นจะกลายเป็น

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad r > 0 \qquad (1.98)$$

ผลเฉลยที่เป็นคาบตามเวลาจะอยู่ในรูปแบบ

$$\psi(r,t) = R(r)e^{i\omega t}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial r}e^{i\omega t} \quad , \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2 R(r)e^{i\omega t}$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการคลื่นจะได้

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}e^{i\omega t}\right) = -\frac{\omega^2}{c^2}R(r)e^{i\omega t}$$

หรือ $$\frac{1}{r^2}e^{i\omega t}\left[r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial R}{\partial r}\right] = -\frac{\omega^2}{c^2}e^{i\omega t}R$$

ดังนั้น

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2}R = 0 \qquad (1.99)$$

ให้ $$R(r) = \left(\frac{\omega}{c}r\right)^{-1/2}u(r)$$

ดังนั้น $$\frac{dR}{dr} = -\frac{\omega}{2c}\left(\frac{\omega}{c}r\right)^{-3/2}u(r) + \left(\frac{\omega}{c}r\right)^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{3}{4}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\left(\frac{\omega}{c}r\right)^{-5/2}u(r) - \frac{\omega}{c}\left(\frac{\omega}{c}r\right)^{-3/2}\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\omega}{c}r\right)^{-1/2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (1.99) จะได้

$$\left(\frac{\omega}{c}r\right)^{-1/2}\left[\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left\{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1}{2r}\right)^2\right\}u(r)\right] = 0$$

เนื่องจาก $\left(\frac{\omega}{c}r\right) \neq 0$, เราจึงให้

$$\left[\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left\{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{1}{2r}\right)^2\right\}u(r)\right] = 0$$

ซึ่งมีรูปแบบของสมการเบสเซลที่มีผลเฉลยเป็น

$$u(r) = A'J_{1/2}\left(\frac{\omega}{c}r\right) + B'J_{-1/2}\left(\frac{\omega}{c}r\right)$$

โดยที่ A' และ B' เป็นค่าคงตัว ดังนั้น

$$R(r) = \left(\frac{\omega}{c}r\right)^{-1/2}\left[A'J_{1/2}\left(\frac{\omega}{c}r\right) + B'J_{-1/2}\left(\frac{\omega}{c}r\right)\right]$$

หรือ $$R(r) = \frac{A}{\sqrt{r}}J_{1/2}\left(\frac{\omega}{c}r\right) + \frac{B}{\sqrt{r}}J_{-1/2}\left(\frac{\omega}{c}r\right)$$

แต่เราทราบว่า $$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

ดังนั้น

$$R(r) = \sqrt{\frac{2c}{\pi\omega}}\left[A\frac{\sin(\omega r/c)}{r} + B\frac{\cos(\omega r/c)}{r}\right]$$

ซึ่งอาจเขียนในรูปเชิงซ้อนเป็น

$$R(r) = C_1\frac{\exp(i\omega r/c)}{r} + C_2\frac{\exp(-i\omega r/c)}{r}$$

ผลเฉลยของสมการคลื่นที่เราต้องการคือ

$$\psi(r, t) = C_1 \frac{\exp[(i\omega / c)(r + ct)]}{r} + C_2 \frac{\exp[(-i\omega / c)(r - ct)]}{r} \quad (1.100)$$

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. จงใช้วิธีการแยกตัวแปรหาผลเฉลยของสมการคลื่นสามมิติ $\nabla^2 u(\bar{r}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\bar{r})}{\partial t^2}$

   (ตอบ : $X(x) = Ae^{i\ell x} + Be^{-i\ell x}$ หรือ $X(x) = A'\cos\ell x + B'\sin\ell x$

   $Y(y) = Ce^{imy} + De^{-imy}$ $\quad Y(y) = C'\cos my + D'\sin my$

   $Z(z) = Ee^{inz} + Fe^{-inz}$ $\quad Z(z) = E'\cos nz + F'\sin nz$

   $T(t) = Ge^{ic\mu t} + He^{-ic\mu t}$ $\quad T(t) = G'\cos(c\mu t) + H'\sin(c\mu t)$)

2. จงหาผลเฉลยของสมการ $x^2 u_{xx} + xu_x - u_y = 0$

   (ตอบ : $u(x,y) = e^{k^2 y}x^{\pm k}, e^{-k^2 y}\cos(k\ell nx), e^{-k^2 y}\sin(k\ell nx)$)

3. (ก) จงหาสมการที่สอดคล้องกับการกระจัด $u(x,t)$ ของเชือกสม่ำเสมอด้วยมวลต่อหน่วยความยาว, ρ, ภายใต้แรงดึงสม่ำเสมอ T โดยสมมติว่าเชือกตอนเริ่มต้นอยู่ในแนวแกน x ของพิกัดคาร์ทีเซียน
   (ข) ต่อไปเมื่อมีแรงภายนอกในแนวดิ่ง $f(x,t)$ ต่อหน่วยความยาวกระทำต่อเชือกที่เวลา t, สมการในข้อ (ก) จะเปลี่ยนไปอย่างไร
   (ค) ในกรณีสองมิติโดยการเปลี่ยนจากเชือกเป็นหนังสัตว์ที่ขึงดึงด้วยแรงดึง T และมวลต่อหน่วยพื้นที่เป็น ρ และมีแรงภายนอก $f(x,y,t)$ กระทำดังเช่นข้อ (ข) สมการในข้อ (ข) จะเปลี่ยนเป็นอะไร

   (ตอบ : (ก) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $c^2 = \frac{T}{\rho}$ $\qquad$ (ข) $T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

   (ค) $T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) = \rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$)

4. จงหาสมการที่สอดคล้องกับอุณหภูมิ $T(\bar{r},t)$ ที่เวลา t สำหรับวัตถุที่มีสภาพนำความร้อน k, ความจุความร้อนจำเพาะ c และความหนาแน่น ρ โดยกำหนดสมการในพิกัดคาร์ทีเซียน

   (ตอบ : $k\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$)

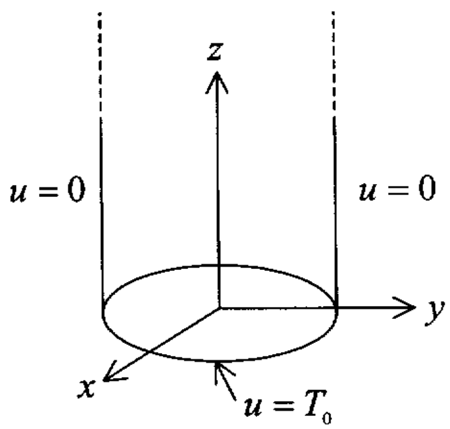
5. จงหาผลเฉลยของสมการลาปลาซ $\nabla^2 u(\bar{r}) = 0$ ในระนาบเชิงขั้ว (plane polars)

(ตอบ : $u(\rho,\phi) = (C_0 \ell n\rho + D_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\phi + B_n \sin n\phi)(C_n \rho^n + D_n \rho^{-n})$)

6. กลองหนังรูปวงกลมมีขอบที่ $\rho = a$ ถ้าขอบกลองมีการกระจัดในแนวดิ่งด้วยปริมาณ $\in (\sin\phi + 2\sin 2\phi)$ โดยที่ ϕ เป็นมุมแอซิมัท (azimuthal angle) เมื่อเทียบกับรัศมีที่กำหนด จงหาการกระจัดรวม $u(\rho,\phi)$ ของกลองทั้งหมด

(ตอบ : $u(\rho,\phi) = \frac{\in \rho}{a}\sin\phi + \frac{2 \in \rho^2}{a^2}\sin 2\phi = \frac{\in \rho}{a}(\sin\phi + \frac{2\rho}{a}\sin 2\phi)$)

7. ทรงกระบอกแข็งยาวมากมีรัศมี a โดยที่ผิวมีอุณหภูมิ $0^{\circ}C$ และที่ฐานมีอุณหภูมิ T_0 ดังรูป จงหาการกระจายอุณหภูมิสถานะคงที่ภายในทรงกระบอกนั้น



(ตอบ : $u(\rho,\phi,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0}{K_n a J_1(k_n a)} J_0(k_n \rho) e^{-k_n z}$)

8. จงหาผลเฉลยของสมการลาปลาซ $\nabla^2 u(\bar{r}) = 0$ ในพิกัดทรงกระบอก

(ตอบ : $u(\rho,\phi,z) = [AJ_m(k\rho) + BY_m(k\rho)][C\cos m\phi + D\sin m\phi][Ee^{-kz} + Fe^{kz}]$)

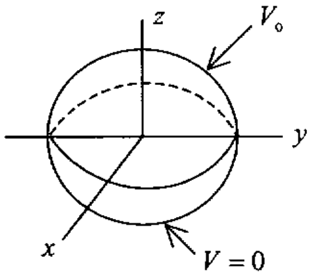
9. จงหาผลเฉลยของสมการลาปลาซ $\nabla^2 u(\bar{r}) = 0$ ในพิกัดทรงกลม

(ตอบ :

$u(r,\theta,\phi) = (Ar^{\ell} + Br^{-(\ell+1)})(C\cos m\phi + D\sin m\phi)[EP_\ell^m(\cos\theta + FQ_\ell^m(\cos\theta)]$)

10. ทรงกลมตัวนำรัศมี a เมื่อนำไปวางในสนามไฟฟ้าสถิต $\bar{E}$ จงแสดงให้เห็นว่ามันมีพฤติกรรมเป็นขั้วคู่ไฟฟ้า (electric dipole)

11. ทรงกลมตัวนำรัศมี a ข้างในกลวง ถ้าครึ่งบนมีประจุและศักย์ไฟฟ้ามีค่า V_0 แต่ครึ่งล่างมีศักย์ไฟฟ้าเป็นศูนย์ จงหาศักย์ไฟฟ้า V ภายในและภายนอกทรงกลมนี้



(ตอบ : ภายในทรงกลม,

$$V(r,\theta,\phi) = \frac{V_0}{2}\left[1 + \frac{3r}{2a}P_1(\cos\theta) - \frac{7r^3}{8a^3}P_3(\cos\theta) + \cdots\right]$$

นอกทรงกลม,

$$V(r,\theta,\phi) = \frac{V_0 a}{2r}\left[1 + \frac{3a}{2r}P_1(\cos\theta) - \frac{7a^3}{8r^3}P_3(\cos\theta) + \cdots\right])$$

บทที่ 2
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

2.1 สมการเชิงเส้น

ดังได้กล่าวในบทที่ 1 แล้วว่ากฎต่าง ๆ ในฟิสิกส์ส่วนใหญ่มักกำหนดโดยสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือ PDE และการแก้สมการของ PDE มักใช้วิธีการแยกตัวแปรซึ่งแยก PDE ออกเป็นหลายสมการเชิงอนุพันธ์สามัญหรือ ODE ดังนั้น ในบทนี้จะได้กล่าวถึงรายละเอียดของสมการ ODE นี้

ODE โดยทั่วไปอาจกำหนดเป็น

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx2},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \tag{2.1}$$

โดยมี x เป็นตัวแปรเพียงตัวเดียว เมื่อ F ขึ้นกับ d^ny/dx^n, สมการ (2.1) จะเป็น ODE อันดับ n (nth - order ODE) ODE จะเรียกว่าเป็นเชิงเส้น (linear) ถ้าบางส่วนของฟังก์ชัน F ซึ่งรวมทั้ง y และทุกอนุพันธ์ของ y เป็นเชิงเส้นใน y ดังนั้น ODE ที่เป็นเชิงเส้นหรือ LODE อันดับ n จึงมีรูปแบบเป็น

$$p_0(x)y+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots+p_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}=q(x) \tag{2.2}$$

(สำหรับ $p_n \neq 0$)

โดยที่ $\{p_i(x)\}_{i=0}^n$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x

สมการ (2.2) จะเรียกว่าเป็นเอกพันธุ์ (homogeneous) ถ้า $q(x)\equiv 0$ และหากไม่เป็นเช่นนี้จะเรียกว่า ไม่เป็นเอกพันธุ์ (inhomogeneous) และเรียก $q(x)$ ว่าพจน์ไม่เอกพันธุ์ (inhomogeneous term)

โดยทั่วไปมักนิยาม **ตัวดำเนินการเชิงเส้น** (linear operator), $\hat{\mathbf{L}}$, โดย

$$\hat{\mathbf{L}}\equiv p_0(x)+p_1(x)\frac{d}{dx}+p_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+\ldots+p_n(x)\frac{d^n}{dx^n} \tag{2.3}$$

และเขียนสมการ (2.2) เป็น

$$\hat{\mathbf{L}}[y(x)] = q(x) \tag{2.4}$$

ผลเฉลยของสมการ (2.1) หรือ (2.4) คือฟังก์ชัน f ซึ่งทำให้

$$F\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) = 0$$

หรือ

$$\hat{\mathbf{L}}\,[f] = q(x)$$

สำหรับทุกค่าของ x ในโดเมนของนิยามของ f

นอกจากนี้ ตัวดำเนินการเชิงเส้น $\hat{\mathbf{L}}$ ยังสอดคล้องกับสมบัติเชิงเส้น

$$\hat{\mathbf{L}}\left[a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)\right] = a_1 \hat{\mathbf{L}}[y_1(x)] + a_2 \hat{\mathbf{L}}[y_2(x)] \tag{2.5}$$

โดยที่ a_i เป็นค่าคงตัว ตัวอย่างเช่น

$$\hat{\mathbf{D}}[y(x)] \equiv \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^{1/2}$$

ไม่เป็นเชิงเส้นเพราะ

$$\hat{\mathbf{D}}[ay(x)] = \left(\frac{d}{dx} ay(x)\right)^{1/2} = \sqrt{a}\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^{1/2} \neq a\left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^{1/2}$$

หรือสมการการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มคือ

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) - \frac{g}{\ell}\sin\theta(t) = 0$$

ไม่เป็นเชิงเส้นเพราะ

$$\sin(\lambda\theta_1 + \mu\theta_2) \neq \lambda\sin\theta_1 + \mu\sin\theta_2$$

แต่ถ้าหาก $\sin\theta \approx \theta$, สมการการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มข้างต้นจะเป็นเชิง เส้นจากความจริงนี้เราจึงสรุปว่า **ระบบใด ๆ ที่ไม่ต่างไปจากสถานะสมดุลมากนักจะเป็นระบบเชิงเส้น** (linear systems)

สมการอนุพันธ์เชิงเส้นจะมีความง่ายกว่าที่ไม่เป็นเชิงเส้น ที่เป็นเช่นนี้เป็นผลมาจากหลักการซ้อนทับ (superposition principle) 2 ข้อต่อไปนี้

1. ถ้า $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เป็นผลเฉลย 2 ค่าใด ๆ ของสมการ LODE ที่เป็นเอกพันธุ์ หรือ $\hat{\mathbf{L}}y(x) = 0$, ดังนั้น

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad c_i = \text{const} \tag{2.6}$$

จะเป็นผลเฉลยของสมการด้วย ทั้งนี้เพราะ

$$\hat{\mathbf{L}}\left[c_1 y_1 + c_2 y_2\right] = c_1 \hat{\mathbf{L}} y_1(x) + c_2 \hat{\mathbf{L}} y_2 = 0$$

2. ถ้า $y_h(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ LODE ที่เป็นเอกพันธุ์, $\hat{\mathbf{L}}y = 0$, และ $y_p(x)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ (particular solution) ของ LODE ที่ไม่เป็นเอกพันธ์ หรือ $\hat{\mathbf{L}}[y_p(x)] = q(x)$, ดังนั้นผลรวมเชิงเส้น

$$y(x) = a y_p(x) + b y_h(x) \qquad a, b = \text{const} \tag{2.7}$$

จะเป็นผลเฉลยของ LODE ที่ไม่เป็นเอกพันธ์ หรือ

$$\hat{\mathbf{L}}[y(x)] = aq(x)$$

ทั้งนี้เพราะ

$$\hat{\mathbf{L}}\left[a y_p + b y_h\right] = a\hat{\mathbf{L}} y_p + b\hat{\mathbf{L}} y_h = aq + 0 = aq$$

ตัวอย่างของสมการ LODE คือ สมการคลื่น

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - v^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$$

และสมการ Korteweg - de Vries ที่เป็นเชิงเส้น

$$\frac{d\psi}{dt} + c_0 \frac{d\psi}{dx} + \upsilon \frac{d^3\psi}{dx^3} = 0 \qquad c_0, \upsilon = \text{const}$$

ตัวอย่างของสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นคือ สมการ Korteweg - de Vries ที่อธิบายคลื่นยาวในน้ำตื้น

$$\frac{d\psi}{dt} + (c_0 + c_1\psi) \frac{d\psi}{dx} + \upsilon \frac{d^3\psi}{dx^3} = 0$$

และ sine - Gordon equation

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{d^2\psi}{dx^2} + \sin\psi = 0$$

ซึ่งใช้อธิบายคลื่นที่เรียกว่า solitary waves เป็นต้น

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่อาจมีได้ถ้าเรามีข้อจำกัดมากเกินไป เช่น ถ้าเรากำหนดว่าฟังก์ชันที่เราต้องการจะต้องหาค่าอนุพันธ์ได้หลาย ๆ ครั้ง เราอาจจะไม่ได้ผลเฉลยตามที่เราต้องการได้ พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{dy}{dx} = |x|$ ที่มีสมบัติ $f(0) = 0$ คือ

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{ถ้า } x \ge 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{ถ้า } x \le 0 \end{cases}$$

ฟังก์ชันนี้มีค่าต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ที่หนึ่ง $f'(x) = |x|$ ซึ่งยังคงต่อเนื่องที่ $x = 0$ ด้วย แต่ถ้าเราต้องการให้อนุพันธ์ที่สองหรือ $f''(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ด้วย เราไม่อาจหาผลเฉลยได้ เพราะ

$$f''(x) = \begin{cases} +1 & \text{ถ้า } x > 0 \\ -1 & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

นั่นคือ $f''(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ถ้าเราต้องการให้อนุพันธ์ที่สามหรือ $f'''(x)$ มีจริง (exist) ที่ $x = 0$, เราต้องกระจายฟังก์ชัน เป็นต้น

การกำหนดข้อจำกัดของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์มากเกินไปมีผลต่อการหาค่าผลเฉลยจนไม่มีเลยก็ได้ แต่การกำหนดข้อจำกัดทำให้มีผลเฉลยพหุคูณ (multiple solution) เพื่อให้การสุดขีด (extremes) ทั้งสองนี้สมดุลกัน เราอาจถามหาผลเฉลยที่อาจหาอนุพันธ์ได้หลายครั้ง และสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions) บางเงื่อนไข สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n, เงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวจะสมมูลกับข้อกำหนดของฟังก์ชันและอนุพันธ์อันดับ (n-1) ค่าแรกของฟังก์ชันนั้น ข้อกำหนดในลักษณะเช่นนี้ตั้งอยู่บนพื้นฐานของ**ทฤษฎีบทฟังก์ชันโดยปริยาย** (the implicit function theorem) ซึ่งกล่าวว่า ภายใต้เงื่อนไขบางประการ เราสามารถแก้สมการจนได้ตัวแปรอิสระตัวหนึ่งใน $F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$ ในเทอมของตัวแปรอิสระอื่น ๆ

การใช้ทฤษฎีบทข้างต้นนี้ต่อสมการ (2.1) ทำให้ได้

$$\frac{d^n y}{dx^n} = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

โดยที่ F สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบท ถ้าเรารู้ค่าของผลเฉลย $y = f(x)$ โดยที่ f รวมทั้งอนุพันธ์อันดับ (n-1) ของ f ด้วย เราสามารถหาอนุพันธ์ที่ n โดยใช้สมการนี้ได้ นอกจากนี้ เราสามารถคำนวณหาอนุพันธ์ของทุกอันดับ (ถ้าหากมีจริง) โดยการหาอนุพันธ์สมการนี้ ทำให้เราสามารถกระจายผลเฉลยออกเป็น**อนุกรมเทย์เลอร์** (Taylor series) ดังนั้น อย่างน้อยที่สุดสำหรับผลเฉลยที่มีอนุพันธ์ของทุกอันดับ การทราบค่าของผลเฉลยและอนุพันธ์อันดับ (n-1) ค่าแรกที่จุด x_0 สามารถกำหนดผลเฉลยในย่านใกล้เคียงที่จุด x ได้

เราจะไม่ศึกษาชนิดของ LODE ของสมการ (2.1) หรือ (2.2) แต่เราจะพิจารณาสมบัติทั่วไปของ LODE อันดับสองในหัวข้อที่ 2.2

2.2 สมการเชิงเส้นอันดับสอง

สมการเชิงอนุพันธ์ส่วนใหญ่ที่เรามักพบในฟิสิกส์ ทั้งที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ จะเป็น**สมการเชิงเส้นอันดับสอง** หรือ **SOLDE** (second - order linear differential equations) ซึ่งเราได้คุ้นเคยกันมาบ้างแล้วในบทที่ 1 เช่น กฎข้อที่สองของนิวตัน สมการคลื่น สมการลาปลาซ สมการเฮล์มโฮลตซ์ เป็นต้น ดังนั้นในบทนี้เราจะมุ่งเน้นไปที่รายละเอียดของ SOLDE นี้

รูปแบบทั่วไปของ SOLDE คือ

$$p_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_0(x)y=p_3(x) \tag{2.8}$$

หากเราหารตลอดสมการ (2.8) ด้วย $p_2(x)$ จะได้รูปแบบปรกติ (normal form)

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \tag{2.9}$$

โดยที่ $$p=\frac{p_1}{p_2},\quad q=\frac{p_0}{p_2},\quad r=\frac{p_3}{p_2}$$

สมการ (2.9) จะสมมูลกับสมการ (2.8) ถ้า $p_2(x)\neq 0$ จุดที่ค่า $p_2(x)$ หายไปเรียกว่า **จุดเอกฐาน** (singular points) **ของสมการเชิงอนุพันธ์**

จุดเอกฐานของสมการเชิงเส้นและของสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะมีความแตกต่างกัน ในกรณีของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น เช่น $(x^2-y)y'=x^2+y^2$ เส้นโค้งของ $y=x^2$ เป็นหมู่ (collection) ของจุดเอกฐานต่าง ๆ จึงทำให้ไม่สามารถสร้างผลเฉลย $y=f(x)$ ที่นิยามบนช่วง $I=[a,b]$ ของแกน x เพราะสำหรับ x ใด ๆ ในช่วงนี้ จะมี $y=x^2$ ซึ่งทำให้สมการเชิงอนุพันธ์อนิยาม(undefined) ในทางตรงกันข้าม สมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นเชิงเส้นหรือ LDE จะไม่ปรากฏปัญหาเหล่านี้ ทั้งนี้เพราะสัมประสิทธิ์ของอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น ดังนั้น ทุกเส้นโค้งของจุดเอกฐานจึงอยู่ในแนวดิ่งจากคุณสมบัติเช่นนี้ เราจึงตั้งเป็นบทนิยาม (definition) ดังนี้ :

"รูปแบบปรกติของ SOLDE หรือสมการ (2.9) จะปรกติ (regular) บนช่วง [a,b] ของแกน x ถ้า $p(x), q(x)$ และ $r(x)$ ต่อเนื่องบน $[a,b]$ นั้น ผลเฉลยของ SOLDE ที่ปรกติคือฟังก์ชัน $y=f(x)$ ที่หาค่าอนุพันธ์ได้ซ้ำหรือ 2 ครั้ง และสอดคล้องกับ SOLDE ที่ทุกจุดของ [a, b]"

จึงเห็นได้ชัดเจนว่าฟังก์ชันใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการ (2.9) จำเป็นต้องหาอนุพันธ์ได้ซ้ำและเป็นสิ่งที่ต้องการของผลเฉลยของสมการ ส่วนอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่านี้อาจมีข้อจำกัดดังได้กล่าวแล้ว อย่างไรก็ตาม ผลเฉลยส่วนใหญ่ของ SOLDE ที่เป็นปรกติมักหาอนุพันธ์ได้มากกว่า 2 ครั้ง

2.2.1 สภาพเชิงเส้น การซ้อนทับ และความเป็นได้อย่างเดียว

ถ้าเราเสนอตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

$$\hat{L} = p_2 \frac{d^2}{dx^2} + p_1 \frac{d}{dx} + p_0 \tag{2.10}$$

ดังนั้น สมการ (2.8) สามารถเขียนได้เป็น

$$\hat{L}[y] = p_3 \tag{2.11}$$

จะเห็นได้ว่า $\hat{L}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นเพราะ d/dx เป็นเชิงเส้น รวมทั้งทุกกำลัง (powers) ของมันก็เป็นเชิงเส้น ดังนั้น สำหรับค่าคงตัว c_1 และ c_2

$$\hat{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_2 \hat{L}[y_1] + c_2 \hat{L}[y_2]$$

และหาก y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยทั้งสองของสมการ (2.11) ดังนั้น

$$\hat{L}[y_1 - y_2] = 0$$

นั่นคือ ผลต่างระหว่างผลเฉลย 2 ค่าใด ๆ ของ SOLDE จะเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ที่หาได้จากการให้ $p_3 = 0$

ผลของสภาพเชิงเส้น (linearity) ของ $\hat{L}$ คือ บทตั้ง (lemma) ดังนี้ :

ถ้า $\hat{L}[u] = r(x)$, $\hat{L}[v] = s(x)$, α และ β เป็นค่าคงตัว และ $w = \alpha u + \beta v$, ดังนั้น $\hat{L}[w] = \alpha r(x) + \beta s(x)$

หาก $r = s = 0$ ซึ่งหมายถึงสมการเอกพันธ์ บทตั้งนี้กล่าวว่า ถ้า u และ v เป็นผลเฉลยใด ๆ 2 ค่าของ SOLDE ที่เป็นเอกพันธ์หรือ HSOLDE ดังนั้น ผลรวมเชิงเส้นของ u และ v จะเป็นผลเฉลยของ HSOLDE นั้นด้วยซึ่งเรียกว่า หลักการซ้อนทับดังได้กล่าวแล้วในหัวข้อที่ 2.1

จากบทที่ 1 ที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่า บนพื้นฐานของสหัชญาณ (intuition) หรือการหยั่งรู้ เราอาจทำนายพฤติกรรมของระบบได้ถ้าเราทราบสมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นไปตามระบบนั้น และที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือข้อมูลเริ่มต้น สถานะการณ์ที่หากกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นแล้วนำไปสู่การทำนายหลายครั้ง (หรือผลเฉลยพหุคูณของสมการเชิงอนุพันธ์) จึงไม่อาจยอมรับได้ ดังนั้น บนพื้นฐานของการหยั่งรู้

แต่เพียงอย่างเดียว เราจึงคาดหวัง**ผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียว** (unique solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น

สหัชญาณหรือการหยั่งรู้บอกให้เราทราบว่าถ้าเงื่อนไขเริ่มต้นเปลี่ยนไปด้วยปริมาณน้อยยิ่ง (infinitesimal) ดังนั้นผลเฉลยจะเปลี่ยนไปด้วยปริมาณน้อยยิ่งด้วย ด้วยเหตุนี้ ผลเฉลยของสมการเชิงเส้นจึงเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องของเงื่อนไขเริ่มต้น สมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นสามารถมีผลเฉลยที่ต่างกันสำหรับเงื่อนไขเริ่มต้น 2 เงื่อนไขซึ่งใกล้เคียงกันมาก เนื่องจากเงื่อนไขเริ่มต้นไม่สามารถระบุความเที่ยง (precision) ในทางปฏิบัติได้ สมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นจึงนำไปสู่ผลเฉลยที่ไม่อาจทำนายได้ที่เรียกว่า chaos ซึ่งจะไม่กล่าวไว้ ณ ที่นี้

จากที่กล่าวมานี้จึงกำหนดเป็นทฤษฎีบทความเป็นได้อย่างเดียว (uniqueness theorem) ซึ่งกล่าวว่า "ถ้า p และ q มีค่าต่อเนื่องบน [a, b] ดังนั้น ผลเฉลย $y = f(x)$ ของสมการ (2.9) อย่างมากที่สุดค่าหนึ่งสามารถสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น $f(a) = c_1$ และ $f'(a) = c_2$ โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ"

ทฤษฎีบทนี้สามารถใช้กับ HSOLDE เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปได้ กล่าวคือ ให้ $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ เป็นผลเฉลยใด ๆ ของ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.12}$$

สมมติว่าเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ คือ $\mathbf{v}_1 = \left(f_1(x_0), f_1'(x_0)\right)$ และ $\mathbf{v}_2 = \left(f_2(x_0), f_2'(x_0)\right)$ เป็นอิสระต่อกันสำหรับ x_0 บนช่วง [a, b] ให้ g(x) เป็นผลเฉลยอื่น ๆ ของสมการ (2.12) เวกเตอร์ $\left(g(x_0), g'(x_0)\right)$ สามารถเขียนเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\mathbf{v}_1$ และ $\mathbf{v}_2$ ซึ่งให้สมการ 2 สมการ คือ

$$g(x_0) = c_1 f_1(x_0) + c_2 f_2(x_0)$$
$$g'(x_0) = c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0)$$

พิจารณาฟังก์ชัน $u(x) \equiv g(x) - c_1 f_1(x) - c_2 f_2(x)$
ซึ่งสอดคล้องกับสมการ (2.12) และเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x_0) = u'(x_0) = 0$ ทฤษฎีบทข้างต้นนี้กล่าวว่า $u(x) \equiv 0$ หรือ $g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ ซึ่งเท่ากับการพิสูจน์**ทฤษฎีบท**ต่อไปนี้

"ให้ f_1 และ f_2 เป็นผลเฉลยของ HSOLDE , $y'' + py' + qy = 0$, ถ้า $\left(f_1(x_0), f_1'(x_0)\right)$ และ $\left(f_2(x_0), f_2'(x_0)\right)$ เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น ทุก ๆ ผลเฉลย g(x) ของ HSOLDE นี้ จึงเท่ากับผลรวมเชิงเส้น $g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ ของ f_1 และ f_2 ด้วยค่าคงตัว c_1 และ c_2

2.2.2 การทดสอบความเป็นอิสระเชิงเส้นของผลเฉลย : รอนสเกียน

ผลเฉลย $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ ในทฤษฎีบทล่าสุดนี้มีคุณสมบัติว่าผลเฉลยอื่นใด g(x) สามารถกำหนดให้เป็นผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันทั้งสองนี้ อย่างไรก็ตามบทกลับ (converse) ของทฤษฎีบทดังกล่าวเกิดขึ้นเมื่อเราต้องการกำหนด**ความเป็นอิสระเชิงเส้น** (linear independence) ของผลเฉลย 2 ค่าคือ $f_3(x)$ และ $f_4(x)$ ซึ่งสามารถกระทำได้โดยการตรวจพินิจ (inspection) เพราะฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันจะเป็นอิสระต่อกันถ้าหากไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกัน

ถ้าฟังก์ชัน $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ผลเฉลย g(x) ใด ๆ ของ SOLDE และความชัน $g'(x)$ ของมันสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) &= g(x) \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) &= g'(x) \end{aligned} \qquad (2.13)$$

ด้วยสัมประสิทธิ์เชิงเส้น c_1 และ c_2 ที่เป็นได้อย่างเดียว ทั้งนี้เพราะถ้าฟังก์ชันทั้งสองขึ้นต่อกันแล้ว เช่น $f_2(x) = af_1(x)$ ดังนั้น เราสามารถกำหนดผลรวมได้เพียง $c_1 + ac_2$ ทำให้ g(x) เป็นสัดส่วนกับ $f_1(x)$ เท่านั้น จึงไม่อาจเป็นผลเฉลยทั่วไปของ SOLDE ได้

ถ้าสมการ (2.13) ข้างต้นเขียนในรูปแบบของเมทริกซ์

$$\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$$

จะเห็นได้ว่าผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียว กำหนดให้ดีเทอร์มิแนนต์

$$W(f_1, f_2; x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \qquad (2.14)$$

ต้องไม่เท่ากับศูนย์ เราเรียก $W(f_1, f_2; x)$ ว่า **รอนสเกียน** (Wronskian) ซึ่งตั้งเป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ชื่อ Wronski สมมติ $W(f_1, f_2; x = a) \neq 0$, ดังนั้น สัมประสิทธิ์ c_1 และ c_2 สามารถกำหนดที่ x = a เนื่องจากสมการ (2.13) สอดคล้องกับค่าอื่น ๆ ของ x ด้วย ดังนั้น เงื่อนไข $W(f_1, f_2; x) \neq 0$ จึงใช้ได้กับทุก ๆ ค่าของ x

รอนสเกียนสำหรับฟังก์ชันจำนวน n ฟังก์ชัน ประกอบด้วยฟังก์ชันเหล่านั้นรวมทั้งอนุพันธ์ n-1 ค่าแรก รอนสเกียนนี้ใช้ทดสอบความเป็นอิสระเชิงเส้นของผลเฉลยจำนวน n ค่าของ LDE อันดับ n

ในกรณีของ HSOLDE , $W(f_1, f_2; x)$ สอดคล้องกับ LDE อันดับหนึ่งคือ

$$\frac{d}{dx}W(f_1,f_2;x)=\frac{d}{dx}(f_1f_2'-f_2f_1')=f_1'f_2'+f_1f_2''-f_2'f_1'-f_2f_1''$$
$$=-f_1(pf_2'+qf_2)+f_2(pf_1'+qf_1)$$
$$=-p(x)W(f_1,f_2;x)$$

ดังนั้น $W(f_1,f_2;x)$ จึงมีรูปแบบโดยชัดแจ้งเป็น

$$W(f_1,f_2;x)=W(f_1,f_2;a)\exp(-\int_a^x p(x')dx') \tag{2.15}$$

ซึ่งแสดงว่า ถ้า $W(f_1,f_2;a)\neq 0$ ดังนั้น $W(f_1,f_2;x)\neq 0$ ในทุก ๆ แห่งด้วยและถ้า $W(f_1,f_2;a)=0$ ดังนั้น $W(f_1,f_2;x)=0$ ที่ทุก ๆ แห่ง ด้วยเหตุนี้ จึงไม่จำเป็นต้องทดสอบความเป็นอิสระเชิงเส้นของ 2 ผลเฉลยที่มากกว่า 1 จุดรวมทั้งจากสมการ (2.15) แสดงว่ารอนสเกียนสามารถหาค่าได้ก่อนที่เราจะทำการแก้สมการ SOLDE อีกด้วย

เราจึงสรุปเป็น**ทฤษฎีบท**ได้ดังนี้

"ผลเฉลยสองค่า f_1 และ f_2 ของ HSOLDE ตามสมการ (2.12) จะขึ้นต่อกันก็ต่อเมื่อรอนสเกียนเป็นศูนย์ และเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันเมื่อรอนสเกียนไม่เท่ากับศูนย์"

ตัวอย่างเช่น ผลเฉลยของ HSOLDE, $\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2\right)y(x)=0$ พบว่าเท่ากับ coskx และ $(1/k)\sin kx$ ดังนั้น รอนสเกียนคือ

$$W(f_1,f_2;x)=\begin{vmatrix}\cos kx & \frac{1}{k}\sin kx\\ -k\sin kx & \cos kx\end{vmatrix}=1$$

แต่ถ้าหากเราเขียนผลเฉลยค่าที่สองเป็น sin kx, รอนสเกียนจะเท่ากับ k ซึ่งเท่ากับศูนย์เมื่อ $k\to 0$ ในลิมิตเช่นนี้ $\sin kx=0$ จึงไม่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อ $\cos kx=1$ ในขณะที่ $\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\sin kx=x$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อ $\cos kx=1$

รอนสเกียนของฟังก์ชัน $f_1,f_2,\ldots,f_n$ คือ

$$W(f_1,f_2,\ldots,f_n;x)=\begin{vmatrix}f_1(x) & f_2(x) & ---- & f_n(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x) & ---- & f_n'(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-2)}(x) & ---- & f_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

ซึ่งอาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$W(f_1, f_2, \dots f_n\ ; x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & ---- & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & ---- & f_2^{(n-1)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x) & f_n'(x) & ---- & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

ถ้าฟังก์ชันเหล่านี้ขึ้นต่อกันแบบเชิงเส้น ดังนั้น $W(f_1, f_2, \dots, f_n; x) \equiv 0$ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน e^x, e^{-x} และ $\sinh x$ จะขึ้นต่อกันเพราะรอนสเกียน

$$W(e^x, e^{-x}, \sinh x; x) = \begin{vmatrix} e^x & e^x & e^x \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \\ \sinh x & \cosh x & \sinh x \end{vmatrix} = 0$$

ซึ่งสามารถตรวจสอบค่ารอนสเกียนได้ง่ายเพราะสดมภ์ หรือแนวตั้ง (column) แนวแรกและแนวสุดท้ายจะเหมือนกัน

2.2.3 ผลเฉลยที่สองของสมการเอกพันธุ์และไม่เป็นเอกพันธุ์

หากเราทราบผลเฉลยค่าหนึ่งคือ $f_1(x)$ ของสมการเอกพันธุ์หรือ HSOLDE ผลเฉลยที่สองคือ $f_2(x)$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นต่อ $f_1(x)$ สามารถหาได้โดยใช้รอนสเกียน :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right] = \frac{f_1(x)f_2'(x) - f_2(x)f_1'(x)}{f_1^2(x)} = \frac{W(x)}{f_1^2(x)}$$

หรือ $$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = c + \int_a^x \frac{W(s)}{f_1^2(s)} ds = c + \int_a^x \frac{1}{f_1^2(s)}\left[W(a)\exp(-\int_a^s p(t)dt)\right]ds$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ของการอินทิเกรต ดังนั้น

$$f_2(x) = f_1(x)\left\{c + W(a)\int_a^x \frac{1}{f_1^2(s)}[\exp(-\int_a^s p(t)dt]ds\right\} \tag{2.16}$$

สังเกตุว่า W(a) เป็นค่าคงตัวใด ๆ อีกค่าหนึ่ง เราไม่จำเป็นต้องทราบ W(x) (ที่จำเป็นต้องทราบ f_2) เพื่อหา W(a) และเรามักกำหนดให้ c = 0 เพราะให้เทอมที่เป็นสัดส่วนกับ $f_1(x)$ ทำให้สมการ (2.16) เขียนแบบสั้น ๆ ได้เป็น

$$f_2(x) = g(x)f_1(x) \tag{2.17}$$

เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น ลองพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.2.3.1

ถ้าผลเฉลยค่าหนึ่งของสมการ $y''(x) = 0$ มีค่าเท่ากับ 1 นั่นคือ $f_1(x) = 1$ ดังนั้น ผลเฉลยที่สองที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อ $f_1(x)$ คือ

$$\begin{aligned} f_2(x) &= g(x)f_1(x) = g(x) \\ &= \int_a^x ds = x - a = x \qquad \text{ถ้า} \quad a = 0 \end{aligned}$$

โดยที่เราใช้ผล $p(x) = 0$ ในทางกลับกัน ถ้าเราทราบ $f_2(x)$ ดังนั้น
$f_1(x) = cg(x)x$ โดยที่

$$g(x) = \int_a^x \frac{1}{f_1^2(s)} ds = \int_a^x \frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}$$

เราอาจเลือกให้ $a = \infty$, $c = -1$ เพื่อให้ค่า $f_1(x) = 1$

ตัวอย่างที่ 2.2.3.2

ผลเฉลยของสมการเฮล์มโฮลตซ์ $y'' - k^2 y = 0$ คือ e^{kx} ถ้า c = 0 และ W(a)=1 ในสมการ (2.16) เนื่องจาก p(x)=0 ดังนั้น

$$\begin{aligned} f_2(x) &= e^{kx}\left(0 + \int_a^x \frac{ds}{e^{2ks}}\right) = e^{kx}\left(-\frac{1}{2k} e^{-2ks}\Big|_a^x\right) \\ &= -\frac{1}{2k} e^{-kx} + \frac{e^{-2ka}}{2k} e^{kx} \end{aligned}$$

ซึ่งนำไปสู่การเลือกผลเฉลยที่สองเป็น e^{-kx}

เมื่อ k^2 เปลี่ยนเป็น $-k^2$ สมการจะกลายเป็น $y'' + k^2 y = 0$ และมีผลเฉลยค่าหนึ่งเป็น sinkx ด้วยค่า $c = 0, a = \pi/2k$ และ $W(\pi/2k) = 1$ ดังนั้น

$$f_2(x) = \sin kx\left(0 + \int_{\pi/2k}^{x} \frac{ds}{\sin^2 ks}\right) = -\sin kx \cot ks\Big|_{\pi/2k}^{x} = -\cos kx$$

รอนสเกียนในกรณีแรกมีค่า

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{kx} & ke^{kx} \\ e^{-kx} & -ke^{-kx} \end{vmatrix} = -2k$$

และในกรณีหลังมีค่า

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin kx & k\cos kx \\ \cos kx & -k\sin kx \end{vmatrix} = -k$$

ทั้งสองกรณีต่างเท่ากับค่าคงตัว ซึ่งเป็นกรณีพิเศษของผลเฉลย กล่าวคือ รอนสเกียนของผลเฉลย 2 ค่าใด ๆ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันของ $y'' + q(x)y = 0$ จะมีค่าคงตัว

ปัญหาส่วนใหญ่ในฟิสิกส์มักเกี่ยวข้องกับผลเฉลยที่เป็นฟังก์ชันพิเศษ เช่นผลเฉลยของสมการเลอจองด์ซึ่งเคยกล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 1.5.3 ของบทที่ 1 รูปแบบของสมการเลอจองด์คือ

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0$$

ผลเฉลยของสมการเลอจองด์ที่เราได้เคยกล่าวไว้แล้วคือ พหุนามเลอจองด์ ซึ่งเขียนเป็น $P_n(x)$ อย่างไรก็ตาม ผลเฉลยรูปแบบอื่นอาจหาได้เช่นเดียวกันโดยใช้สมการ (2.16) กล่าวคือ สมการเลอจองด์ข้างต้นอาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0$$

เมื่อเทียบกับสมการ (2.12) จะเห็นได้ว่า

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \qquad \text{และ} \qquad q(x) = \frac{n(n+1)}{1-x^2}$$

เราทราบว่าผลเฉลยค่าหนึ่งของสมการคือ พหุนามเลอจองด์ $P_n(x)$ ดังนั้นผลเฉลยที่สอง หรือ $Q_n(x)$ ซึ่งหาได้จากสมการ (2.16) โดยให้ $c = 0$ คือ

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= W(a)P_n(x)\int_a^x \frac{1}{P_n^2(s)}\exp\left[-\int_a^s -2t/(1-t^2)dt\right]ds \\ &= W(a)P_n(x)\int_a^x \frac{1}{P_n^2(s)}\left(\frac{1-a^2}{1-s^2}\right)ds \\ &= A_nP_n(x)\int_a^x \frac{ds}{(1-s^2)P_n^2(s)} \end{aligned}$$

โดยที่ A_n เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ a เป็นจุดใด ๆ ในช่วง [-1, +1] เช่น สำหรับ $n = 0$, $P_0 = 1$ จะได้

$$Q_0(x) = A_0\int_a^x \frac{ds}{1-s^2} = A_0\left[\frac{1}{2}\ell n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\ell n\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right]$$

รูปแบบมาตรฐานของ $Q_0(x)$ กำหนดจากการให้ $A_0 = 1$ และ $a = 0$ ดังนั้น

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ell n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \text{สำหรับ } |x| < 1$$

ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $P_1(x) = x$ ผลเฉลยที่สองจึงเป็น

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= A_1x\int_0^x \frac{ds}{s^2(1-s^2)} = A_1x\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\ell n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\ell n\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\right] \\ &= Ax + Bx\ell n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C \qquad |x| < 1 \end{aligned}$$

รูปแบบมาตรฐานของ $Q_1(x)$ กำหนดจากการให้ $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$ และ $C = -1$ ดังนั้น

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ell n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$$

ต่อไปเราจะพิจารณาผลเฉลยที่สองของสมการที่ไม่เป็นเอกพันธ์หรือ ISOLDE ซึ่งมีรูปแบบเป็นไปตามสมการ (2.9) คือ

$$\hat{L}[y] \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.18}$$

รูปแบบของสมการเช่นนี้อาจพิจารณาในเทอมของ**ฟังก์ชันของกรีน** (Green's functions) ซึ่งจะได้กล่าวในบทต่อ ๆ ไป แต่โดยทั่วไปมักกำหนดรูปแบบของผลเฉลยของสมการเป็น

$$y(x) = y_p(x) + \left[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\right] \tag{2.19}$$

ซึ่งเป็นผลรวมเชิงเส้นของ**ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution) คือ $y_p(x)$ และ**ผลเฉลยเติมเต็ม** (complementary solution) ซึ่งเป็นเทอมที่อยู่ในวงเล็บ $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ ซึ่งเป็นฐานหลัก (basis) ของผลเฉลยจะเป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันของสมการเอกพันธ์

คำถามที่น่าสนใจคือ ทำไมเราจึงต้องมีผลเฉลยเติมเต็มอีกหากเรามีผลเฉลยเฉพาะ $y_p(x)$ แล้ว เหตุผลก็คือ $y_p(x)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y_p(a), y'_p(a)$ ที่ $x = a$ เท่านั้น ผลเฉลยเติมเต็มช่วยเปลี่ยนเงื่อนไขขอบโดยไม่มีผลกระทบใดๆต่อความไม่เป็นเอกพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์เลย เราสามารถพิสูจน์ได้ง่ายว่าผลเฉลยเติมเต็ม $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ ที่เราต้องการจะมีสัมประสิทธิ์ที่เลือกได้โดยต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบที่ถูกต้องที่ $x = a$ สมมติผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y(a) = \alpha, y'(a) = \beta$ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ที่เลือกได้จะต้องสอดคล้องกับ สมการ

$$c_1 f_1(a) + c_2 f_2(a) = \alpha - y_p(a)$$
$$c_1 f'_1(a) + c_2 f'_2(a) = \beta - y'_p(a)$$

นอกจากนี้ การมีอยู่จริงของสัมประสิทธิ์เชิงเส้น

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) & f_2(a) \\ f'_1(a) & f'_2(a) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha - y_p(a) \\ \beta - y'_p(a) \end{pmatrix}$$

จะได้รับการประกันโดยการเป็นอิสระเชิงเส้นของผลเฉลย f_1 และ f_2 ซึ่งทำให้รอนสเกียน $W(a) \neq 0$ ดังนั้นเมทริกซ์ผกผันตามสมการล่าสุดจึงมีอยู่จริง

สิ่งที่เราจะต้องหาคือผลเฉลยเฉพาะของ ISOLDE และจะใช้วิธีการที่เรียกว่า **วิธีการแปรผันค่าคงตัว** (method of variation of constants) วิธีการนี้ยังใช้หาผลเฉลยที่สองของ HSOLDE ได้เช่นกัน แนวคิดของวิธีการนี้มีดังนี้

สังเกตุว่าฟังก์ชัน $y_p(x)$ มีระดับขั้นความเสรี (degree of freedom) เท่ากับ 2 ในเชิงที่ว่าที่จุด $x = x_1$ ค่า $y_p(x_1)$ และความชัน $y'_p(x_1)$ สามารถเลือกค่าได้อย่างเสรี ค่าใด ๆ 2 ค่านี้อาจเขียนในเทอมของค่าและความชันของผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันคือ $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ ของ HSOLDE นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= v_1 f_1(x) + v_2 f_2(x) \\
y'_p(x) &= v_1 f'_1(x) + v_2 f'_2(x)
\end{aligned}
\qquad (2.20)
$$

เพราะขวามือของสมการยังอธิบายระบบที่มี 2 ระดับขั้นความเสรี ซึ่งแสดงด้วยสัมประสิทธิ์ v_1 และ v_2 ที่เป็นเชิงเส้น ความจริงสัมประสิทธิ์ทั้งสองนี้กำหนดได้จากสมการ (2.20) ที่ $x = x_1$ เพราะรอนสเกียน $W(x_1)$ ไม่เท่ากับศูนย์หาก $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

อย่างไรก็ตามสัมประสิทธิ์ v_1 และ v_2 นี้ไม่สามารถเป็นค่าคงตัวที่เป็นอิสระต่อ x ได้เพราะ $y_p(x)$ สำหรับ HSOLDE ไม่ใช่ ISOLDE ดังนั้นเราจึงสรุปว่า v_1 และ v_2 เป็นฟังก์ชันของ x และการที่ขึ้นกับ x นี้เองจึงเรียกว่า **การแปรผันค่าคงตัวตามวิธีที่เรียกนี้**

การหาอนุพันธ์โดยตรงของสมการแรกของ (2.20) ไม่อาจให้สมการที่สองได้เว้นเสียแต่ว่า

$$v'_1(x) f_1(x) + v'_2(x) f_2(x) = 0$$

ข้อกำหนดเดียวนี้ไม่เพียงพอที่จะกำหนดตัวไม่รู้ค่า v'_1 และ v'_2 ได้ เรายังต้องการความสัมพันธ์อื่น ๆ อีก ซึ่งอาจกระทำได้โดยเริ่มจากสมการ (2.18) และใช้สมการ (2.20) เข้าช่วยได้

$$v'_1(x) f'_1(x) + v'_2(x) f'_2(x) = r(x)$$

จาก 2 สมการล่าสุดนี้ ใช้หา v_1' และ v_2' ซึ่งจะได้

$$v_1'(x) = -f_2(x)\frac{r(x)}{W(x)}$$
$$(W \neq 0)$$
$$v_2'(x) = f_1(x)\frac{r(x)}{W(x)}$$

ทั้งสองสมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$v_1(x) = -\int_a^x \frac{f_2(t)r(t)}{W(t)}dt$$
$$v_2(x) = \int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)}dt$$

โดยที่ค่าคงตัวของการอินทิเกรตสามารถเลือกได้ตามใจชอบโดยให้ $v_1(a) = v_2(a) = 0$ การเลือกเช่นนี้ทำให้ผลเฉลยเฉพาะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y_p(a) = 0$ และ $y_p'(a) = 0$ ซึ่งเป็นไปตามสมการ (2.20) ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของ ISOLDE จึงเขียนได้เป็น

$$y_p(x) = f_2(x)\int_a^x \frac{f_1(t)r(t)}{W(t)}dt - f_1(x)\int_a^x \frac{f_2(t)r(t)}{W(t)}dt \qquad (2.22)$$

เราจึงสรุปเป็นประพจน์ (proposition) ได้ว่า "**การทราบผลเฉลยเพียงค่าเดียวของ HSOLDE เพียงพอที่จะสร้างผลเฉลยทั่วไปของทั้ง HSOLDE และ ISOLDE ที่สมนัยกัน**"

ตัวอย่างที่ 2.2.3.3

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $\left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)y(x) = A\sin qx$

ในกรณีที่ขวามือของสมการเป็นศูนย์ซึ่งหมายถึง HSOLDE ตัวอย่างที่เคยยกมาให้ดู บอกให้ทราบว่าผลเฉลยทั้งสองที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันคือ

$$f_1(x) = \cos kx \quad , \quad f_2(x) = \frac{1}{k}\sin kx$$

และรอนสเกียนคือ W(x) = 1 จากสมการ (2.21) จะได้

$$v_1(x) = -\int_a^x \frac{A}{k}\sin kx \sin qx dx$$

$$= -\frac{A}{k}\left(\frac{\sin(k-q)x}{2(k-q)} - \frac{\sin(k+q)x}{2(k+q)}\right)$$

โดยตัดค่าคงตัวของการอินทิเกรตออกไป และในทำนองเดียวกันจะได้

$$v_2(x) = A\int_a^x \cos kx \sin qx dx$$

$$= \begin{cases} A\left(\dfrac{\cos(k-q)x}{2(k-q)} - \dfrac{\cos(k+q)x}{2(k+q)}\right) & k \neq q \\ \dfrac{A}{2k}\sin^2 kx & k = q \end{cases}$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะในกรณี $k \neq q$ คือ

$$y_p(x) = -\frac{A}{2k(k-q)}\left[\sin(k-q)x\cos kx - \cos(k-q)x\sin kx\right]$$

$$+\frac{A}{2k(k+q)}\left[\sin(k+q)x\cos kx - \cos(k+q)x\sin kx\right]$$

$$= \frac{A\sin qx}{k^2-q^2}$$

และผลเฉลยเฉพาะในกรณี $k = q$ คือ

$$y_p(x) = \frac{A}{k}\left(\frac{\sin 2kx}{4k} - \frac{1}{2}x\right)\cos kx + \frac{A}{2k^2}\sin^3 kx$$

$$= \frac{-A}{2k}x\cos kx + \frac{A}{2k^2}\sin kx$$

โดยเราอาจตัดเทอม sinkx ออกไปได้

ถ้าตัวแปร x คือเวลา t สมการ ISOLDE ตามตัวอย่างนี้คือ สมการการเคลื่อนที่ของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกที่ถูกขับเคลื่อน (driven harmonic oscillator) ที่ปราศจากการหน่วง (damped) ค่าของตัวส่วน $k^2 - q^2$ ที่เท่ากับศูนย์ในกรณีแรก แสดงการปรากฏของ**การสั่นพ้อง**(resonance) ซึ่งให้ค่าแอมพลิจูดสูงสุด ในกรณีพิเศษที่เรากำลังพิจารณาอยู่นี้ไม่มีการหน่วงที่เกิดจากการเสียดทาน ผลที่ปรากฏคือ แอมพลิจูดของการสั่นพ้องเพิ่มขึ้นโดยปราศจากลิมิต ดังแสดงในผลเฉลย -(A/2k)tcoskt ที่การสั่นพ้องค่าผลเฉลยที่เป็นเชิงเส้นกับ A แสดงว่าแอมพลิจูดของการแกว่งกวัดมีค่าเป็นสองเท่าเมื่อระบบมีแรงขับเพิ่มขึ้นสองเท่า ซึ่งเป็นผลจากหลักการซ้อนทับที่ได้กล่าวมาแล้วนั่นเอง

ในกรณีที่เทอมทางขวามือของ ISOLDE ตามสมการ (2.9) เป็น Dirac δ function หรือ $r(x) = \delta(x - x')$ สมการ (2.21) จะกลายเป็น

$$v_1(x) = \begin{cases} 0 & x < x' \\ -f_2(x')/W(x') & x > x' \end{cases}$$
$$= -[f_2(x')/W(x')]\theta(x - x') \tag{2.23}$$

โดยที่ $\theta(t)$ เป็น**ฟังก์ชันขั้นบันได** (step-function) ทำนองเดียวกัน

$$v_2(x) = [f_1(x')/W(x')]\theta(x - x') \tag{2.24}$$

ผลเฉลยของ ISOLDE ด้วยค่า δ-function เรียกว่า **ฟังก์ชันของกรีน** ซึ่งมีรูปแบบทั่วไปเป็น

$$G(x,x') = G_p(x,x') + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \tag{2.25}$$

ซึ่งจะได้กล่าวในบทต่อ ๆ ไป

มีทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อยู่ 2 ทฤษฎีบททั้ง 2 ทฤษฎีบทนี้เป็นการใช้รอนสเกียนหาคุณสมบัติของกราฟของผลเฉลยของ HSOLDE คุณสมบัติแรกอธิบายด้วยทฤษฎีบทอันเนื่องจาก**สตูร์ม** (Sturm) ซึ่งเกี่ยวข้องกับตำแหน่งสัมพัทธ์ของค่าเป็นศูนย์ของผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันของ HSOLDE ทฤษฎีบทแรกนี้เรียกว่า **ทฤษฎีบทการแยก** (The separation theorem) ทฤษฎีบทนี้กล่าวว่า

"ค่าเป็นศูนย์ของผลเฉลย $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ ของ HSOLDE ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันจะเกิดขึ้นสลับกัน"

ตัวอย่างเช่น ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันของสมการ $y'' + y = 0$ คือ sin x และ cos x ทฤษฎีบทการแยกเสนอว่าค่าเป็นศูนย์ของ sin x และ cos x จะต้องสลับกัน ซึ่งเป็นจริงตามหลักของ

ตรีโกณมิติเบื้องต้น ตามความเป็นจริงเราทราบว่าค่าเป็นศูนย์ของ $\cos x$ เกิดขึ้นที่ค่าพหุคูณเลขคี่ของ $\pi/2$ และของ $\sin x$ เกิดขึ้นที่ค่าพหุคูณเลขคู่ของ $\pi/2$

ผลอีกประการหนึ่งอันเนื่องจากสตูร์ม เรียกว่า **ทฤษฎีบทการเปรียบเทียบ** (comparison theorem) ซึ่งกล่าวว่า

"ให้ f(x) และ g(x) เป็นผลเฉลยไม่ชัด (nontrivial solution) ของสมการ $u''+p(x)u=0$ และ $v''+q(x)v=0$ ตามลำดับ โดยที่ $p(x)\ge q(x)$ สำหรับทุกค่าของ x ในช่วง [a, b] ดังนั้น f(x) จะหายไปอย่างน้อย 1 ครั้งระหว่างค่าเป็นศูนย์ 2 ค่าของ g(x) เว้นเสียแต่ว่า $p(x)\equiv q(x)$ และ f เป็นพหุคูณของ g"

รูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในทฤษฎีบทการเปรียบเทียบไม่มีการจำกัดเพราะ HSOLDE ใด ๆ สามารถปรับตามรูปแบบนี้ได้ กรณีพิเศษของทฤษฎีบทนี้จะปรากฏใน **บทแทรก** (corollary) ดังนี้

"ถ้า $q(x)\le 0$ ดังนั้นจะไม่มีผลเฉลยไม่ชัดของสมการเชิงอนุพันธ์ $v''+q(x)v=0$ สามารถมีได้มากกว่าค่าเป็นศูนย์ค่าเดียว"

ตัวอย่างเช่นการแกว่งกวัดของผลเฉลยของ $v''+q(x)v=0$ ส่วนใหญ่กำหนดจากเครื่องหมายและขนาดของ q(x) สำหรับ $q(x)\le 0$ จะไม่มีการแกว่งกวัด นั่นคือ ไม่มีผลเฉลยที่เปลี่ยนเครื่องหมายมากกว่าหนึ่งครั้ง ถ้า $q(x)\ge k^2>0$ สำหรับค่าจริง k ใด ๆ ดังนั้นจากทฤษฎีบทการเปรียบเทียบ ผลเฉลยใด ๆ ของ $v''+q(x)v=0$ ต้องมีค่าเป็นศูนย์อย่างน้อย 1 ครั้ง ระหว่างค่าเป็นศูนย์ 2 ค่าใด ๆ ที่สืบเนื่องของผลเฉลย $\sin kx$ ของ $u''+k^2u=0$ หมายความว่าผลเฉลยใด ๆ ของ $v''+q(x)v=0$ มีค่าเป็นศูนย์ในช่วงความยาว π/k ถ้า $q(x)\ge k^2>0$

ในกรณีของ**สมการเบสเซล**

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

เราสามารถกำจัดเทอม y' โดยการแทนค่า $v/\sqrt{x}$ สำหรับ y ทำให้สมการกลายเป็น

$$v''+\left(1-\frac{4n^2-1}{4x^2}\right)v=0$$

เมื่อ n = 0, เราเปรียบเทียบกับสมการ $u''+u=0$ ซึ่งมีผลเฉลย $u=\cos x$ และสรุปว่าแต่ละช่วงความยาว π ของแกน x ค่าบวกจะมีค่าเป็นศูนย์อยู่อย่างน้อย 1 ค่า ของผลเฉลยของสมการเบสเซล ดังนั้นฟังก์ชันเบสเซลอันดับที่ศูนย์หรือ $J_0(x)$ มีค่าเป็นศูนย์ในแต่ละช่วงของความยาว π ของแกน x

สำหรับ $4n^2-1>0$ หรือ $n>\frac{1}{2}$ เราได้ $1>[1-(4n^2-1)/4x^2]$ ซึ่งแสดงว่า $\sin x$ มีค่าเป็นศูนย์อย่างน้อย 1 ค่า ระหว่างค่าเป็นศูนย์ที่สืบเนื่อง 2 ค่า ใด ๆ ของฟังก์ชันเบสเซลอันดับที่มากกว่า 1/2 ทำให้ฟังก์ชันเบสเซลสามารถมีค่าเป็นศูนย์อย่างมาก 1 ค่าระหว่างค่าเป็นศูนย์ที่สืบเนื่อง 2 ค่า ใด ๆ ของ $\sin x$ (หรือในแต่ละช่วงความยาว π บนแกน x ค่าบวก)

บทแทรกนี้เมื่อใช้กับ $v''-v=0$ ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$c_1e^{x}+c_2e^{-x}\equiv f(x)$$

$f(x)=0$ ดังนั้น $x=\frac{1}{2}\ell n\left|-\frac{c_2}{c_1}\right|$ ซึ่งเป็นไปค่าเดียวเท่านั้น

2.2.4 ตัวดำเนินการผูกพันเชิงอนุพันธ์

ตัวดำเนินการผูกพัน (adjoint operator) มักปรากฏในบริบทของปริภูมิเวกเตอร์เสมอ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ความสำคัญของตัวดำเนินการผูกพันในตัว (self-adjoint operator) หรือ ตัวดำเนินการเฮอร์มิเทียน (hermitian operator) ที่ปรากฏในทฤษฎีการแยกสเปกตรัม ผลของทฤษฎีบทเหล่านี้คือความบริบูรณ์ (completeness) ของเวกเตอร์เจาะจงของตัวดำเนินการเฮอร์มิเทียน ซึ่งเกิดจากความจริงที่ว่าเวกเตอร์ใด ๆ สามารถกำหนดเป็นผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์เจาะจง (ที่มีสมบัติเชิงตั้งฉากปรกติ) ของตัวดำเนินการเฮอร์มิเทียน

ตัวดำเนินการผูกพันเชิงอนุพันธ์มีความสำคัญมากเช่นเดียวกันเพราะฟังก์ชันเจาะจงของมันก่อให้เกิดเซตบริบูรณ์เชิงตั้งฉาก (complete orthogonal set) ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงแนวคิดของการผูกพันในกรณีตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

ก่อนอื่นเราจะนิยามสมการ HSOLDE ที่มีรูปแบบ

$$\hat{L}[y]\equiv p_2(x)y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=0 \tag{2.26}$$

สมการนี้จะเป็นสมการแม่นตรง (exact) ก็ต่อเมื่อ

$$p_2y''+p_1y'+p_0y=\frac{d}{dx}[A(x)y'+B(x)y] \tag{2.27}$$

สำหรับทุกค่าของ y และค่าคงตัว A, B ในช่วง [a, b] ตัวประกอบปริพันธ์ (integrating factor) สำหรับสมการ (2.26) คือฟังก์ชัน $\mu(x)$ ที่ทำให้ $\mu\hat{\mathbf{L}}[y] = 0$ มีความแม่นตรง

หากตัวประกอบปริพันธ์มีจริง ดังนั้น สมการ (2.26) จะกลายเป็น

$$\frac{d}{dx}[A(x)y' + B(x)y] = 0$$

หรือ

$$A(x)y' + B(x)y = C$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งที่มีเทอมค่าคงตัวไม่เป็นเอกพันธ์ (constant inhomogeneous term) แม้ว่า ISOLDE ที่สมนัยกับสมการ (2.26) สามารถแก้สมการได้ เพราะ

$$\mu\hat{\mathbf{L}}[y] = \mu(x)r(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[A(x)y' + B(x)y] = \mu(x)r(x)$$

หรือ

$$A(x)y' + B(x)y = \int^x \mu(t)r(t)dt$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งทั่วไป ดังนั้น การมีอยู่จริงของตัวประกอบปริพันธ์สามารถแก้ SOLDE ได้อย่างบริบูรณ์ **ดังนั้น จึงมีความจำเป็นมากที่เราจะต้องทราบว่า SOLDE มีค่าแม่นตรงหรือไม่** ประพจน์ต่อไปนี้ให้เกณฑ์สำหรับความแม่นตรงของ SOLDE ได้

ประพจน์

"สมการ (2.26) จะแม่นตรงก็ต่อเมื่อ $p_2'' - p_1' + p_0 = 0$"
ประพจน์นี้จะเป็นจริงเมื่อสมการ (2.27) ใช้ได้ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ

$$p_2 = A, \quad p_1 = A' + B \qquad \text{และ} \quad p_0 = B'$$

ซึ่งสมมูลกับ $p_2'' = A''$, $p_1' = A'' + B'$ และ $p_0 = B'$ ซึ่งทำให้ประพจน์เป็นจริง

โดยทั่วไป SOLDE จะไม่แม่นตรง หากเราใช้ตัวประกอบปริพันธ์คูณเข้าไปอาจช่วยให้สมการมีความแม่นตรงได้ดังเช่น กรณีของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ถ้า μ เป็นตัวประกอบปริพันธ์

สำหรับ SOLDE ตามสมการ (2.26) ประพจน์อีกประพจน์หนึ่งกล่าวว่า μ ตัวนั้นจะต้องเป็นผลเฉลยของ HSOLDE

$$\hat{\mathbf{A}}[\mu] \equiv (p_2\mu)'' - (p_1\mu)' + p_0\mu = 0 \tag{2.28}$$

HSOLDE เป็นผลจากประพจน์แรกนั่นเอง

เราสามารถกระจายสมการ (2.28) ออกเป็น

$$p_2\mu'' + (2p_2' - p_1)\mu' + (p_2'' - p_1' + p_0)\mu = 0$$

ทำให้ตัวดำเนินการ $\hat{\mathbf{A}}$ กลายเป็น

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv p_2\frac{d^2}{dx^2} + (2p_2' - p_1)\frac{d}{dx} + (p_2'' - p_1' + p_0) \tag{2.29}$$

ซึ่งเรียกว่า ผูกพัน กับตัวดำเนินการ $\hat{\mathbf{L}}$ หรือ $\hat{\mathbf{A}} \equiv \hat{\mathbf{L}}^+$ เหตุผลที่ใช้คำว่าผูกพันอธิบายได้ดังนี้ :

ประพจน์ล่าสุดบอกการมีอยู่จริงของตัวประกอบปริพันธ์ ซึ่งหาได้จากสมการ (2.28) เท่านั้น ซึ่งตรงข้ามกับตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่หาได้จากการอินทิเกรตเท่านั้น แม้ว่าตัวประกอบปริพันธ์สำหรับ SOLDE อาจไม่มีผลมากนักเมื่อเทียบกับกรณีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง แต่สามารถช่วยให้เราแก้สมการ SOLDE ได้ง่ายขึ้น เนื่องจาก $(\hat{\mathbf{L}}^+)^+ = \hat{\mathbf{L}}$ หาก v เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของ $\hat{\mathbf{L}}[u] = 0$ ดังนั้น u จะเป็นตัวประกอบปริพันธ์ของ $\hat{\mathbf{A}}[v] \equiv \hat{\mathbf{L}}^+[v] = 0$ หากเราเปลี่ยน y เป็น u ในสมการ (2.26) แล้วคูณสมการด้วย v และเปลี่ยน μ เป็น v ในสมการ (2.28) แล้วคูณสมการด้วย u เมื่อนำผลทั้ง 2 ส่วนมาลบกันจะได้

$$v\hat{\mathbf{L}}[u] - u\hat{\mathbf{A}}[v] = (vp_2)u'' - u(p_2v)'' + (vp_1)u' + u(p_1v)'$$

หรือ

$$v\hat{\mathbf{L}}[u] - u\hat{\mathbf{A}}[v] = \frac{d}{dx}[p_2vu' - (p_2v)'u + p_1uv] \tag{2.30}$$

และ

$$\int_a^b \left\{ v\hat{\mathbf{L}}[u] - u\hat{\mathbf{A}}[v] \right\}dx = \left[p_2vu' - (p_2v)'u + p_1uv\right]_a^b \tag{2.31}$$

ทั้ง 2 สมการนี้เรียกว่า เอกลักษณ์ลากรองจ์ (Lagrange identity)

สมการ (2.31) อธิบายสาเหตุที่เรียก $\hat{\mathbf{A}}$ ว่าเป็นตัวดำเนินการผูกพันของ $\hat{\mathbf{L}}$

ถ้าให้ u และ v เป็นเวกเตอร์ $|u\rangle$ และ $|v\rangle$ ในปริภูมิฮิลเบร์ต (Hilbert space) ที่มีตัว ดำเนินการเป็น $\hat{\mathbf{L}}$ และ $\hat{\mathbf{A}}$ แล้วนิยามผลคูณภายใน (inner product) เป็น

$$\langle u|v\rangle = \int_a^b u^*(x)v(x)dx$$

ดังนั้น สมการ (2.31) จะเขียนเป็น

$$\begin{aligned}\langle v|\hat{\mathbf{L}}|u\rangle - \langle u|\hat{\mathbf{A}}|v\rangle &= \langle u|\hat{\mathbf{L}}^{+}|v\rangle^{*} - \langle u|\hat{\mathbf{A}}|v\rangle \\ &= \left[p_2 vu' - (p_2 v)'u + p_1 uv\right]\Big|_a^b\end{aligned}$$

หากขวามือของสมการเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\langle u|\hat{\mathbf{L}}^{+}|v\rangle^{*} = \langle u|\hat{\mathbf{A}}|v\rangle$$

และเนื่องจากทุกตัวดำเนินการและฟังก์ชันเป็นค่าจริง ดังนั้น $\hat{\mathbf{L}}^{+} = \hat{\mathbf{A}}$

ถ้าจะให้ $\hat{\mathbf{L}}^{+} = \hat{\mathbf{A}}$ มีค่าเท่ากับ $\hat{\mathbf{L}}$ เราต้องให้

$$2p_2' - p_1 = p_1 \quad \Rightarrow \quad p_2' = p_1$$

และ

$$p_2'' - p_1' + p_0 = p_0$$

หากเป็นจริงเช่นนี้ เราสามารถเขียนสมการ (2.26) เป็น

$$\hat{\mathbf{L}}[y] = p_2 y'' + p_2' y' + p_0 y = (p_2 y')' + p_0 y = 0$$

หรือ

$$\hat{\mathbf{L}}[y] = \frac{d}{dx}\left[p_2(x)\frac{dy}{dx}\right] + p_0(x)y = 0$$

SOLDE ไม่ทุกสมการที่มีความผูกพันในตัว สมมติเราคูณสมการ (2.26) ด้วยฟังก์ชัน h(x) ซึ่งเราจะหาค่าภายหลัง จะได้

$$h(x)p_2(x)y'' + h(x)p_1(x)y' + h(x)p_0(x)y = 0$$

เราเลือกค่า h(x) ที่ทำให้ $\frac{d}{dx}(hp_2) = hp_1$ หรือ

$$p_2\frac{dh}{dx} + h(p_2' - p_1) = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แยกได้และมีผลเฉลยเป็น

$$h(x) = \frac{1}{p_2}\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt\right]$$

จากผลอันนี้เราจึงสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ว่า SOLDE ตามสมการ (2.26) จะผูกพันในตัวก็ต่อเมื่อสมการมีรูปแบบเป็น

$$\frac{d}{dx}\left[p_2(x)\frac{dy}{dx}\right] + p_0(x)y = 0$$

และหากไม่ผูกพันในตัว เราสามารถทำให้มีความผูกพันในตัวได้โดยการคูณตลอดด้วย h(x) ที่หาได้นี้

ตัวอย่างเช่น สมการเลอจองด์

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda}{1-x^2}y = 0$$

ไม่ผูกพันในตัวเพราะ $p_2' = (1)' = 0 \neq -\frac{2x}{1-x^2}$ อย่างไรก็ตามเราอาจทำให้ผูกพันในตัวได้โดยคูณตลอดด้วย $(1-x^2)$ กล่าวคือ

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0$$

ในทำนองเดียวกันสมการเบสเซล $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$ ไม่ผูกพันในตัวแต่ถ้าหากเราคูณตลอดด้วย x จะได้

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$$

ซึ่งผูกพันในตัวได้

2.2.5 สมการริกคาตี

เราอาจแปลง SOLDE ไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ โดยแทนค่า $v = y'/y$ ทำให้สมการ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

กลายเป็น

$$v' + v^2 + p(x)v + q(x) = 0 \qquad (2.32)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ไม่เป็นเชิงเส้น สมการข้างต้นนี้อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$u' + u^2 + S(x) = 0 \qquad (2.33)$$

โดยที่

$$S(x) = -\frac{1}{2}p' - \frac{1}{4}p^2 + q$$

สมการ (2.32) หรือ (2.33) เรียกว่า สมการริกคาตี (Riccati equation) เมื่อเราแก้สมการนี้แล้ว เราจะได้สมการสำหรับฟังก์ชันเดิม คือ

$$y(x) = C\exp\left[\int^x v(t)dt\right]$$

2.3 ผลเฉลยอนุกรมกำลัง

ในหัวข้อที่ 2.2.3 จะเห็นได้ว่าหากเราทราบผลเฉลยของ SOLDE ค่าหนึ่งแล้วผลเฉลยที่สองที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อผลเฉลยแรกสามารถหาได้โดยการอินทิเกรต หากเราทราบทั้ง 2 ผลเฉลย ผลเฉลยเฉพาะของ ISOLDE สามารถคำนวณได้จากการอินทิเกรต เราจึงเพียงต้องการทราบผลเฉลยค่าเดียวเท่านั้นของ HSOLDE

การหาค่าผลเฉลยของ HSOLDE ที่มีประโยชน์มากวิธีหนึ่งคือการกำหนดในรูปแบบ**ของอนุกรมกำลัง** (power series) อย่างไรก็ตาม การกำหนดในรูปแบบเช่นนี้อาจประสบปัญหาเกี่ยวกับ**ภาวะเอกฐาน** (singularity) และการกระจายรอบ ๆ จุดเอกฐาน (singular point) **ของฟังก์ชัน** ดังนั้นในขั้นต้นเราจะกล่าวถึง ภาวะเอกฐานและจุดเอกฐานนี้สักเล็กน้อยก่อน

2.3.1 ภาวะเอกฐานและจุดเอกฐาน

พิจารณา HSOLDE ตามสมการ (2.12) คือ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.34}$$

ถ้าฟังก์ชัน p(x) และ q(x) ยังคงอันตะ (finite) ที่ $x = x_0$ จุด $x = x_0$ จึงเป็น**จุดสามัญ** (ordinary point) ถ้า p(x) หรือ q(x) หรือทั้งสองฟังก์ชัน**ลู่ออก** (diverge) เมื่อ $x \to x_0$ เราเรียกจุด x_0 ว่าจุด**เอกฐาน** (singular point)

ฟังก์ชัน p(x) และ q(x) ที่ยังคงอันตะที่ $x = x_0$ หรือในย่านใกล้เคียง (neighborhood) กับจุดนี้เรียกว่า **ฟังก์ชันวิเคราะห์** (analytic function) **หรือฟังก์ชันปรกติ** (regular function) เมื่อเรากล่าวว่า**ฟังก์ชัน** f(x) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด x_0 เราหมายถึง **ฟังก์ชันนี้**สามารถกระจายใน**อนุกรมเทย์เลอร์** (Taylor series) ได้คือ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(x - x_0)^n \tag{2.35}$$

ซึ่งลู่เข้า (converge) ในย่านใกล้เคียงของจุด x_0 ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณใดถ้าเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุก ๆ จุดในบริเวณนั้น ดังนั้น เราสมมติว่า p(x) และ q(x) สามารถกระจายในอนุกรมเทย์เลอร์ซึ่งลู่เข้า ยกเว้นทั้งสองฟังก์ชันไม่สามารถกระจายรอบจุดพิเศษคือ x= a ซึ่งเป็นโพล

(pole) ของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน (โดยอาจเป็นโพลอันดับหนึ่ง เช่น $1/(x-a)$ หรือโพลอันดับสอง เช่น $1/(x-a)^2$ เป็นต้น)

จาก HSOLDE ข้างต้น เราอาจแยกจุดเอกฐานออกเป็น 2 ชนิด คือ

1. ถ้าทั้ง p(x) หรือ q(x) ลู่ออกเมื่อ $x \to x_0$ แต่ $(x-x_0)p(x)$ และ $(x-x_0)^2 q(x)$ ยังคงอันตะหรือเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์เมื่อ $x \to x_0$ ดังนั้น $x = x_0$ เรียกว่า **จุดเอกฐานปรกติ** (regular or nonessential singular point)

2. ถ้า p(x) ลู่ออกเร็วกว่า $1/(x-x_0)$ ทำให้ $(x-x_0)p(x)$ เข้าใกล้อนันต์เมื่อ $x \to x_0$ หรือเมื่อ q(x) ลู่ออกเร็วกว่า $1/(x-x_0)^2$ ทำให้ $(x-x_0)^2 q(x)$ เข้าใกล้อนันต์เมื่อ $x \to x_0$ ดังนั้น จุด $x = x_0$ เรียกว่า **จุดเอกฐานไม่สม่ำเสมอ** (irregular or essential singular point)

นิยามเหล่านี้ใช้ได้สำหรับทุกค่าอันตะของ x_0 การวิเคราะห์ที่จุด $x \to \infty$ จะคล้ายกับกรณีฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน (z) กล่าวคือ เราให้ $x = 1/z$ แล้วนำไปแทนค่าลงในสมการเชิงอนุพันธ์ หลังจากนั้นให้ $z \to 0$ โดยการแปลงตัวแปรในอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy(z^{-1})}{dz}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy(z^{-1})}{dz} = -z^2\frac{dy(z^{-1})}{dz}$$

และ

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{dy(x)}{dx}\right]\frac{dz}{dx} = (-z^2)\left[-2z\frac{dy(z^{-1})}{dz} - z^2\frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2}\right]$$

$$= 2z^3\frac{dy(z^{-1})}{dz} + z^4\frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2}$$

นำผลที่ได้นี้ไปใช้กับสมการ (2.34) ทำให้สมการดังกล่าวกลายเป็น

$$z^4\frac{d^2y}{dz^2} + \left[2z^3 - z^2p(z^{-1})\right]\frac{dy}{dz} + q(z^{-1})y = 0$$

สมบัติต่าง ๆ ที่ $x = \infty$ หรือ $z = 0$ จึงขึ้นกับสัมประสิทธิ์ $\left[2z^3 - z^2p(z^{-1})\right]/z^4$ และ $q(z^{-1})/z^4$ เมื่อ $z \to 0$ หากทั้งสองส่วนนี้ยังคงอันตะ จุด $x = \infty$ จะเป็นจุดสามัญ และหากทั้งสองส่วนลู่ออกไม่เร็วไปกว่า $1/z$ และ $1/z^2$ ตามลำดับ จุด $x = \infty$ จะเป็นจุดเอกฐานปรกติ หากไม่เป็นไปตามนี้จะกลายเป็นจุดเอกฐานไม่สม่ำเสมอ

ตัวอย่างเช่นสมการเบสเซล $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ จะมี $p(x) = 1/x$ และ $q(x) = 1 - n^2/x^2$ ดังนั้น จุด $x = 0$ จึงเป็นจุดเอกฐานปรกติ และจุด $x = \infty$ เป็นจุดเอกฐานไม่สม่ำเสมอ สำหรับสมการอื่น ๆ จะมีจุดเอกฐานที่ต่างกันไปดังแสดงในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 จุดเอกฐานของสมการต่าง ๆ ที่ควรทราบ

สมการ	จุดเอกฐาน ปรกติ $x =$	จุดเอกฐาน ไม่สม่ำเสมอ $x =$
1. Hypergeometric $x(x-1)y'' + [(1+a+b)x - c]y' + aby = 0.2$	$0, 1, \infty$	-
2. Legendre[a] $(1-x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell+1)y = 0.$	$-1, 1, \infty$	-
3. Chebyshev $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$	$-1, 1, \infty$	-
4. Confluent hypergeometric $xy'' + (c-x)y' - ay = 0.$	0	∞
5. Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$	0	∞
6. Laguerrea $xy'' + (1-x)y' + ay = 0.$	0	∞
7. Simple harmonic oscillator $y'' + \omega^2y = 0.$	-	∞
8. Hermite $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0.$	-	∞

[a] The associated equations have the same singular points.

จากตารางจะเห็นได้ว่า 3 สมการแรกมีจุดเอกฐานปรกติ 3 จุด สมการแรกมีผลเฉลยที่กำหนดเป็นแบบบัญญัติ (canonical form) ส่วนอีก 2 สมการมีผลเฉลยที่กำหนดในเทอมของฟังก์ชันของผลเฉลยสมการแรกนี้

สำหรับสมการที่ 4 คือ สมการที่คล้อยตามสมการไฮเพอร์จีออเมตริก (confluent hypergeometric equation) จะมีรูปแบบบัญญัติของ SOLDE ที่มีจุดเอกฐานปรกติ 1 จุด และจุดเอกฐานไม่สม่ำเสมออีก 1 จุด ความจริงสมการนี้สามารถหาได้จากสมการไฮเพอร์จีออเมตริก คือสมการแรกด้วยการกำหนดให้ $bx = z$ ดังนั้น

$$\frac{z}{b}\left(\frac{z}{b}-1\right)b^2\frac{d^2y}{dz^2}+\left[(1+a+b)\frac{z}{b}-c\right]b\frac{dy}{dz}+aby=0$$

เมื่อ $b \to \infty$ สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$-z\frac{d^2y}{dz^2}-(c-z)\frac{dy}{dz}+ay=0$$

ซึ่งด้วยค่าตัวประกอบร่วมคือ -1 ก็คือ สมการที่คล้อยตามสมการไฮเพอร์จีออเมตริกนั่นเอง การแปลงช่วยทำให้เรารวมจุดเอกฐานปรกติ 2 จุดคือ ที่ $x = 0$ และ $x = 1$ เข้าเป็นจุดเอกฐานปรกติเพียงจุดเดียว คือ $z = 0$ แล้วเปลี่ยนภาวะเอกฐานที่อนันต์จากจุดเอกฐานปรกติไปเป็นจุดเอกฐานไม่สม่ำเสมอ

2.3.2 การกระจายรอบจุดเอกฐานปรกติ

เราทราบว่าใกล้ ๆ จุดสามัญและจุดเอกฐานปรกติเราสามารถหาผลเฉลยอนุกรมกำลัง 2 ค่าที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันได้ในรูปแบบ

$$(x-x_0)^{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

สมมติผลเฉลย 2 ค่าดังกล่าวที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันของสมการ (2.34) คือ $y_1(x)$ และ $y_2(x)$ เราสามารถสร้างผลเฉลยที่ 3 จาก 2 ค่าแรก คือ

$$y_3(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \tag{2.36}$$

ซึ่งสามารถกำหนดค่าและอนุพันธ์ที่จุด x_0 ได้ เราต้องการเลือกค่า A และ B ที่ทำให้

$$
\begin{aligned}
y_3(x_0) &= Ay_1(x_0) + By_2(x_0) \\
y_3'(x_0) &= Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0)
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

เนื่องจากรอนสเกียนไม่เป็นศูนย์สำหรับผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน เราสามารถแก้สมการหา A และ B ได้ โดยใช้ **หลักเกณฑ์คราเมอร์** (Cramer's rule)

เราจึงสรุปเป็นทฤษฎีบท ได้ว่า "**จะไม่มีผลเฉลยวิเคราะห์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันเกิน 2 ค่า ของสมการ (2.34) ในย่านรอบ ๆ จุด** x_0" เพราะหากเราหาผลเฉลยทั้ง 2 ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันได้แล้ว เราสามารถกำหนดผลเฉลยอื่น ๆ ได้ในเทอมของผลเฉลยทั้ง 2 นั้น

เราจึงเริ่มพิจารณาการกระจายผลเฉลยของสมการ (2.34) ในรูปอนุกรมกำลังในย่านใกล้เคียงจุดเอกฐานปรกติ x_0 ใกล้ ๆ จุดดังกล่าว p(x) และ/หรือ q(x) อาจเป็นเอกฐาน (singular) แต่ $(x-x_0)p(x)$ และ $(x-x_0)^2q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น เมื่อคูณสมการ (2.34) ด้วย $(x-x_0)^2$ จะได้

$$
(x-x_0)^2y''(x) - (x-x_0)P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0 \tag{2.38}
$$

โดยที่

$$
\begin{aligned}
P(x) = (x-x_0)p(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x-x_0)^n \\
&= p_0 + p_1(x-x_0) + p_2(x-x_0)^2 + \ldots
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
Q(x) = (x-x_0)^2q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n \\
&= q_0 + q_1(x-x_0) + q_2(x-x_0)^2 + \ldots
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

P(x) และ Q(x) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในย่านใกล้เคียงจุด x_0 จึงสามารถกระจายเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ได้ สังเกตุว่าจุดสามัญเป็นกรณีพิเศษของ $p_0 = q_0 = q_1 = 0$

เราจะหาผลเฉลยอนุกรมกำลังของสมการ (2.38) ในรูปแบบของ

$$
y(x) = (x-x_0)^{\alpha}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x-x_0)^n\right] \tag{2.41}
$$

เทอมแรกในอนุกรมกำลังภายในวงเล็บมีความเป็นบรรทัดฐานหรือปรกติ (normalized) เท่ากับหนึ่ง ซึ่งแสดงการไม่สูญเสียการวานัยทั่วไป สำหรับสมการเชิงเส้น (2.38) เราจะต้องหาค่ายกกำลัง α ซึ่งในบางครั้งไม่เป็นจำนวนเต็ม (nonintegral) แทนค่าสมการ (2.39) , (2.40) และ (2.41) ลงใน (2.38) แล้วเข้าสมการ (equate) สัมประสิทธิ์ของกำลังสืบเนื่องของ $(x - x_0)$ ให้เป็นศูนย์ จะได้

$$\alpha(\alpha - 1) + p_0\alpha + q_0 = 0 \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} &y_1\left[(\alpha+1)\alpha + p_0(\alpha+1) + q_0\right] + \alpha p_1 + q_1 = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &y_n\left[(\alpha+n)(\alpha+n-1) + p_0(\alpha+n) + q_0\right] + y_{n-1}[......] + ... = 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

สมการ (2.42) เรียกว่า indicial equation และเนื่องจากเป็นสมการกำลังสองจึงมีผลเฉลย 2 ค่า คือ α_1 และ α_2 ในแต่ละค่าของรากเราใช้แก้สมการที่เหลือคือ (2.43) เพื่อหาค่า $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ดังนั้น เราจึงได้ผลเฉลย 2 ค่าในรูปแบบของสมการ (2.41) สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ (2.38)

มีข้อที่น่าสังเกตุดังนี้ :

1. ถ้า x_0 เป็นจุดสามัญ ดังนั้น $p_0 = q_0 = q_1 = 0$ และผลเฉลยของสมการ (2.42) จะเป็น $\alpha = 0, 1$ ทำให้ผลเฉลย 2 ค่า อยู่ในรูปแบบ

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$$

ด้วยกำลัง n ที่เป็นจำนวนเต็ม ฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใกล้ ๆ $x = x_0$

2. เราสามารถพิสูจน์ได้ง่ายว่าสำหรับ p(x) และ q(x) จะเป็นเอกฐานมากกว่าที่เราสมมติข้างต้น กล่าวคือ สำหรับการกระจายรอบ ๆ จุดเอกฐานไม่สม่ำเสมอ เทอม $\alpha(\alpha - 1)$ จะไม่ปรากฏในสมการ (2.42) ดังนั้น สมการนี้จึงมีรากเพียงค่าเดียวเราจึงหาผลเฉลยเพียงค่าเดียวตามรูปแบบที่สมมติไว้นี้ อย่างไรก็ตาม การคำนวณค่าที่จุดเอกฐานไม่สม่ำเสมอค่อนข้างจะยุ่งยากพอสมควร

3. แม้ว่าในกรณีจุดเอกฐานปรกติก็ตาม ก็ยังมีความยุ่งยากเช่นกันหากรากของสมการ (2.42) ไม่เป็นศูนย์หรือจำนวนเต็ม ถ้ารากทั้งสองมีค่าเท่ากันก็จะให้ผลเฉลยเพียงค่าเดียว และถ้า $(\alpha_1 - \alpha_2) = n$ เป็นจำนวนเต็มค่าบวก และ α_1 สอดคล้องกับสมการ (2.42) ดังนั้น

$$(\alpha_2 + n)(\alpha_2 + n - 1) + p_0(\alpha_2 + n) + q_0 = 0$$

ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ y_n ในสมการ (2.43) จึงเป็นไปไม่ได้ที่จะแก้สมการหาค่า y_n ได้ หากเทอมอื่น ๆ ในสมการไม่เท่ากับศูนย์ สมการจะให้ค่า $y_n = \infty$ ทำให้ขั้นตอนการคำนวณไม่ถูกต้อง กรณีเช่นนี้ α_1 เท่านั้นจะให้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ และหากเทอมอื่น ๆ ในสมการเป็นศูนย์ y_n ไม่อาจกำหนดได้ กรณีเช่นนี้ เราสามารถหาผลเฉลย 2 ค่า ของสมการเชิงอนุพันธ์ อนุกรมที่สมนัยกับ α_2 จะมีค่าคงตัวใด ๆ y_n ที่หากคูณกับผลรวมของผลเฉลยจะสมนัยกับ α_1 จุดสามัญเป็นตัวอย่างของกรณีที่สองนี้

4. เนื่องจากอนุกรมในวงเล็บ [....] ของสมการ (2.41) ลู่เข้าและเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในย่านใกล้เคียงจุด x_0 แฟกเตอร์ $(x-x_0)^{\alpha}$ จึงมีภาวะเอกฐาน สำหรับ α ที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม

สำหรับการหาผลเฉลยที่สองเราจะใช้วิธีเดียวกับที่เคยกล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 2.2.3 แต่เราจะเน้นไปที่ผลเฉลยใกล้ ๆ จุดเอกฐานปรกติเมื่อรากของสมการ (2.42) ไม่เป็นศูนย์หรือจำนวนเต็ม เมื่อใช้สมการ (2.39) ซึ่งขึ้นกับข้อสมมุติที่ว่า x_0 เป็นจุดเอกฐานปรกติ จะได้

$$p(x') = \frac{P_0}{x'-x_0} + p_1 + p_2(x'-x_0)+\ldots$$

$$\int_{x_1}^{x} p(x')dx' = p_0 \ell n(x-x_0) + p_1(x-x_0) + p_2(x-x_0)^2/2 + C$$

$$(C = \text{const})$$

$$W(x) = \frac{C}{(x-x_0)P_0}\exp\left[-p_1(x-x_0) - p_2(x-x_0)^2/2+\ldots\right]$$

นอกจากนี้เรายังได้ค่า $y_1(x)$ เป็น

$$y_1(x) = (x-x_0)^{\alpha_1}\left[1+\sum_n y_n(x-x_0)^n\right] \tag{2.44}$$

โดยที่ α_1 เป็นรากที่มีค่ามากกว่าของสมการ (2.42) เมื่อใช้ค่าเหล่านี้หาค่าผลเฉลยที่สองตามที่เคยกล่าวไว้แล้วจะได้

$$y_2(x) = C\cdot y_1(x)\int_{x_1}^{x} dx' \frac{1}{(x'-x_0)^{P_0+2\alpha_1}} f(x')$$

โดยที่ $f(x')$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่สามารถกระจายออกเป็น

$$f(x') = 1 + \sum_{n} f_n (x' - x_0)^n$$

จากสมการ (2.42) จะเห็นว่าผลบวกของรากทั้งสองคือ $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - p_0$ ดังนั้น

$$p_0 + 2\alpha_1 = 1 + s \qquad s = \alpha_1 - \alpha_2$$

เมื่อใช้การกระจายของ $f(x')$ ข้างต้น จะทำให้ผลเฉลยที่สอง $y_2(x)$ กลายเป็น

$$y_2(x) = C \cdot y_1(x)\left[-\frac{1}{s}\frac{1}{(x-x_0)^s} - \frac{f_1}{s-1}\frac{1}{(x-x_0)^{s-1}} + \ldots + f_s \ell n(x - x_0) + f_{s+1}(x - x_0) + \ldots + C_1\right]$$

$$= Af_s y_1(x)\ell n(x - x_0) + (x - x_0)^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} g_n (x - x_0)^n \tag{2.45}$$

ในกรณีที่ $\alpha_1 = \alpha_2$ เทอมสุดท้ายของสมการ (2.45) นี้จะถูกแทนที่โดย

$$(x - x_0)^{\alpha_1 + 1} \sum_{n=0}^{\infty} g_n (x - x_0)^n$$

ซึ่งช่วยเพิ่มค่าผลคูณของผลเฉลย $y_1(x)$ นัยของสมการ (2.45) คือการบอกให้เราทราบรูปแบบของผลเฉลยนั่นเอง การสมมุติการกระจายตามสมการ (2.41) จึงใช้ไม่ได้ เพราะเราไม่ได้รวมเทอม $y_1(x)\ell n(x - x_0)$ เข้าไป ขั้นตอนในการดำเนินการจึงควรเป็นดังนี้คือ เราต้องหาผลเฉลย $y_1(x)$ ก่อน ต่อจากนั้นจึงค่าค่อยหา $y_2(x)$ แล้วแทนค่าอนุกรมตามรูปแบบของสมการ (2.45) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ แล้วจึงหาค่าสัมประสิทธิ์ g_n ที่สอดคล้องกับสมการดังกล่าว

ที่กล่าวมาทั้งหมดในหัวข้อนี้เป็นเพียงแนวทางในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในกรณีที่ p(x) และ q(x) ของสมการ (2.34) มีภาวะเอกฐาน การหาผลเฉลยดังกล่าวที่มีรูปแบบพิเศษและแนวทางในการคำนวณจะได้กล่าวอีกครั้งในเรื่องของผลเฉลยเชิงซ้อนของบทที่ 3

2.3.3 วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ : ระเบียบวิธีโฟรเบนิอุส

การหาผลเฉลยของสมการ (2.34) หรือ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

โดยที่ p(x) และ q(x) เป็นค่าจริงและเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งหมายความว่า p(x) และ q(x) สามารถกระจายเป็นอนุกรมกำลังที่ลู่เข้าในช่วง (a, b) ได้ ขั้นตอนในการหาผลเฉลยจะใช้วิธีที่เรียกว่า **วิธีเทียบสัมประสิทธิ์** (method of undetermined coefficient) หรือที่รู้จักกันโดยทั่วไปว่า **ระเบียบวิธีโฟรเบนิอุส** (Frobenius method)

ขั้นตอนดังกล่าวจะเริ่มจากการสมมติให้ฟังก์ชัน p(x) และ q(x) กระจายในรูปแบบ

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \tag{2.46}$$

และ**ผลเฉลยลองสุ่ม** (trial solution) กระจายเป็นอนุกรมกำลัง

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \tag{2.47}$$

นำผลการกระจายเหล่านี้แทนค่าลงใน SOLDE ข้างต้น แล้วให้สัมประสิทธิ์ในรูปกำลังของ x ทางซ้ายมือของสมการเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^k$$

และ

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kc_{k+1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)c_{k+2} x^k$$

ดังนั้น

$$p(x)y' = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1} x^k a_m x^m$$

$$= \sum_{k,m} (k+1)a_m c_{k+1} x^{k+m}$$

ให้ $k+m \equiv n$ ดังนั้นหนึ่งในผลบวกคือ m จะต้องไม่มีค่าเกิน n ทำให้

$$p(x)y' = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(n-m+1)a_m c_{n-m+1}\right] x^n$$

และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$q(x)y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(b_m c_{n-m}\right) x^n$$

แทนค่าผลบวกเหล่านี้ และอนุกรมสำหรับ y'' ใน SOLDE จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{(n+1)(n+2)c_{n+2} + \sum_{m=0}^{n} [(n-m+1)a_m c_{n-m+1} + b_m c_{n-m}]\right\} x^n = 0$$

ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ x **เนื่องจากทุกสัมประสิทธิ์ของกำลังของ x จะต้องเป็นศูนย์** ดังนั้น

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} = -\sum_{m=0}^{n} [(n-m+1)a_m c_{n-m+1} + b_m c_{n-m}] \qquad n \geq 0$$

หรือ

$$c_{n+1} = -\frac{\sum_{m=0}^{n-1} [(n-m)a_m c_{n-m} + b_m c_{n-m-1}]}{n(n+1)} \qquad n \geq 1 \tag{2.48}$$

หากเราทราบ c_0 และ c_1 เช่นจากเงื่อนไขขอบ เราสามารถกำหนด c_n เมื่อ $n \geq 2$ ได้จากสมการ (2.48) ยังผลให้ทราบการกระจายค่า y ในรูปอนุกรมกำลังนั่นเอง

เราจึงอาจสรุปเป็น**ทฤษฎีบท**ได้ว่า "สำหรับ SOLDE ที่มีรูปแบบ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ด้วยฟังก์ชันที่เป็นสัมประสิทธิ์เชิงวิเคราะห์ตามสมการ (2.46) จะมีผลเฉลยที่เป็นอนุกรมกำลังตามสมการ (2.47) ที่สอดคล้องกับ SOLDE สำหรับแต่ละค่าของ c_0 และ c_1"

ทฤษฎีบทที่กล่าวนี้ไม่ได้บอกให้เราทราบเกี่ยวกับการลู่เข้าของฟังก์ชันเลย ตัวอย่างของสมการ $x^2y' - y + x = 0$ ถ้าให้ $y = \sum c_n x^n$ ดังนั้น $y' = \sum c_{n+1}(n+1)x^n$ เมื่อแทนค่ากลับเข้าไปในสมการเชิงอนุพันธ์ แล้วเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า $c_0 = 0,\quad c_1 = 1$ และ

$$(n+1)c_{n+1} = c_{n+2} \qquad n \geq 0$$

ดังนั้น เราจึงมี **ความสัมพันธ์เวียนเกิด** (recurring relation)

$$nc_n = c_{n+1} \qquad n \geq 1$$

ผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวคือ $c_n = (n-1)!$ ซึ่งทำให้

$$y(x) = x + x^2 + (2!)x^3 + (3!)x^4 + \ldots + (n-1)!x^n + \ldots$$

อนุกรมไม่ลู่เข้าสำหรับค่า x ใด ๆ

อย่างไรก็ตาม SOLDE โดยปรกติที่มีผลเฉลยเป็นแบบ (2.47) จะลู่เข้าเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ลองศึกษาจากสมการต่อไปนี้ :

สมการเลอจองด์ : $$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{\lambda}{1-x^2}y = 0 \qquad (2.49)$$

โดยที่ λ เป็นค่าคงตัว สำหรับ $|x| < 1$ ทั้ง $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และ

$$p(x) = -2x\sum_{m=0}^{\infty}(x^2)^m = \sum_{m=0}^{\infty}(-2)x^{2m+1}$$

$$q(x) = \lambda\sum_{m=0}^{\infty}(x^2)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\lambda x^{2m}$$

ดังนั้น

$$a_m = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า} \quad m = \text{ เลขคู่} \\ -2 & \text{ถ้า} \quad m = \text{ เลขคี่} \end{cases}$$

$$b_m = \begin{cases} \lambda & \text{ถ้า} \quad \imath = \text{ เลขคู่} \\ 0 & \text{ถ้า} \quad = \text{ เลขคี่} \end{cases}$$

หากเราแทนค่า a_m และ b_m นี้ลงในสมการ (2.48) เราจะได้ c_{n+1} สิ่งที่เราต้องพิจารณาอีกต่อไปคือเมื่อ n เป็นเลขคู่และเลขคี่

ถ้าให้ $n = 2j+1$ สำหรับจำนวนเต็ม j ใด ๆ ดังนั้นสมการ (2.48) จะให้

$$(2j+1)(2j+2)c_{2j+2} = \sum_{m=0}^{j} (4j-4m-\lambda)c_{2(j-m)}$$

และถ้า j เปลี่ยนไปเป็น $j+1$ จะให้

$$\begin{aligned}(2j+3)(2j+4)c_{2j+4} &= \sum_{m=0}^{j+1} (4j+4-4m-\lambda)c_{2(j+1-m)} \\ &= (4j+4-\lambda)c_{2j+2} + \sum_{m=1}^{j+1} (4j+4-4m+\lambda)c_{2(j+1-m)} \\ &= (4j+4-\lambda)c_{2j+2} + \sum_{m=0}^{j} (4j-4m-\lambda)c_{2(j-m)} \\ &\qquad \text{(และเมื่อเปลี่ยนครรชนีดัมมี)} \\ &= (4j+4-\lambda)c_{2j+2} + (2j+1)(2j+2)c_{2j+2} \\ &= \left[4j+4-\lambda+(2j+1)(2j+2)\right]c_{2j+2}\end{aligned}$$

ต่อไปให้ $2j+2 \equiv k$ ดังนั้น

$$(k+1)(k+2)c_{k+2} = [k(k+1)-\lambda]c_k$$

หรือ

$$c_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+1)(k+2)}c_k \qquad \text{(สำหรับ k ที่เป็นเลขคู่และเลขคี่)}$$

ดังนั้นเราจึงเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดของสมการเลอจองด์เป็น

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)}c_n \tag{2.50}$$

สำหรับ c_0 และ c_1 ใด ๆ เราจะได้ผลเฉลยที่เป็นอิสระต่อกัน 2 ค่า คือผลเฉลยที่เป็นกำลังเลขคู่และเลขคี่ของ x และเมื่อทดสอบด้วยอัตราส่วน

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+2}x^{n+2}}{c_n x^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)}x^2 = x^2$$

แสดงว่าอนุกรมลู่ออกสำหรับ $x=\pm 1$ เว้นเสียแต่ $\lambda=\ell(\ell+1)$ สำหรับจำนวนเต็มค่าบวก ℓ บางค่า ในกรณีเช่นนี้อนุกรมอนันต์ (infinite series) จะกลายเป็นพหุนามที่เรียกว่า **พหุนามเลอจองด์**

สัมประสิทธิ์ c_{n+2} ที่ได้ข้างต้นนี้เกิดจากการใช้สมการ (2.48) ซึ่งได้จากการใช้สมการ (2.47) ในบางกรณี การใช้สมการ (2.46) จะเป็นวิธีการที่ดีกว่าการใช้สมการ (2.47)

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ c_{n+2} ในสมการ (2.50) เพิ่มค่า n ทีละ 2 ดังนั้น เราจึงแบ่งสัมประสิทธิ์ออกเป็น 2 กลุ่ม คือ

กลุ่มเลขคู่ : $c_0 \to c_2 = c_0\left(\frac{-\lambda}{2}\right) \to c_4 = c_2\left(\frac{6-\lambda}{12}\right) \to c_6 \; ....$

กลุ่มเลขคี่ : $c_1 \to c_3 = c_1\left(\frac{2-\lambda}{6}\right) \to c_5 = c_3\left(\frac{12-\lambda}{20}\right) \to c_7 \; ....$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการเลอจองด์ตามสมการ (2.49) จึงแยกออกเป็น

$$\begin{aligned} y_{even}(x) &= 1-\frac{\lambda}{2}x^2+\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda-6}{12}\right)x^4+\ldots \\ y_{odd}(x) &= x+\frac{2-\lambda}{6}x^3+\left(\frac{2-\lambda}{6}\right)\left(\frac{12-\lambda}{20}\right)x^5+\ldots \end{aligned} \tag{2.51}$$

กรณีพิเศษที่มีความสำคัญเกิดขึ้นเมื่อ

$$\lambda = \lambda_\ell \equiv \ell(\ell+1) \qquad \ell = 0,1,2,\ldots$$

สำหรับแต่ละค่าของกรณีพิเศษนี้ หนึ่งในสองกลุ่มของกลุ่มสัมประสิทธิ์เลขคู่และเลขคี่ c_{n+2} จะรู้จบ (terminate) ที่ c_ℓ เพราะ

$$c_{\ell+2} = c_\ell \frac{\ell(\ell+1)-\lambda_\ell}{(\ell+1)(\ell+2)} = 0 = c_{\ell+4} = \ \ldots$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง กลุ่มเลขคู่รู้จบเมื่อ ℓ เป็นเลขคู่ ในขณะที่กลุ่มเลขคี่รู้จบเมื่อ ℓ เป็นเลขคี่ **ผลเฉลยตามสมการ (2.51) จึงกลายเป็นพหุนามเลอจองด์ระดับขั้น (degree) ℓ หรือ** $P_\ell(x)$ อย่าลืมว่าระดับขั้นของพหุนามเป็นค่ากำลังสูงสุดของพหุนาม พหุนามเลอจองด์เกิดขึ้นบ่อยครั้งในคณิตศาสตร์ที่เกิดจากการเลือกค่าคงตัวใด ๆ ของการคูณหรือ c_ℓ ที่ให้ $P_\ell(x=1)=1$ เป็นค่ามาตรฐาน

$$\begin{aligned} &P_0(x) = 1 && P_1(x) = x \\ &P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) && P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ &P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) && \text{เป็นต้น} \end{aligned}$$

พหุนามเลอจองด์ซึ่งเป็นอนุกรมกำลังที่อันตะ (finite) จะมีค่าอันตะสำหรับค่าของ x ที่อันตะทุกค่า ในบางกรณี พหุนามนี้อาจนิยามที่จุดเอกฐาน $x=\pm 1$ ของ SOLDE พฤติกรรมที่ $x=\pm 1$ เป็นเหตุผลหลักสำหรับการพิจารณากรณีพิเศษ $\lambda=\lambda_\ell$ เพราะเมื่อ $\lambda \neq \lambda_\ell$ ฟังก์ชันจะเป็นอนันต์ที่ $x=\pm 1$ จึงไม่สามารถใช้อธิบายสมบัติเชิงฟิสิกส์ที่จุดเหล่านี้ได้

กลุ่มอื่น ๆ ของสัมประสิทธิ์ไม่รู้จบเพราะภาวะคู่หรือคี่ (parity) ของมันจะตรงกันข้ามกับกลุ่มที่รู้จบ และไม่มีสัมประสิทธิ์ในกลุ่มเป็นศูนย์ ผลเฉลยที่สมนัยของสมการจึงยังคงเป็นอนุกรมอนันต์ อนุกรมนี้ลู่เข้าสู่ฟังก์ชันแจ่มชัด (well-defined function) สำหรับ $|x|<1$ และเรียกว่า **ฟังก์ชันเลอจองด์ชนิดที่สอง** (Legendre function of the second kind), $Q_\ell(x)$. ฟังก์ชันนี้นิยามสำหรับ $|x|>1$ อีกด้วย หาก $Q_\ell(x)$ เราหมายถึงผลเฉลยที่สองที่เป็นอิสระเชิงเส้นของสมการ (2.49) อย่างไรก็ตามฟังก์ชันนี้ไม่ได้เกิดจากผลเฉลย (2.47) ซึ่งไม่ลู่เข้าสำหรับ $|x|>1$ แต่อาจคำนวณโดยวิธีที่เคยกล่าวแล้วในหัวข้อที่ 2.2.3 หรือโดยอนุกรมโฟรเบนิอุสในรูปกำลังผกผันของ x ที่จุดเอกฐาน $x=\pm 1$ ฟังก์ชัน $Q_\ell(x)$ จะเป็นอนันต์

สมบัติของพหุนามเลอจองด์ $P_\ell(x)$ ที่จุดเอกฐาน $x=\pm 1$ ของสมการ (2.49) มีความสำคัญต่อปัญหาค่าเจาะจงมาก สมการค่าเจาะจงในคณิตศาสตร์เกี่ยวข้องกับสมการทั่วไปสำหรับปริมาณที่ไม่รู้ค่า y(c) ในรูปแบบ

$$\hat{L}y(c) = cy(c)$$

โดยที่ $\hat{L}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นที่สอดคล้องกับสมบัติเชิงเส้นที่กล่าวแล้วในหัวข้อที่ 2.2.1 และ c เป็นค่าคงตัวที่เป็นสเกลาร์ บางครั้งสมการค่าเจาะจงข้างต้นอาจไม่มีผลเฉลยเว้นเสียแต่ว่า $c = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นเซตหนึ่งของค่าเจาะจง ซึ่งเป็นสมการค่าเจาะจงในรูปเมทริกซ์

ถ้า $\hat{L}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ของตัวแปร x ผลเฉลยจึงเป็นฟังก์ชันของ x และสมการค่าเจาะจงข้างต้นควรเขียนเป็น

$$\hat{L}(x)y(x;c) = cy(x;c)$$

มีความเป็นไปได้ที่ y(x;c) สำหรับค่าอันตะ c ใด ๆ ยกเว้นที่จุดเอกฐานของสมการซึ่งเป็นอันตะเมื่อ $c = c_\ell (\ell = 0,1,2,\ldots)$ เท่านั้นที่เป็นเซตของค่าเจาะจงนอกจากนี้ยังมีความเป็นไปได้ที่ y(x;c) นิยามที่ทุกแห่งสำหรับทุกค่า c แต่เซตของค่าเจาะจง $c = c_i$ เท่านั้นที่ทำให้ฟังก์ชัน $y(x;c = c_i)$ มีสมบัติตามที่เราต้องการซึ่งเป็นสภาวะสำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ปรากฏในอนุกรมฟูเรียร์ สำหรับช่วง $-\pi \le x \le \pi$ กรณีเช่นนี้เราสนใจที่ฟังก์ชันเจาะจงที่เป็นคาบใน x ด้วยคาบ 2π สมการค่าเจาะจง $\hat{L}(x)y(x;c) = cy(x;c)$ ที่ผลเฉลยเลือกจากการกำหนดเงื่อนไข $c = c_i (i = 0,1,2,\ldots)$ เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ค่าเจาะจง** (differential eigenvalue equation) แต่ละค่าของ c_i เหล่านี้เรียกว่า **ค่าเจาะจง** (eigenvalue) และผลเฉลย $y(x;c_i)$ ที่สมนัยกัน เรียกว่า **ฟังก์ชันเจาะจง** (eigenfunction)

เนื่องจากค่าเจาะจงของทั้งพหุนามเลอจองด์และอนุกรมฟูเรียร์เป็นค่าจริง ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ที่สมนัยกันต้องเป็นเฮอร์มิเทียน (Hermitian) แนวคิดเกี่ยวกับความเป็นเฮอร์มิเทียนสำหรับตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์จะซับซ้อนกว่ากรณีสำหรับเมทริกซ์ เช่นขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบที่สอดคล้องกับฟังก์ชันเจาะจง รวมทั้งตัวดำเนินการด้วย อย่างไรก็ตาม **เนื่องจากฟังก์ชันเจาะจงของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นเฮอร์มิเทียนจะต้องเชิงตั้งฉาก** (orthogonal) หรือทำให้เป็นเชิงตั้งฉากได้ ด้วยเหตุนี้เราจึงเรียกฟังก์ชันอนุกรมฟูเรียร์ว่า **ฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก** (orthogonal functions) และเรียกพหุนามเลอจองด์ว่า **พหุนามเชิงตั้งฉาก** (orthogonal polynomials) ฟังก์ชันเชิงตั้งฉากมีประโยชน์ในการกระจายฟังก์ชันใด ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่เกี่ยวข้องกับผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือ PDE

ต่อไปเราจะศึกษาการปรากฏของ **พหุนามแฮร์มิต** (Hermite polynomial) ในฟิสิกส์ สมการชเรอดิงเงอร์หนึ่งมิติสำหรับอนุภาคในศักย์ V(x) กำหนดจากพลังงาน $E = p^2/2m + V(x)$ ซึ่งหากแทน E ด้วย $i\hbar\,\partial/\partial t$ และ p ด้วย $-i\hbar\,\partial/\partial x$ แล้วให้ตัวดำเนินการเหล่านี้กระทำบนฟังก์ชัน $\Psi(x,t)$ จะได้

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi$$

ถ้าเราแยก $\Psi(x,t) = u(x)T(t)$ เราจะได้ผลเฉลยที่ขึ้นกับเวลาเป็น

$$T(t) = \exp(-iEt/\hbar)$$

โดยที่ E เป็นพลังงานของอนุภาค และสมการสำหรับฟังก์ชันที่ขึ้นกับ x เป็น

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}V(x)u + \frac{2m}{\hbar^2}Eu = 0$$

สำหรับตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \equiv \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ ดังนั้น

$$u'' - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}x^2u + \frac{2m}{\hbar^2}Eu = 0$$

แทนค่า $u(x) = H(x)\exp(-m\omega x^2/2\hbar)$ แล้วเปลี่ยนตัวแปรใหม่เป็น $x = (1/\sqrt{m\omega/\hbar})y$ จะได้

$$H'' - 2yH' + \lambda H = 0 \qquad\qquad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \tag{2.52}$$

ซึ่งเรียกว่า **สมการแอร์มิต** (Hermite equation) ในรูปแบบปรกติ ดังนั้นเราสมมติการกระจาย

$$H(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n$$

เราจะได้

$$H'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}y^n$$

$$H''(y) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)c_{n+1}y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}y^n$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (2.52) จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)c_{n+2} + \lambda c_n\right]y^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}y^{n+1} = 0$$

หรือ

$$2c_2 + \lambda c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+3)c_{n+3} + \lambda c_{n+1} - 2(n+1)c_{n+1}\right] y^{n+1} = 0$$

กำหนดให้สัมประสิทธิ์ของกำลังของ y เท่ากับศูนย์ จะได้

$$c_2 = -\frac{\lambda}{2} c_0, \qquad c_{n+3} = \frac{2(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+3)} c_{n+1} \qquad (n \geq 0)$$

แทน n ด้วย (n - 1) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$c_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)} c_n$$

เมื่อทดสอบด้วยอัตราส่วน

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+2} x^{n+2}}{c_n x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)} x^2 = 0$$

ดังนั้น อนุกรมอนันต์ซึ่งสัมประสิทธิ์เป็นไปตามความสัมพันธ์เวียนเกิดจึงลู่เข้า สำหรับทุกค่าของ x อย่างไรก็ตาม เมื่อ $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$ อนุกรมต้องถูก**ตัดปลาย** (truncate) ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $\lambda = 2\ell$ เท่านั้น สำหรับจำนวนเต็ม ℓ บางจำนวน และในกรณีนี้เราจะได้พหุนามแอร์มิตอันดับ ℓ ผล**ของการตัดปลายคือ การเป็นควอนตัมของพลังงานตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก** กล่าวคือ

$$2\ell = \frac{2E}{\hbar\omega} - 1 \qquad \text{ดังนั้น} \quad E = (\ell + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

จะมีผลเฉลย 2 ค่า คือ ผลเฉลยแรกเป็นกำลังเลขคู่เท่านั้น และผลเฉลยที่สองเป็นกำลังเลขคี่เท่านั้น ทั้งสองชุดนี้เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ดังนั้น เมื่อเราทราบ c_0 และ c_1 เราจะได้ผลเฉลยของสมการแอร์มิตใน (2.52)

เมื่อเราใช้ระเบียบวิธีโฟรบนิอุส สำหรับสมการการแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิก

$$y'' + k^2 y = 0 \tag{2.53}$$

เราจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดเป็น

$$c_{n+2} = -\frac{k^2}{(n+1)(n+2)}c_n$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ (2.53) จะแบ่งเป็น 2 กลุ่มคือ

$$\begin{aligned} y_{even}(x) &= 1-\frac{k^2}{2!}x^2+\frac{k^4}{4!}x^4-\ldots \\ y_{odd}(x) &= x\left(1-\frac{k^2}{3!}x^2+\frac{k^4}{5!}x^4-\ldots\right) \end{aligned} \tag{2.54}$$

จากการทดสอบด้วยอัตราส่วน

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+2}x^{n+2}}{c_n x^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-k^2x^2}{(n+1)(n+2)} = 0$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั้งสองชุดลู่เข้าสู่ฟังก์ชันแจ่มชัดของ x สำหรับทุกค่าอันตะของ x ความจริงสมการ (2.54) ก็คือ **การกระจายเทย์เลอร์** ของฟังก์ชัน

$$y_{even}(x) = \cos kx \quad , \qquad y_{odd}(x) = \frac{1}{k}\sin kx$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

จากสมการ (2.54) จะเห็นว่า

$$y_{even}(-x) = y_{even}(x) \quad , \qquad y_{odd}(-x) = -y_{odd}(x)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน y_{even} จึงมีภาวะคู่ และ y_{odd} มีภาวะคี่

สำหรับผลเฉลยของ SOLDE ที่จะมีภาวะคู่หรือคี่ **ตัวดำเนินการเชิงเส้น $\hat{L}$ ต้องเป็นคู่หรือยืนยง (invariant) ภายใต้การแปลง** $x \to -x$ นั่นคือ

$$\hat{L}(-x) = \hat{L}(x)$$

เพื่อให้เห็นภาพได้ชัดขึ้น สมมติว่า $y_1(x)$ เป็นผลเฉลยของ SOLDE ดังนั้น $y_1(-x)$ ต้องเป็น ผลเฉลยของสมการ $\hat{\mathbf{L}}(-x)y(-x) = 0$ แต่ถ้าการยืนยงของ $\hat{\mathbf{L}}$ ตามสมการข้างต้นสอดคล้องด้วย เราจะได้

$$0 = \hat{\mathbf{L}}(-x)y_1(-x) = \hat{\mathbf{L}}(x)y_1(-x)$$

ดังนั้น $y_2(x) = y_1(-x)$ จะเป็นผลเฉลยของสมการ $\hat{\mathbf{L}}(x)y(x) = 0$ ด้วยเช่นกัน นอกจากนี้ถ้า $y_1(-x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อ $y_1(x)$ ดังนั้น เราสามารถสร้างผลเฉลยทั้งสองของภาวะคู่และคี่เป็น

$$y_{even}(x) = \frac{1}{2}\left[y_1(x) + y_1(-x)\right]$$

$$y_{odd}(x) = \frac{1}{2}\left[y_1(x) - y_1(-x)\right]$$

ซึ่งเป็นภาวะที่ยืนยงของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าว

สนาม (fields) ซึ่งอธิบายสมบัติเชิงฟิสิกส์ในปริภูมิ จะมีภาวะคู่หรือคี่เช่นกัน ถ้าสนามนั้นเป็นฟังก์ชันคู่หรือคี่ของ x ถ้าสนามสอดคล้องกับสมการ $\hat{\mathbf{L}}(x)y(x) = 0$ ดังนั้น ตัวดำเนินการเชิงเส้นต้องเป็นภาวะคู่ SOLDE ซึ่งมีผลเฉลยเป็นสนามจะเรียกว่า **สมการสนาม**(field equation) หรือ**สมการสถานะ** (equation of state) ในความหมายที่ผลเฉลยอธิบายสถานะของสมบัติในปริภูมิ ระบบที่สมการสนามมีตัวดำเนินการภาวะคู่เท่านั้น เรียกว่า มีการอนุรักษ์ภาวะเพราะสถานะ (หรือผลเฉลย) ของภาวะที่ถูกจำกัดสามารถหาได้

ยังมีสถานะของระบบที่มีภาวะผสมที่ไม่อาจเลี่ยงได้ ซึ่งเป็นผลจากการขาดความยืนยงของภาวะในตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการสนาม **ระบบดังกล่าวจึงไม่มีการอนุรักษ์ภาวะ ตัวอย่างของสมการที่ผลเฉลยไม่สามารถมีภาวะดังกล่าวได้คือ สมการตัวแกว่งกวัดที่มีการหน่วง (damped)**

$$y''(x) + 2\beta y'(x) + \omega_0^2 y(x) = 0$$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับสมการที่ไม่มีการอนุรักษ์ภาวะเช่นนี้ไม่อาจแยกออกเป็น 2 ชุดได้

สมการเบสเซล ;

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0 \tag{2.55}$$

ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์มีภาวะที่ยืนยง ดังนั้นจึงแยกสัมประสิทธิ์ออกเป็นกลุ่มคู่และคี่ได้ โดยมีจุดเอกฐานปรกติที่ $x = 0$ ดังนั้นผลเฉลยในรูปแบบ

$$y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (c_0 \neq 0)$$

จึงประกันการมีอยู่จริงนี้ และเมื่อเราแทนค่าลงในสมการ (2.55) indicial eqution จะเป็น

$$c_0(s^2 - m^2) = 0 \qquad \text{หรือ} \qquad s^2 - m^2 = 0$$

ซึ่งมีรากเป็น $s = \pm m$ และสัมประสิทธิ์ของ x^{s+1} หาได้จาก

$$c_1[(s+1)^2 - m^2] = 0$$

ดังนั้น $c_1 = 0$ เราจึงสนใจไปที่ค่า n ที่เป็นเลขคู่ และผลเฉลยคือ

$$y = x^{\pm m}(c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \ldots)$$

ความสัมพันธ์เวียนเกิดจะเป็น

$$\frac{c_{n+2}}{c_n} = \frac{-1}{(s+n+2)^2 - m^2} = \frac{-1}{(n+2)(2s+n+2)}$$

ผลเฉลยจึงกลายเป็น

$$y = c_0 x^s \left[1 - \frac{x^2}{(4s+1)} + \frac{x^4}{(4)(8)(s+1)(s+2)} - + \ldots\right]$$

หรือ

$$y = c_0 x^n \left[1 - \frac{n!x^2}{2^2 1!(n+1)!} + \frac{n!x^4}{2^4 2!(n+2)!} - \ldots\right]$$

ซึ่งเขียนในรูปแบบผลบวกเป็น

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c_0 \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{n!\,x^{n+2j}}{2^{2j}\,j!(n+j)!} \\
&= c_0 2^n \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{n!}{j!(n+j)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j}
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

ซึ่งก็คือ **ฟังก์ชันเบสเซล,** $J_n(x)$ $J_n(x)$ **เป็นฟังก์ชันคู่ ถ้า n เป็นเลขคู่จำนวนเต็ม และเป็นฟังก์ชันคี่ ถ้า n เป็นเลขคี่จำนวนเต็ม หาก n ไม่เป็นจำนวนเต็ม** x^n **จะไม่มีสมบัติเหล่านี้**

ที่กล่าวมาตั้งแต่ต้นนี้ เราสามารถสรุปเป็นประเด็นได้ว่า หากเรากระจายฟังก์ชันรอบ ๆ จุดสามัญหรือรอบ ๆ จุดเอกฐานปรกติ การกระจายเป็นอนุกรมกำลังจะให้ผลเฉลยอย่างน้อย 1 ค่า **และไม่ว่าเราได้ผลเฉลยหนึ่งหรือสองค่าที่ต่างกันขึ้นอยู่กับรากของ indicial equation หาก รากทั้งสองของ indicial equation มีค่าเท่ากัน เราจะได้ผลเฉลยเพียงค่าเดียว หากรากทั้งสองแตกต่างกัน เราจะได้ผลเฉลย 2 ค่าที่เป็นอิสระต่อกัน**

แนวคิดของการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่กล่าวมาทั้งหมดนี้เป็นการแก้ปัญหาเชิงวิเคราะห์ ในบทที่ 1 เราได้กล่าวถึงการได้มาซึ่งพหุนามเลอจองด์ โดยวิธีพีชคณิต (algebraic methods) เราลองใช้วิธีนี้กับการแก้ปัญหาของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกบ้าง

แฮมิลโทเนียนของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกคือ

$$
\hat{\mathbf{H}} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{2\mathbf{m}} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2
$$

โดยที่ $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar d/dx$ คือ ตัวดำเนินการโมเมนตัม เราจะหาเวกเตอร์เจาะจงและค่าเจาะจงของ $\hat{\mathbf{H}}$ ก่อนอื่นเราจะนิยามตัวดำเนินการ 2 ชนิด คือ

$$
\hat{\mathbf{a}} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x + i \frac{\hat{\mathbf{P}}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}
$$

และตัวดำเนินการผูกพัน (adjoint operator)

$$\hat{\mathbf{a}}^+ \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{\hat{\mathbf{P}}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

โดยที่ x และ $\hat{\mathbf{p}}$ เป็นเฮอร์มิเทียน และเมื่อใช้ความสัมพันธ์การสลับที่กัน

$$[x,\hat{\mathbf{p}}] = i\hbar\,\hat{\mathbf{1}}$$

โดยที่ $\hat{\mathbf{1}}$ คือ เวกเตอร์หน่วย เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$[\hat{\mathbf{a}},\hat{\mathbf{a}}^+] = \hat{\mathbf{1}}$$

และ

$$\hat{\mathbf{H}} = \hbar\omega\hat{\mathbf{a}}^+\hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\mathbf{1}}$$

เพื่อความสะดวกเราจะตัดเวกเตอร์หน่วย $\hat{\mathbf{1}}$ ออกไป นอกจากนี้เรายังได้ว่า

$$[\hat{\mathbf{H}},\hat{\mathbf{a}}] = \hbar\omega\left[\hat{\mathbf{a}}^+\hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2},\hat{\mathbf{a}}\right] = \hbar\omega[\hat{\mathbf{a}}^+,\hat{\mathbf{a}}]\hat{\mathbf{a}} = -\hbar\omega\hat{\mathbf{a}}$$

และ

$$[\hat{\mathbf{H}},\hat{\mathbf{a}}^+] = \hbar\omega\hat{\mathbf{a}}^+$$

ให้ $|\mathbf{u}_E>$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกับค่าเจาะจง E :

$$\hat{\mathbf{H}}|\mathbf{u}_E> \;=\; E|\mathbf{u}_E>$$

ดังนั้น

$$\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{a}}|u_E> \;=\; (\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{H}} - \hbar\omega\hat{\mathbf{a}})|u_E> \;=\; (E-\hbar\omega)\hat{\mathbf{a}}|u_E>$$

และ

$$\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{a}}^+|u_E> \;=\; (E+\hbar\omega)\hat{\mathbf{a}}^+|u_E>$$

แสดงว่า $\hat{a}|u_E>$ **เป็นเวกเตอร์เจาะจงของ** $\hat{\mathbf{H}}$ **ด้วยค่าเจาะจง** $E-\hbar\omega$, **และ** $\hat{\mathbf{a}}^+|u_E>$ **เป็นอีกเวกเตอร์เจาะจงของ** $\hat{\mathbf{H}}$ **ด้วยค่าเจาะจง** $E+\hbar\omega$ ด้วยเหตุนี้เราจึงเรียก $\hat{\mathbf{a}}^+$ ว่า **ตัวดำเนินการรังสรรค์**

(creation or raising operator) และเรียก $\hat{a}$ ว่า **ตัวดำเนินการประลัย** (annihilation or lowering operator) เราจึงเขียน

$$a|u_E>= c_E|u_{E-\hbar\omega}>$$

เมื่อใช้ $\hat{a}$ ซ้ำกันหลายครั้งเราจะได้สถานะที่มีพลังงานลดลงไปเรื่อย ๆ แต่จะมีลิมิตที่ค่าหนึ่งเพราะ $\hat{H}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงบวกจึงไม่อาจมีค่าเจาะจงที่เป็นลบ ดังนั้น จึงต้องมี**สถานะพื้น** (ground state), $|u_0>$ โดยที่

$$\hat{a}|u_0>= 0$$

พลังงานของสถานะพื้นหาได้ดังนี้ :

$$\hat{H}|u_0> \;=\; \left(\hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} \;+\; \frac{1}{2}\hbar\omega\right)|u_0> \;=\; \frac{1}{2}\hbar\omega|u_0>$$

เมื่อใช้ $\hat{a}^+$ ซ้ำเดิมหลายครั้งจะได้ทั้งสถานะที่เพิ่มระดับขั้นและค่าเจาะจงที่เพิ่มขึ้น เราจึงนิยาม $|u_n>$ โดย

$$\left(\hat{a}^+\right)^n|u_0>= c_n|u_n>$$

โดยที่ c_n เป็นค่าคงตัวความเป็นปรกติ พลังงานที่สอดคล้องกับ $|u_n>$ คือ

$$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$$

การหา c_n เราจะใช้สมบัติเชิงตั้งฉากปรกติของ $|u_n>$ และได้ว่า

$$|c_n|^2 = n|c_{n-1}|^2 \qquad \text{หรือ} \qquad |c_n|^2 = n!|c_0|^2$$

สำหรับ $|c_0| = 1$ ทำให้ $c_n = \sqrt{n!}$ ดังนั้น

$$|u_n> \;=\; \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a})^n|u_0>$$

ในเทอมของฟังก์ชันและตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ , $\hat{a}|u_0>= 0$ จะให้

$$\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\;x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\;\frac{d}{dx}\right)u_0(x) = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลย

$$u_0(x) = c\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

ความเป็นปรกติของ $u_0(x)$ ทำให้

$$1 = <u_0|u_0> = c^2\int_{-\infty}^{\infty}\;[u_0(x)]^2dx = c^2\left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{1/2}$$

ดังนั้น

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\omega}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

เราสามารถเขียน $|u_n>$ ข้างต้นในเทอมของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\;x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\;\frac{d}{dx}\right)^n e^{-(m\omega/2\hbar)x^2}$$

ให้ $y = \sqrt{m\omega/\hbar}\;x$ สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$u_n\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\;y\right) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}\left(y - \frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2/2}$$

จากสมการนี้และนิยามของพหุนามแอร์มิต ที่กล่าวแล้วเราจึงได้สมการทั่วไปของ $H_n(x)$ นอกจากนี้หากเราสังเกตุจาก

$$e^{y^2/2}\left(y-\frac{d}{dy}\right)e^{-y^2/2} = -e^{y^2}\frac{d}{dy}e^{-y^2}$$

และ

$$e^{y^2/2}\left(y-\frac{d}{dy}\right)^n e^{-y^2/2} = (-1)^n e^{y^2}\frac{d^n}{dy^n}e^{-y^2}$$

ซึ่งก็คือ **สูตรโรดริกส์** (Rodrigues' formula)

สมการเชิงอนุพันธ์อื่น ๆ เช่น สมการเบสเซลและ**สมการลาแกร์** (Laguerre equation) สามารถศึกษาได้โดยการใช้การวิเคราะห์เชิงซ้อน

2.4 สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์คงตัว

รูปแบบทั่วไปของ**สมการเชิงเส้นอันดับ n** (nth-order linear differential equation) หรือ **NOLDE** ที่มีสัมประสิทธิ์คงตัว คือ

$$\hat{L}[y] \equiv y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = r(x) \tag{2.57}$$

ถ้า $r(x) = 0$, เราจะได้ **HNOLDE** ซึ่งเป็นสมการเอกพันธ์ ดังนั้นเราจึงแยกการพิจารณาออกเป็น 3 กรณีคือ HNOLDE, **INOLDE** และระบบเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์คงตัว

2.4.1 กรณีสมการเอกพันธุ์

ในกรณีของสมการเอกพันธุ์หรือ HNOLDE, สมการ (2.57) จะกลายเป็น

$$\hat{L}[y] \equiv y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{2.58}$$

ซึ่งถ้ากำหนดให้ $y = e^{\lambda x}$ จะเปลี่ยนไปเป็น

$$\hat{L}[e^{\lambda x}] \equiv (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \ldots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0$$

สมการนี้จะเป็นไปได้ถ้า λ เป็นรากของ**พหุนามลักษณะเฉพาะ** (characteristic polynomial)

$$p(\lambda) \equiv \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

ซึ่งตามทฤษฎีพื้นฐานของพีชคณิตสามารถเขียนได้เป็น

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2}\ldots(\lambda - \lambda_m)^{k_m} \tag{2.59}$$

λ_j **จึงเป็นรากต่าง ๆ ของ** $p(\lambda)$ **และมีภาวะรากซ้ำ (multiplicity)** k_j

เพื่อความสะดวกเราจะใช้สัญกรณ์ $\hat{\mathbf{D}} \equiv d/dx$ และนิยามตัวดำเนินการ

$$\hat{\mathbf{L}} \equiv p(\hat{\mathbf{D}}) = \hat{\mathbf{D}}^n + a_{n-1}\hat{\mathbf{D}}^{n-1} + \ldots + a_1\hat{\mathbf{D}} + a_0$$

เนื่องจาก $\hat{\mathbf{D}} - \mu$ และ $\hat{\mathbf{D}} - \lambda$ สลับที่กันได้สำหรับค่าคงตัว μ และ λ ใด ๆ เราสามารถแยกแฟกเตอร์สมการ (2.59) ออกเป็น

$$\hat{\mathbf{L}} \equiv p(\hat{\mathbf{D}}) = (\hat{\mathbf{D}} - \lambda_1)^{k_1}(\hat{\mathbf{D}} - \lambda_2)^{k_2}\ldots(\hat{\mathbf{D}} - \lambda_m)^{k_m} \tag{2.60}$$

ในการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.58) ให้สังเกตุว่าสำหรับจำนวนเต็ม $\ell > 0$ ใด ๆ ,

$$(\hat{\mathbf{D}} - \lambda)(x^\ell e^{\lambda x}) = \ell x^{\ell-1} e^{\lambda x}$$

และโดยทั่วไป,

$$(\hat{\mathbf{D}} - \lambda)^k (x^\ell e^{\lambda x}) = \ell(\ell - 1)\ldots(\ell - k + 1) x^{\ell-k} e^{\lambda x}$$

หรือในกรณีเฉพาะ,

$$(\hat{\mathbf{D}} - \lambda)^k (x^\ell e^{\lambda x}) = 0 \qquad \text{ถ้า } k > \ell \tag{2.61}$$

ดังนั้นเซตของฟังก์ชัน $\left\{x^\ell e^{\lambda_j x}\right\}_{\ell=0}^{k_j - 1}$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ (2.58) ทั้งสิ้น

ราก λ_j โดยทั่วไปจะเป็นเชิงซ้อน ถ้าสัมประสิทธิ์ $\{a_i\}_{i=0}^{n-1}$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้น เมื่อ $x^\ell e^{\lambda x}$เป็นผลเฉลย, $x^\ell e^{\lambda^* x}$ จะเป็นผลเฉลยด้วย ถ้าเขียน $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ และใช้สมบัติความเป็นเชิงเส้นของ $\hat{\mathbf{L}}$ เราจึงสรุปว่า

$$x^\ell e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x \quad \text{และ} \quad x^\ell e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x \qquad \ell = 0,1,\ldots,k_j - 1$$

ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ (2.58):

เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่าฟังก์ชัน $x^\ell e^{\lambda_j x}$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน หรืออีกนัยหนึ่งสมการ (2.59) แสดงว่าเซต $\{x^\ell e^{\lambda_j x}\}$ โดยที่ $\ell = 0,1,\ldots,k_j - 1$ และ $j = 1,2,\ldots,m$ ประกอบด้วยสมาชิกจำนวน n ที่ลงตัว เราจึงแสดงให้เห็นว่าจะต้องมีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันอย่างน้อยจำนวน n สำหรับ HNOLDE ตามสมการ (2.58) และความจริงแล้วจะมีจำนวน n พอดีทีเดียว เราจึงสรุปเป็น**ทฤษฎีบท**ว่า "ถ้า $\{\lambda_j\}_{j=1}^{m}$ เป็นรากของพหุนามลักษณะเฉพาะของสมการ (2.58) และให้ภาวะรากซ้ำเป็น $\{k_j\}_{j=1}^{m}$ ดังนั้น ฟังก์ชัน $x^\ell e^{\lambda_j x}$ โดยที่ $\ell = 0,1,\ldots,k_j - 1$ เป็นฐานหลักของผลเฉลยของ (2.58)."

ลองพิจารณาตัวอย่างการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของ**แรงสู่ศูนย์กลาง**(central force) ซึ่งสามารถลดลงเป็นปัญหามิติเดียวได้ดังนี้ ก่อนอื่นเราให้ระนาบ xy เป็นระนาบของความเร็วเริ่มต้นของอนุภาคและแนวเชื่อมต่อกับศูนย์กลางของแรงซึ่งสมมติอยู่ที่จุดกำเนิด เนื่องจากไม่มีแรงกระทำออกจากระนาบนี้ ปัญหาจึงลดลงเหลือเพียงสองมิติ ต่อจากนั้นจึงเขียนสมการการเคลื่อนที่ในพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates) คือ

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = F(r)$$

$$mr\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2m\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

สมการที่สองอาจเขียนเป็น $\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \qquad (\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt})$
ซึ่งหมายถึง โมเมนตัมเชิงมุม $L = mr^2\dot{\theta}$ มีการอนุรักษ์ และเมื่อแทนค่ากลับลงไปในสมการแรกจะได้

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r) \qquad (\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2})$$

ให้ $u \equiv \frac{1}{r}$, ดังนั้น

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = -\left(\frac{Lu}{m}\right)^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

สมการแรกจึงกลายเป็น

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)$$

แรงสู่ศูนย์กลางตามกฎของเค็พเพลอร์ (Kepler's law) คือ

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2} \qquad \text{หรือ } F\left(\frac{1}{u}\right) = GMmu^2$$

ดังนั้น
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{GMm^2}{L^2}$$

ให้ $v = u + GMm^2 / L^2$

$$\therefore \quad \frac{d^2v}{d\theta^2} + v = 0$$

พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $\lambda^2 + 1$ ซึ่งมีรากเป็น $\lambda = \pm i$ รากของสมการข้างต้นที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน คือ $v = \sin\theta$ และ $v = \cos\theta$ ผลเฉลยทั่วไปสามารถกำหนดเป็น $v = c_1\sin\theta + c_2\cos\theta$ หรือ

$$v = A\cos(\theta - \theta_0) \equiv u + \frac{GMm^2}{L^2} \qquad u \equiv \frac{1}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) - \frac{GMm^2}{L^2}$$

ซึ่งเป็นสมการของภาคตัดกรวย (conic section) ที่ครอบคลุมกฎของเค็พเพลอร์ทั้ง 3 ข้อ

อีกตัวอย่างหนึ่งที่เรามักพบบ่อยในกลศาสตร์และทฤษฎีวงจรไฟฟ้าคือ สมการ

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by=0 \qquad a,b>0$$

พหุนามลักษณะเฉพาะของสมการคือ $p(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b$ ซึ่งมีรากเป็น

$$\lambda_1=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2-4b}) \qquad \text{และ} \qquad \lambda_2=\frac{1}{2}(-a-\sqrt{a^2-4b})$$

ขนาดของ a และ b ทำให้เราแยกออกได้เป็น 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 : หน่วงเกิน (overdamped)

กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ $a^2>4b$, สมมติให้ $r\equiv\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y(t)=e^{-at/2}(c_1e^{\gamma t}+c_2e^{-\gamma t})$$

เนื่องจาก $a>2\gamma$, ผลเฉลยจึงเริ่มจาก $y=c_1+c_2$ ที่ $t=0$ แล้วลดลงอย่างต่อเนื่อง จนกระทั่ง $y(t)\to 0$ เมื่อ $t\to\infty$

กรณีที่ 2 : หน่วงวิกฤต (critically damped)

เกิดขึ้นเมื่อ $a^2=4b$ จึงมีรากเป็นพหุคูณ ผลเฉลยทั่วไปจึงเป็น

$$y(t)=c_1te^{-at/2}+c_2e^{-at/2}$$

ผลเฉลยเริ่มจาก $y(0)=c_2$ ที่ $t=0$ ซึ่งเป็นจุดสูงสุดที่ $t=2a-c_2/c_1$ แล้วจึงลดลงแบบเอกซ์โพเนนเชียลเข้าสู่ศูนย์

กรณีที่ 3 : การแกว่งกวัดแบบหน่วง (damped oscillation)

เกิดขึ้นเมื่อ $a^2<4b$ ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่เราเห็นกันโดยทั่วไปในชีวิตประจำวัน ให้ $\omega=\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}$ ดังนั้น $\lambda_1=-a/2+i\omega$ และ $\lambda_2=\lambda^*_1$. รากของสมการเป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนและมีรูปแบบทั่วไปเป็น

$$y(t) = e^{-at/2}(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t)$$

$$\equiv Ae^{-at/2}\cos(\omega t + \alpha)$$

ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกที่มีแอมพลิจูดค่อย ๆ ลดลงคือ $Ae^{-at/2}$ โดยที่ a เรียกว่า **ค่าคงตัวการหน่วง** (damping constant)

กรณีที่ 3 นี้มักเกิดในระบบกลศาสตร์ที่เกี่ยวกับการแกว่งกวัดที่ปราศจากแรงภายนอกมากระทำตลอดเวลา ในของเหลวหนืด หรือในวงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วยความต้านทาน R, ขดเหนี่ยวนำ L และตัวเก็บประจุ C ในกรณีของการแกว่งกวัดเชิงกลศาสตร์, a = r/m และ b = k/m โดยที่ r เป็นค่าคงตัวที่เกี่ยวข้องกับแรงและความเร็ว หรือ f = rv ส่วน k คือค่าคงตัวสปริง ในกรณีของวงจร LRC, a = R/L และ b = 1/LC ดังนั้นค่าคงตัวการหน่วงจึงขึ้นกับขนาดของ R และ L ส่วนความถี่ $\omega = \sqrt{b-(a/2)^2} = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$ ขึ้นอยู่กับขนาดของ C ด้วย ในกรณีที่ $R \geq 4L/C$ วงจรจะไม่มีการแกว่งกวัด

2.4.2 กรณีสมการไม่เป็นเอกพันธุ์

ในกรณีของสมการเชิงเส้นที่ไม่เป็นเอกพันธุ์หรือ INOLDE เทอมทางขวามือของสมการคือ $r(x) \neq 0$ เช่นกรณีของการแกว่งกวัดภายใต้แรงขับเคลื่อนภายนอก เป็นต้น วิธีที่ใช้กันโดยทั่วไปคือ **การแปลงฟูเรียร์และฟังก์ชันของกรีน แต่ในที่นี้จะพิจารณากรณีที่ r(x) เป็นผลคูณของพหุนามและเอกซ์โพเนนเชียลหรือเลขชี้กำลัง** กรณีเช่นนี้จะมีผลเฉลยที่เป็นรูปแบบปิด (closed form) ซึ่งเราจะพิจารณาดังต่อไปนี้

สมมติให้

$$r(x) = \sum_k p_k(x)e^{\lambda_k x}$$

โดยที่ $p_k(x)$ เป็นพหุนาม และ λ_k เป็นค่าคงตัวเลขเชิงซ้อน ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.57) เป็นผลบวกเชิงเส้นของผลเฉลยที่เป็นฐานหลักตามทฤษฎีบทล่าสุดนี้ และผลเฉลยเฉพาะของ NOLDE เราจึงต้องหาผลเฉลยเฉพาะดังกล่าวก่อน เพราะว่า $\hat{L}$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ดังนั้น ถ้า y_1 เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $\hat{L}[y] = r_1(x)$ และ y_2 เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $\hat{L}[y] = r_2(x)$ ดังนั้น $y_1 + y_2$ จึงเป็นผลเฉลยของ $\hat{L}[y] = r_1(x) + r_2(x)$ ดังนั้นเราจึงให้

$$r(x) = p(x)e^{\lambda x}$$

โดยที่ p(x) เป็นพหุนามก็เพียงพอแล้ว เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$(\hat{\mathbf{D}}-\lambda)[e^{\lambda x}f(x)]=e^{\lambda x}f'(x)$$

ในกรณีที่ p(x) เป็นพหุนามระดับขั้น k ดังนั้น

$$(\hat{\mathbf{D}}-\lambda)(u)=e^{\lambda x}p(x)$$

มีผลเฉลยเป็น $u=e^{\lambda x}q(x)$ โดยที่ q(x) เป็นพหุนามระดับขั้น k + 1 ซึ่งเป็นปฐมฐาน (primitive) ของ p(x) ถ้า $\lambda_1 \neq \lambda$ เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่า

$$(\hat{\mathbf{D}}-\lambda_1)\left[e^{\lambda x}f(x)\right]=e^{\lambda x}\left[(\lambda-\lambda_1)f(x)+f'(x)\right] \tag{2.62}$$

ดังนั้น

$$(\hat{\mathbf{D}}-\lambda_1)(u)=e^{\lambda x}p(x) \tag{2.63}$$

จึงมีผลเฉลยในรูปแบบ $u=e^{\lambda x}q(x)$ โดยที่ q(x) เป็นพหุนามระดับขั้น k เมื่อใช้สมการ (2.62) และ (2.63) ซ้ำ ๆ กันจะนำไปสู่**ทฤษฎีบท**คือ

"NOLDE, $\hat{\mathbf{L}}[y]=e^{\lambda x}S(x)$ โดยที่ S(x) เป็นพหุนาม, มีผลเฉลยเฉพาะเป็น $e^{\lambda x}q(x)$ โดยที่ q(x) เป็นพหุนามเช่นกัน ระดับขั้นของ q(x) จะเท่ากับของ S(x) เว้นเสียแต่ $\lambda=\lambda_j$ ซึ่งเป็นรากของพหุนามลักษณะเฉพาะของ $\hat{\mathbf{L}}$ ถ้า $\lambda=\lambda_j$ มีภาวะรากซ้ำ k_j ดังนั้นระดับขั้นของ q(x) มากกว่าของ S(x) โดย k_j"

เมื่อเราทราบรูปแบบของผลเฉลยเฉพาะของ NOLDE เราสามารถหาสัมประสิทธิ์ในพหุนามของผลเฉลยโดยการแทนค่าลงใน NOLDE แล้วจับคู่กำลังของทั้งสองด้าน

ลองพิจารณาสมการ

$$y''+y=xe^{x}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบ $y(0)=0$ และ $y'(0)=1$ พหุนามลักษณะเฉพาะคือ λ^2+1 ที่มีรากเป็น $\lambda_1=i$ และ $\lambda_2=-i$ ดังนั้น ฐานหลักของผลเฉลยคือ $\{\cos x,\sin x\}$ การหาผลเฉลยเฉพาะให้เราสังเกตุว่า λ (ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ x ในส่วนของเลขชี้กำลัง) เป็น 1 ซึ่งไม่เป็นรากของทั้ง λ_1 และ λ_2 ดังนั้น

ผลเฉลยเฉพาะจึงมีรูปแบบ $q(x)e^x$ โดยที่ $q(x) = Ax + B$ มีระดับขั้น 1 ซึ่งเท่ากับกรณีของ $S(x) = x$ แทนค่า $u = (Ax+B)e^x$ ลงในสมการข้างต้นเพื่อหา A และ B,

$$u' = Ae^x + (Ax+B)e^x$$
$$u'' = 2Ae^x + (Ax+B)e^x$$

ดังนั้น

$$Axe^x + (2A+B)e^x + (Ax+B)e^x = xe^x$$

เมื่อจับคู่สัมประสิทธิ์จะได้

$$2A = 1 \quad \text{และ} \quad 2A + 2B = 0 \quad \Rightarrow A = \frac{1}{2} = -B$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปจึงเป็น

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x$$

เมื่อใช้เงื่อนไขขอบจะได้

$$0 = y(0) = c_1 - \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$
$$1 = y'(0) = c_2$$

ดังนั้น

$$y = \frac{1}{2}\cos x + \sin x + \frac{1}{2}(x-1)e^x$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยได้อย่างเดียว

แต่ถ้าหากสมการเปลี่ยนไปเป็น

$$y'' - y = xe^x$$

ในที่นี้ $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ และรากเป็น $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ ฐานหลักของผลเฉลยคือ $\{e^x, e^{-x}\}$ การหาผลเฉลยเฉพาะสังเกตุว่า $S(x) = x$ และ $\lambda = 1 = \lambda_1$ จากทฤษฎีบทแสดงว่า $q(x)$ มีระดับขั้น 2 (เพราะ λ_1 เป็นรากเชิงเดียว) ดังนั้นเราจึงลองให้ $q(x) = Ax^2 + Bx + C$ ซึ่งทำให้ $u = (Ax^2 + Bx + C)e^x$ เมื่อหาอนุพันธ์จะได้ 2 สมการ คือ $4A = 1$ และ $A + B = 0$ ดังนั้น $A = -B = \frac{1}{4}$ สังเกตุว่าเราไม่หาค่า C และ Ce^x เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ที่สมนัยกัน และเมื่อ $\hat{L}$ ดำเนินการบน u จะกำจัดเทอม Ce^x ออกไป อีกวิธีหนึ่งคือให้ผลเฉลยของสมการเป็น

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + C\right)e^x$$

เทอม Ce^x จะกลมกลืนไปกับ C_1e^x เราจึงให้ $C = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขขอบ เราจะได้ผลเฉลยได้อย่างเดียว

$$y = \frac{5}{4}\sinh x + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$$

เราอาจคิดว่าสมการไม่เป็นเอกพันธ์ $\hat{L}[y] = r(x)$ เปรียบเสมือนเครื่องกลหรือกล่องดำที่ให้ฟังก์ชัน $y(x)$ เมื่อเราป้อนฟังก์ชัน $r(x)$ เข้าไป ส่วนผกผันของ $\hat{L}$ ซึ่งเป็นตัวดำเนินการ $\hat{M}$ โดยที่ $\hat{M}[r] = u$ โดยทั่วไป $\hat{M}$ ไม่มีจริงเพราะอาจมีฟังก์ชัน $u(x)$ ที่แตกต่างจาก u สำหรับ $r(x)$ ที่กำหนด เราจึงให้ $u(x)$ เป็นฟังก์ชันเพียงอย่างเดียวสำหรับ $r(x)$ ที่กำหนดให้

ลองพิจารณาเครื่องกรองเสียงเครื่องหนึ่ง เมื่อสัญญาณซึ่งเป็นฟังก์ชัน $r(x)$ ถูกส่งเข้าไปในเครื่องกรองเสียง ฟังก์ชันที่สอง $u(x)$ ถือเป็นสัญญาณขาออก ถ้าสัญญาณขาเข้าเป็นฟังก์ชันรูปไซน์ คือ

$$r(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

ซึ่งอาจเขียนในรูปเชิงซ้อนด้วยค่า $A \equiv |b|$ และ $\arg(b) \equiv \alpha$, คือ

$$r(t) = \mathrm{Re}(be^{i\omega t})$$

โดยที่ ω เป็นความถี่เชิงมุมซึ่งเป็นค่าคงตัว และ t คือเวลาซึ่งเป็นตัวแปรอิสระ A, b และ α เป็นค่าคงตัว สมมติว่า $i\omega$ ไม่ได้เป็นรากของ $p(\lambda)$, ซึ่งเป็นพหุนามลักษณะเฉพาะของ $\hat{L}$ ทฤษฎีบทล่าสุดแนะนำว่า ผลเฉลยเฉพาะ $U = C(\omega)e^{i\omega t}$ โดยที่ $C(\omega)$ เป็นค่าคงตัวที่ขึ้นกับ ω สามารถกำหนดโดยการแทนค่าใน $\hat{L}[U] = be^{i\omega t}$:

$$\hat{L}\left[C(\omega)e^{i\omega t}\right] = be^{i\omega t} \quad \Rightarrow C(\omega) = \frac{b}{p(i\omega)}$$

เมื่อเขียน $C(\omega) = \rho(\omega)e^{i\gamma(\omega)}$, $b = Ae^{i\alpha}$ และ $p(i\omega) = R(\omega)e^{i\theta(\omega)}$
เราจะได้

$$\rho(\omega) = \frac{A}{R(\omega)} \quad \text{และ} \quad \gamma(\omega) = \alpha - \theta(\omega)$$

ผลเฉลยค่าจริง, $u(t) = \mathrm{Re}[U(t)]$ จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathrm{Re}\left[C(\omega)e^{i\omega t}\right] = \rho(\omega)\cos[\omega t + \gamma(\omega)] \\ &= \frac{A}{R(\omega)}\cos[\omega t + \alpha - \theta(\omega)] \end{aligned} \tag{2.64}$$

เราเรียก $C(\omega)$ ว่า ฟังก์ชันการถ่ายโอน (transfer function) ที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการเชิงเส้น $\hat{L}$ สมการ (2.64) แสดงว่า ขาออก u(t) มีความถี่เดียวกับขาเข้า นอกจากนี้แอมพลิจูดของ u(t) ขึ้นกับความถี่จึงอาจทำให้แอมพลิจูดขาออกมีค่ามากได้โดยปรับความถี่จนกระทั่ง $R(\omega)$ มีค่าต่ำสุด ซึ่งก็คือ เกิดการสั่นพ้องในวงจร AC นั่นเอง

ในกรณีของการแกว่งกวัดแบบหน่วง หรือ $4b > a^2$ ของหัวข้อที่ผ่านมา ถ้าให้

$$\omega_1 \equiv \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \;\equiv\; \omega_0\sqrt{1 - \frac{a^2}{4\omega_0^2}}$$

โดยที่ $\omega_0 \equiv \sqrt{b}$ เรียกว่า ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของระบบ พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ ดังนั้น

$$p(i\omega) = -\omega^2 + i\omega a + b = (\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega a$$

และ

$$R(\omega) = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 a^2}$$

$$\theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega a}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

แอมพลิจูดของสัญญาณขาออก ซึ่งบางทีเรียกว่า gain function คือ

$$\rho(\omega) = \frac{A}{R(\omega)} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 a^2}}$$

ค่าต่ำสุดของตัวหารเกิดขึ้นเมื่อ $\omega = \omega_0$ นั่นคือ แรงขับเคลื่นมีความถี่เดียวกับความถี่ธรรมชาติ ซึ่งเกิดขึ้นได้เมื่อ $\rho(\omega) = A / \omega_0 a$ แสดงว่าสัญญาณขาออกมีแอมพลิจูดสูงสุดเมื่อ a มีค่าน้อย ๆ เมื่อ $a \to 0$, แอมพลิจูดจะเป็นอนันต์ แต่ถ้า $a = 0$, ดังนั้นที่การสั่นพ้อง $i\omega_0$ จะเป็นรากของพหุนามลักษณะเฉพาะ $p(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$ ซึ่งขัดกับข้อสมมติที่ว่า $i\omega$ ไม่ได้เป็นรากของ $p(\lambda)$

เราได้พิจารณาเฉพาะผลเฉลยเฉพาะ u(t) เพราะผลเฉลยทั่วไปส่วนใหญ่

$$y(t) = Be^{-at/2}\cos(\omega_1 t + \beta) + u(t)$$

โดยที่ B และ β **เป็นค่าคงตัว จะค่อย ๆ ลดลงเหลือ** u(t) **เทอมแรกทางขวามือของสมการ ซึ่งเรียกว่า พจน์ชั่วครู่** (transient term) จะค่อย ๆ ลดลงสู่ศูนย์ อัตราการลดลงกำหนดจากค่าคงตัวเวลา 2/a ซึ่งเป็นการวัดความยาวของช่วงระหว่างแอมพลิจูดของพจน์ชั่วครู่ลดลงเหลือ 1/e เท่าของค่าเริ่มต้น

จะเห็นได้ว่าเมื่อไม่มีแรงจากการหน่วงหรือ a = 0, gain function $\rho(\omega)$ จะเป็นอนันต์สำหรับความถี่ค่าหนึ่ง ถ้า $i\omega$ เป็นรากของพหุนามลักษณะเฉพาะ ดังนั้น ทฤษฎีบทล่าสุดนี้แนะนำว่าผลเฉลยจะอยู่ในรูปแบบ $u(t) = (a_1 t + a_2)e^{i\omega t}$ ซึ่งแสดงว่าแอมพลิจูด $a_1 t + a_2$ จะกระจายเมื่อเวลาผ่านไป

ความสำคัญของสัญญาณรูปไซน์จะปรากฏเด่นชัดเมื่อเราตระหนักว่า**สัญญาณที่เป็นคาบ r(t) ใด ๆ สามารถกระจายในอนุกรมฟูเรียร์**

$$R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega t}$$

โดยที่ ω เป็นความถี่หลักมูล (fundamental frequency) และ $r(t) \equiv \mathrm{Re}[R(t)]$ สภาวะเชิงเส้นของ $\hat{L}$ บอกว่า $u(t) = \mathrm{Re}[U(t)]$ โดยที่

$$U(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega)e^{in\omega t}$$

เมื่อแทนค่าลงใน $\hat{L}[U] = R(t)$ จะได้

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega)p(in\omega)e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega t}$$

เนื่องจาก $e^{in\omega t}$ มีลักษณะเชิงตั้งฉากปรกติ เราจึงได้

$$C_n(\omega) = \frac{b_n}{p(in\omega)}$$

และ
$$u(t) = \mathrm{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n e^{in\omega t}}{p(in\omega)}\right] \tag{2.65}$$

ดังนั้น u(t) จึงเป็นคาบและมีความถี่หลักมูลค่าเดียวกับของ r(t)

2.4.3 ระบบเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์คงตัว

ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรือ **FODE** ที่มีหลายตัวแปรเช่น

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)
\end{aligned} \tag{2.66}$$

ถือว่ามีความสำคัญมากเพราะสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ใด ๆ

$$\frac{d^n y}{dt^n} = F(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}; t)$$

สามารถลดสมการลงเป็นระบบ FODE จำนวน n สมการตามสมการ (2.66) โดยให้ $x_1 = y,\ x_2 = y', \ldots, x_n = y^{(n-1)}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\
&\vdots \\
\frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n \\
\frac{dx_n}{dt} &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)
\end{aligned} \qquad (2.67)$$

เราจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดของสมการ (2.66) หรือ (2.67) แต่เราจะพิจารณารูปแบบของสมการ (2.66) ในลักษณะ F_i เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ x_j ด้วยค่าสัมประสิทธิ์ที่คงตัว

พิจารณาการหาผลเฉลยของระบบ

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n(t)
\end{aligned} \qquad (2.68)$$

เราสามารถเขียนระบบสมการ (2.68) ในรูปแบบของเมทริกซ์ โดย

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

ดังนั้น สมการ (2.68) จะกลายเป็น

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X} + \mathbf{B} \qquad (2.69)$$

ในกรณีของสมการเอกพันธ์ ซึ่ง $\mathbf{B} = 0$ ดังนั้น

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X} \qquad (2.70)$$

การหาผลเฉลยเราจะให้ $x_i(t) = c_i e^{\lambda t}$ หรือในรูปแบบของเมทริกซ์

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{C}e^{\lambda t}, \qquad C \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ (2.70) จะได้

$$\lambda \mathbf{C}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{C}e^{\lambda t}$$

หรือ

$$(\mathbf{A} - \lambda)\mathbf{C} = 0 \tag{2.71}$$

ปัญหาจึงลดลงเหลือเพียงการหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของเมทริกซ์เท่านั้น ถ้า λ_i เป็นค่าเจาะจงของเมทริกซ์ A และ $\mathbf{C}_i$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงที่สมนัยกัน ดังนั้น

$$\mathbf{X}_i(t) \equiv \mathbf{C}_i e^{\lambda_i t} \equiv \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t} \tag{2.72}$$

จึงเป็นผลเฉลยของสมการ (2.70)

ผลเฉลยเหล่านี้เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันก็ต่อเมื่อ

$$\det\left[\mathbf{X}_1(t), \ldots, \mathbf{X}_n(t)\right] \equiv \det\begin{pmatrix} c_{11}e^{\lambda_1 t} & c_{12}e^{\lambda_2 t} & \ldots & c_{n1}e^{\lambda_n t} \\ c_{12}e^{\lambda_1 t} & c_{22}e^{\lambda_1 t} & \ldots & c_{n2}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n}e^{\lambda_1 t} & c_{2n}e^{\lambda_2 t} & \ldots & c_{nn}e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

ไม่เท่ากับศูนย์ ตราบใดที่ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ มีค่าแตกต่างกัน, สิ่งเหล่านี้จะเป็นจริงเสมอ ดังนั้น ถ้า λ_i มีค่าแตกต่างกัน ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.70) คือ

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{C}_i e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{in} \end{pmatrix} e^{\lambda_i t}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะครอบคลุมกรณีค่าเจาะจงไม่ธรรมดา ทฤษฎีบทนี้กล่าวว่า "ให้ nxn เมทริกซ์ A มี λ_o เป็นค่าเจาะจงด้วยภาวะรากซ้ำ r ดังนั้น จะมีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันของ $d\mathbf{X}/dt = A\mathbf{X}$ จำนวน r ที่สมนัยกับ λ_0 ผลเฉลยเหล่านี้จะอยู่ในรูปแบบ

$$e^{\lambda_0 x}\left(\mathbf{V}_0 + x\mathbf{V}_1 + \ldots + x^k\mathbf{V}_k\right)$$

โดยที่ $k < r$ และ $\mathbf{V}_i$ เป็นเวกเตอร์ที่คงตัว"

ลองพิจารณาระบบเชิงเส้น

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 5x_2 - 4x_3 \end{aligned}$$

โดยที่ $\dot{x} = dx/dt$ ในรูปแบบเมทริกซ์, สมการเหล่านี้จะเขียนเป็น

$$\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

ค่าเจาะจงของ A คือ $\lambda_1 = -1$ ด้วยภาวะรากซ้ำ 2 และ $\lambda_2 = -2$ ด้วยภาวะรากซ้ำ 1

เวกเตอร์เจาะจงสำหรับ λ_2 คือ $a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ โดยที่ a เป็นค่าคงตัวใด ๆ สำหรับ λ_1 เราใช้ทฤษฎีบทล่าสุดและเขียนผลเฉลยในรูปแบบ

$$\mathbf{X} = e^{-t}(\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 t)$$

โดยที่ $\mathbf{V}_0$ และ $\mathbf{V}_1$ เป็นเวกเตอร์ที่คงตัว หาอนุพันธ์ของสมการจะได้

$$\dot{\mathbf{X}} = e^{-t}(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_1 t) = A\mathbf{X} = e^{-t}A(\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 t)$$

ซึ่งนำไปสู่ระบบสมการ

$$\begin{aligned} A\mathbf{V}_0 &= \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 \\ A\mathbf{V}_1 &= -\mathbf{V}_1 \end{aligned}$$

สมการที่สองของระบบเป็นสมการค่าเจาะจงที่สมนัยกับ $\lambda_1 = -1$ ดังนั้น

$$v_1 = b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

โดยที่ b เป็นค่าคงตัวใด ๆ แทนค่านี้ลงในสมการแรกของระบบแล้วเขียน $\mathbf{V}_0$ ให้เป็นเวกเตอร์แนวตั้ง (a_1, a_2, a_3) จะได้

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ b \end{pmatrix}$$

สมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นอิสระต่อกัน 2 ค่า ซึ่งสามารถเลือกให้เป็น

$$\mathbf{V}_0{}^{(1)} = b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{V}_0^{(2)} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

เราจึงได้ 2 สมการ คือ

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)}(t) &\equiv e^{-t}(\mathbf{V}_0^{(1)} + \mathbf{V}_1 t) \\ \mathbf{X}^{(2)}(t) &\equiv e^{-t}(\mathbf{V}_0^{(2)} + \mathbf{V}_1 t) \end{aligned}$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการจึงเป็น

$$\mathbf{X}(t) = C_1\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}e^{-2t} + C_2\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}t\right]e^{-t} + C_3\left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}t\right]e^{-t}$$

การแก้สมการ (2.69) ซึ่งเป็นสมการที่ไม่เป็นเอกพันธ์ เราต้องการผลเฉลยเฉพาะเพียงค่าเดียวเท่านั้น การหาผลเฉลยเฉพาะดังกล่าวเราจะ**ใช้วิธีการแปรผันค่าคงตัว** (method of variation of constants) ซึ่งต้องใช้ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน จำนวน n ค่า คือ $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ ของสมการ เอกพันธ์ และเขียน

$$\mathbf{X(t)} = C_1(t)\mathbf{X}_1(t)+\ldots+C_n(t)\mathbf{X}_n(t) \tag{2.73}$$

โดยที่ $C_i(t)$ จะต้องหาค่าให้ได้ อนุพันธ์ของสมการ (2.73) คือ

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = C_1\dot{\mathbf{X}}_1+\ldots+C_n\dot{\mathbf{X}}_n + \dot{C}_1\mathbf{X}_1+\ldots+\dot{C}_n\mathbf{X}_n$$

เมื่อใช้เมทริกซ์ A กับ (2.73) จะได้

$$A\mathbf{X} = C_1A\mathbf{X}_1+\ldots+C_nA\mathbf{X}_n$$

$$= C_1\dot{\mathbf{X}}_1+\ldots+C_n\dot{\mathbf{X}}_n$$

เพราะโดยข้อสมมติที่ว่า $\mathbf{X}_i$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ แทนค่าข้างบนนี้ลงในสมการ (2.69) จะได้

$$\dot{C}_1\mathbf{X}_1 + \dot{C}_2\mathbf{X}_2+\ldots+\dot{C}_n\dot{\mathbf{X}}_n = \mathbf{B} \tag{2.74}$$

ซึ่งเป็นระบบ n สมการโดยมีตัวไม่ทราบค่า $\dot{C}_i$ จำนวน n ค่า ซึ่งต้องมีผลเฉลยเพราะ $\mathbf{X}_i$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน แสดงว่าเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ซึ่งมีสดมภ์หรือแนวตั้งเป็นเวกเตอร์ $\mathbf{X}_i$ สามารถหา**ตัวผกผันได้** (invertible) เมื่อหา $\{\dot{C}_i\}_{i=1}^{n}$ ได้แล้ว เราสามารถอินทิเกรต $\dot{C}_i$ เพื่อหาค่า C_i ที่เป็นตัวกำหนดผลเฉลยเฉพาะ $\mathbf{X}(t)$ ในสมการ (2.73)

ในฟิสิกส์เรามักเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของตัวดำเนินการในรูปแบบ

$$\frac{d\hat{\mathbf{U}}}{dt} \quad \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{U}}(t)$$

โดยที่ $\mathbf{H}$ ไม่ขึ้นกับเวลา t เราสามารถหาผลเฉลยของสมการโดยการหาอนุพันธ์ซ้ำ ๆ และตามด้วยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ ดังนั้น

$$\frac{d^2\hat{\mathbf{U}}}{dt^2} = \hat{\mathbf{H}}\frac{d\hat{\mathbf{U}}}{dt} = \hat{\mathbf{H}}[\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{U}}(t)] = \hat{\mathbf{H}}^2\hat{\mathbf{U}}(t)$$

$$\frac{d^3\hat{\mathbf{U}}}{dt^3} = \frac{d}{dt}[\hat{\mathbf{H}}^2\hat{\mathbf{U}}(t)] = \hat{\mathbf{H}}^2\frac{d\hat{\mathbf{U}}}{dt} = \hat{\mathbf{H}}^3\hat{\mathbf{U}}(t)$$

$$\therefore \quad \frac{d^n\hat{\mathbf{U}}}{dt^n} = \hat{\mathbf{H}}^n\hat{\mathbf{U}}(t)$$

สมมติว่า $\hat{\mathbf{U}}(t)$ แจ่มชัดที่ $t=0$ ความสัมพันธ์ข้างต้นนี้กล่าวว่าทุก ๆ อนุพันธ์ของ $\hat{\mathbf{U}}(t)$ จะแจ่มชัดที่ $t=0$ ด้วย ดังนั้น เราสามารถกระจาย $\hat{\mathbf{U}}(t)$ รอบ ๆ $t=0$ ได้เป็น

$$\hat{\mathbf{U}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}t^n\left(\frac{d^n\hat{\mathbf{U}}}{dt^n}\right)_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\hat{\mathbf{H}}^n\hat{\mathbf{U}}(0)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\hat{\mathbf{H}})^n}{n!}\right)\hat{\mathbf{U}}(0) = e^{t\mathbf{H}}\mathbf{U}(0)$$

เมื่อใช้แนวคิดเช่นนี้กับสมการเวกเตอร์ (2.70) เราจะได้ **ประพจน์** ดังนี้

"ผลเฉลยทั่วไปของระบบเชิงเส้นของ $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{AX}$, โดยที่ A เป็นเมทริกซ์คงตัว , คือ

$$\mathbf{X}(t) = e^{At}\mathbf{X}(0)$$

โดยทั่วไป e^{At} ไม่อาจคำนวณได้โดยง่าย แต่เราอาจใช้ความจริงที่ว่าการคำนวณฟังก์ชัน ใด ๆ ของตัวดำเนินการ (เมทริกซ์) จะเกี่ยวข้องกับการหาเมทริกซ์ทแยงมุม , การหาตัวดำเนินการฉาย (projection operators) และอื่น ๆ อีก

บทที่ 3
สมการเชิงอนุพันธ์เชิงซ้อน

3.1 บทนำ

ในบทที่แล้วเราได้ศึกษาและคุ้นเคยกับเทคนิกการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองมาบ้างแล้ว วิธีที่มีความสำคัญและเป็นวิธีที่นำไปสู่รูปนัยของผลเฉลยคือวิธีอนุกรมกำลัง เราได้กล่าวถึงทฤษฎีบทที่ประกันการลู่เข้าของผลเฉลยของอนุกรมกำลังภายในวงกลมซึ่งมีขนาดอย่างน้อยที่สุดเท่ากับวงกลมที่เล็กที่สุดของการลู่เข้าของฟังก์ชันที่เป็นสัมประสิทธิ์ ดังนั้น การลู่เข้าของผลเฉลยจึงสัมพันธ์กับการลู่เข้าของฟังก์ชันที่เป็นสัมประสิทธิ์ สิ่งที่เราควรทราบคือ ธรรมชาติของการลู่เข้า หรือการเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ของผลเฉลย สิ่งนี้สัมพันธ์กับการ**วิเคราะห์** (analyticity) ของฟังก์ชันที่เป็นสัมประสิทธิ์หรือไม่ หากใช่จะสัมพันธ์กันอย่างไร จุดเอกฐานของสัมประสิทธิ์เป็นจุดเอกฐานของผลเฉลยด้วยหรือไม่ หากใช่, ธรรมชาติของภาวะเอกฐานจะเหมือนกันหรือไม่ ในบทนี้เราจะพยายามหาคำตอบของคำถามเหล่านี้

คำถามเกี่ยวกับการวิเคราะห์ของฟังก์ชันจะอธิบายด้วย**ระนาบเชิงซ้อน** (complex plane) ได้ดีที่สุด เหตุผลที่สำคัญของคำกล่าวนี้คือ คุณสมบัติของ**การต่อเนื่องวิเคราะห์** (analytic continuation) ซึ่งจะได้กล่าวในรายละเอียดของบทที่เกี่ยวกับ**คณิตวิเคราะห์เชิงซ้อน** (complex analysis) สมการเชิงอนุพันธ์ $du/dx = u^2$ มีผลเฉลย $u = -1/x$ สำหรับทุกค่าของ x ยกเว้นที่ $x = 0$ ดังนั้น เราจึงแยกจุด $x = 0$ ออกมาจาก**เส้นจำนวนจริง** (real line) ทำให้ได้ผลเฉลย 2 ส่วน และหากเรายังคงใช้เส้นจำนวนจริงต่อไปอีก, **เราจะไม่สามารถเชื่อมโยงบริเวณ $x > 0$ และบริเวณ $x < 0$ เข้าด้วยกันได้** ในทางตรงกันข้าม , ในระนาบเชิงซ้อน , สมการรูปแบบเดิม คือ $dw/dz = w^2$ มีผลเฉลยเชิงซ้อน $w = -1/z$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุก ๆ แห่งยกเว้นที่ $z = 0$ z ในที่นี้คือ **จำนวนเชิงซ้อน** (complex number) ซึ่งกำหนดเป็น $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ $i \equiv \sqrt{-1}$ หรือ $i^2 = -1$ **การแยกจุด $z = 0$ ในระนาบเชิงซ้อนออกไปไม่ได้ทำลายการเชื่อมโยงของบริเวณของนิยามของ w แต่อย่างใด** ดังนั้น ผลเฉลยในบริเวณ $x > 0$ สามารถต่อเนื่องวิเคราะห์ไปยังผลเฉลยในบริเวณ $x < 0$ **โดยเคลื่อนที่อ้อมรอบจุดกำเนิด**

วัตถุประสงค์ของบทนี้เพื่อค้นหาคุณสมบัติการวิเคราะห์ของผลเฉลยของ SOLDE บางสมการที่เป็นที่รู้จักกันดีในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์ โดยเราจะเริ่มจากผลจากทฤษฎีสมการเชิงอนุพันธ์เกี่ยวกับ**หลักการต่อเนื่อง** (continuation principle) คือ "ฟังก์ชันที่ได้จากการต่อเนื่องวิเคราะห์ของผลเฉลยใดๆ

ของสมการเชิงอนุพันธ์วิเคราะห์ (analytic differential equation) ไปตามวิถีใด ๆ ในระนาบเชิงซ้อนจะเป็นผลเฉลยของการต่อเนื่องวิเคราะห์ของสมการเชิงอนุพันธ์ตามวิถีเดิมนั้น"

สมการเชิงอนุพันธ์วิเคราะห์เป็นสมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ หลักการต่อเนื่องทำให้มีความเป็นไปได้ที่จะหาผลเฉลยในบริเวณหนึ่งของระนาบเชิงซ้อนแล้วต่อเนื่องวิเคราะห์ไปในระนาบเชิงซ้อนนั้น

ลองพิจารณาผลของภาวะเอกฐานของฟังก์ชันที่เป็นสัมประสิทธิ์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่มีต่อผลเฉลยของสมการอนุพันธ์นั้น สมมติสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งคือ

$$\frac{dw}{dz} - \frac{\gamma}{z} w = 0$$

ฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $p(z) \equiv -\gamma / z$ มีโพลเชิงเดี่ยว (simple pole) ที่ $z = 0$ ผลเฉลยของสมการคือ $w = z^{\gamma}$ ดังนั้น ขึ้นอยู่กับว่า γ เป็นจำนวนเต็มค่าบวก ค่าลบ หรือไม่เป็นจำนวนเต็ม ที่ $z = 0$ ผลเฉลยมี**จุดปรกติ** (regular point), มีโพลอันดับ m หรือมี**จุดแตกกิ่ง** (branch point) ตามลำดับ

จากตัวอย่างนี้แสดงว่าภาวะเอกฐานของผลเฉลยอาจดีขึ้นหรือแย่ลงเมื่อเทียบกับฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

3.2 สมบัติเชิงวิเคราะห์ทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงซ้อน

เพื่อเป็นการเตรียมการศึกษาสมบัติเชิงวิเคราะห์ของผลเฉลยของ SOLDE เราจะเริ่มจากการพิจารณาสมบัติทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในแง่ของการวิเคราะห์เชิงซ้อน

สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งในรูปเชิงซ้อน

สมการเอกพันธ์อันดับหนึ่ง

$$\frac{dw}{dz} + p(z)w = 0 \tag{3.1}$$

โดยที่ p(z) สมบัติให้มี**จุดเอกฐานเอกเทศ** (isolated singular point) เท่านั้น ดังนั้น p(z) สามารถกระจายรอบ ๆ จุด z_0 ซึ่งอาจเป็นจุดเอกฐานของ p(z) ที่เป็น**อนุกรมโลรองต์** (Laurent's series) ในบริเวณวงแหวน $r_1 < |z - z_0| < r_2$:

$$p(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad r_1 < |z - z_0| < r_2$$

จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่งที่มีรูปแบบ

$$p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

โดยที่ p_0, p_1 และ q เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ ผลเฉลยทั่วไปจะอยู่ในรูปแบบ

$$y = \frac{1}{\mu(x)p_1(x)}\left[C + \int_{x_1}^{x} \mu(t)q(t)dt\right]$$

โดยที่ C เป็นค่าคงตัวที่กำหนดโดย $y(x_1)$ และ

$$\mu(x) = \mu(x_0)\frac{p_1(x_0)}{p_1(x)}\exp\left[\int_{x_0}^{x} \frac{p_0(t)}{p_1(t)}dt\right]$$

และ x_0 และ x_1 เป็นจุดใด ๆ ในช่วง $[a, b]$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ (3.1) เมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีบทดังกล่าว โดยที่ $q = 0$ จะมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} w(z) &= \exp\left[-\int p(z)dz\right] \\ &= C\exp\left[-\int a_{-1}\frac{dz}{z-z_0} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int (z-z_0)^n dz - \sum_{n=2}^{\infty} a_{-n} \int (z-z_0)^{-n} dz\right] \\ &= C\exp\left[-a_{-1}\ell n(z-z_0) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n-1}}{n}(z-z_0)^{-n}\right] \end{aligned}$$

เราสามารถเขียนผลเฉลยนี้ได้ใหม่เป็น

$$w(z) = C(z-z_0)^{\alpha} g(z) \tag{3.2}$$

โดยที่ $\alpha \equiv -a_{-1}$ และ $g(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ค่าเดี่ยว (analytic single - valued function) ในบริเวณวงแหวน $r_1 < |z-z_0| < r_2$ เราสามารถเขียนผลเฉลยในรูปแบบนี้ได้อันเป็นผลจากความจริงที่ว่าเลขชี้กำลังของฟังก์ชันวิเคราะห์จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

การขึ้นกับธรรมชาติของภาวะเอกฐานของ p(z) ที่ z_0 ทำให้ผลเฉลยตามสมการ (3.2) มีการจำแนกที่แตกต่างกัน ตัวอย่างเช่น ถ้า p(z) **มีภาวะเอกฐานขจัดได้** (removable singularity), ผลเฉลยคือ C g(z) ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ในกรณีเช่นนี้เรากล่าวว่าสมการ (3.1) มีภาวะเอก**ฐานขจัดได้**ที่ z_0 ถ้า p(z) มีโพลเชิงเดี่ยวที่ $z_0(a_{-1} \neq 0$ และ $a_{-n} = 0, n \geq 2)$ ดังนั้น โดยทั่วไปผลเฉลยมีจุดแตกกิ่งที่ z_0 ในกรณีนี้เรากล่าวว่าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมีจุดเอกฐานปรกติ หรือ regular singular point และ ถ้าหาก p(z) มีโพลอันดับ $m > 1$, ผลเฉลยจะมี**ภาวะเอกฐานหลัก** (essential singularity) ในกรณีนี้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งถือว่ามีจุด**เอกฐานไม่สม่ำเสมอ** หรือ irregular singular point

เพื่อให้ได้ผลเฉลยตามสมการ (3.2) เราต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่านี้ ไม่อาจแก้ได้โดยง่าย เราจึงแยกพิจารณาในหัวข้ออื่น ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงแนวทางในการแก้สมการเหล่านั้น

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งมีผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียว ภายในค่าคงตัวการคูณตามทฤษฎีบทดังกล่าวแล้ว ดังนั้น **ด้วยผลเฉลย w(z) ที่กำหนดให้, ผลเฉลยอื่น ๆ จะต้องอยู่ในรูปแบบ C w(z)** ให้ z_0 เป็นภาวะเอกฐานของ p(z) และให้ $z - z_0 = re^{i\theta}$ เริ่มต้นจากจุด z และวงกลม z_0 โดยที่ $\theta \to \theta + 2\pi$ แม้ว่า p(z) อาจมีโพลเชิงเดี่ยวที่ z_0 ผลเฉลยอาจมีจุดแตกกิ่งที่นั่น ซึ่งเห็นได้ชัดเจนจากผลเฉลยทั่วไปที่ α อาจเป็นจำนวนไม่เต็ม (noninteger) ดังนั้น $\tilde{w}(z) \equiv w(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)})$ อาจเป็นอีกรูปแบบหนึ่งของ w(z) อย่างไรก็ตาม **จากหลักการต่อเนื่องที่กล่าวในหัวข้อที่แล้วแสดงว่า** $\tilde{w}(z)$ **เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วย** ดังนั้น จึงมีค่า C ที่ทำให้ $\tilde{w}(z) = Cw(z)$ ถ้าเรานิยาม α โดยให้ $C \equiv e^{2\pi i\alpha}$ ดังนั้น ฟังก์ชัน

$$g(z) = (z - z_0)^{-\alpha} w(z)$$

เป็นฟังก์ชันค่าเดี่ยวรอบ ๆ z_0 และ

$$\begin{aligned} g(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) &= (re^{i(\theta+2\pi)})^{-\alpha} w(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) \\ &= (z - z_0)^{-\alpha} e^{-2\pi i\alpha} e^{2\pi i\alpha} w(z) \\ &= (z - z_0)^{-\alpha} w(z) \\ &= g(z) \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่าผลเฉลย w(z) ของสมการ (3.1) สามารถเขียนได้เป็น

$$w(z) = (z - z_0)^{\alpha} g(z)$$

โดยที่ g(z) เป็นฟังก์ชันค่าเดี่ยว

เมทริกซ์วงจร

วิธีที่ใช้ในตัวอย่างที่กล่าวมานี้สามารถวางนัยทั่วไปเพื่อให้ได้ผลที่เหมือนกันสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n

$$\hat{L}[w] = \frac{d^n w}{dz^n} + p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + \ldots + p_1(z)\frac{dw}{dz} + p_0(z)w = 0 \qquad (3.3)$$

โดยที่ทุก $p_i(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน $r_1 < \left| z - z_0 \right| < r_2$

ให้ $\left\{ w_j(z) \right\}_{j=1}^{n}$ เป็นฐานหลักของผลเฉลยของ (3.3) และให้ $z - z_0 \equiv re^{i\theta}$ เราเริ่มที่ z และฟังก์ชันต่อเนื่องวิเคราะห์ $w_j(z)$ ครบรอบ 1 รอบด้วยมุม $\theta + 2\pi$ ให้ $\tilde{w}_j(z) \equiv \tilde{w}_j(z_0 + re^{i\theta}) \equiv w_j(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)})$ ดังนั้นจึงไม่ยากที่จะแสดงว่า $\left\{ \tilde{w}_j(z) \right\}_{j=1}^{n}$ เป็นฐานหลักของผลเฉลยด้วย หรืออีกนัยหนึ่ง $\tilde{w}_j(z)$ สามารถเขียนเป็นผลบวกเชิงเส้นของ $w_j(z)$ นั่นคือ

$$\tilde{w}_j(z) = w_j(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} w_k(z)$$

เมทริกซ์ $A \equiv (a_{jk})$ เรียกว่า **เมทริกซ์วงจร** (circuit matrix) ของสมการเมทริกซ์นี้หาตัวผกผันได้ (invertible) เพราะสามารถแปลงฐานหลักหนึ่งไปเป็นฐานหลักอื่นได้ ดังนั้น จึงมีค่าเจาะจงไม่เป็นศูนย์ ให้ $\lambda \neq 0$ เป็นค่าเจาะจงค่าหนึ่งดังกล่าว และเลือกเวกเตอร์แนวตั้ง

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

โดยที่ $\tilde{A}C = \lambda C$ นั่นคือ C เป็นเวกเตอร์เจาะจงของ $\tilde{A}$ ด้วยค่าเจาะจง λ สังเกตุว่า A และ $\tilde{A}$ มีเซตของค่าเจาะจงที่เหมือนกัน อย่างน้อยที่สุดเวกเตอร์เจาะจงหนึ่งเวกเตอร์ต้องมีจริงเสมอ เพราะพหุนามลักษณะเฉพาะของ $\tilde{A}$ มีรากอย่างน้อยหนึ่งราก ซึ่งเป็นไปได้เสมอที่จะหา C ในลักษณะ $\tilde{A}C = \lambda C$ ต่อไปให้

$$w(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j w_j(z)$$

$w(z)$ นี้เป็นผลเฉลยของสมการ (3.3) และ

$$
\begin{aligned}
\widetilde{w}(z) \equiv w(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) &= \sum_{j=1}^{n} c_j w_j(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk} w_k(z) \\
&= \sum_{j,k} (\widetilde{A})_{kj} c_j w_k(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda c_k w_k(z) \\
&= \lambda w(z)
\end{aligned}
$$

หากเรานิยาม α โดย $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ ดังนั้น

$$w(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = e^{2\pi i\alpha} w(z)$$

เราจึงเขียน $f(z) \equiv (z-z_0)^{-\alpha} w(z)$ จากตัวอย่างล่าสุดที่เราได้กล่าวมาแล้วเราจึงได้ $f(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = f(z)$ นั่นคือ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเดี่ยวรอบ ๆ z_0 เราจึงได้**ทฤษฎีบท 3.1** "สมการ (3.3) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในช่วง $r_1 < |z - z_0| < r_2$ ยอมให้มีผลเฉลยในรูปแบบ

$$w(z) = (z - z_0)^{\alpha} f(z)$$

โดยที่ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเดี่ยวรอบ ๆ z_0 ใน $r_1 < |z - z_0| < r_2$"

จุดเอกฐานเอกเทศ z_0 ซึ่งฟังก์ชันวิเคราะห์ $w(z)$ ที่อยู่ใกล้ z_0 สามารถเขียนได้เป็น $w(z) = (z - z_0)^{\alpha} f(z)$ โดยที่ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเดี่ยวและวิเคราะห์ในย่านใกล้เคียงของ z_0 เรียกว่า **จุดแตกกิ่งเชิงเดี่ยว** (simple branch point) ของ $w(z)$ ตัวอย่างล่าสุดที่แสดงนี้บอกให้ทราบว่าผลเฉลยที่จุดแตกกิ่งเชิงเดี่ยวมีจริงก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ C ซึ่งส่วนประกอบปรากฏใน $w(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j w_j(z)$ เป็นเวกเตอร์เจาะจงของ $\widetilde{A}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose) ของเมทริกซ์วงจร ดังนั้น จึงมีผลเฉลยมากมายที่มีจุดแตกกิ่งเชิงเดียวเหมือนกับมีเวกเตอร์เจาะจงที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน

3.3 สมการเชิงเส้นอันดับสองที่เป็นเชิงซ้อน

พิจารณา SOLDE ที่เป็นเชิงซ้อน คือ

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

กำหนดให้ $w_1(z)$ และ $w_2(z)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน เราใช้ผลเฉลยทั้งสองนี้กำหนดเมทริกซ์ A แล้วพยายามทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมอาจมีความเป็นไปได้ที่จะปรากฏ 3 สิ่ง คือ

1. **เมทริกซ์ A ทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ และเราสามารถหาเวกเตอร์เจาะจง 2 เวกเตอร์ คือ F(z) และ G(z)** ที่สมนัยตามลำดับกับค่าเจาะจง λ_1 และ λ_2 ที่แตกต่างกัน ซึ่งหมายถึง

$$F(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = \lambda_1 F(z)$$

และ

$$G(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = \lambda_2 G(z)$$

ถ้าเรานิยามให้ $\lambda_1 = e^{2\pi i\alpha}$ และ $\lambda_2 = e^{2\pi i\beta}$ ทฤษฎีบท 3.1 บอกว่า

$$F(z) = (z - z_0)^{\alpha} f(z)$$

และ

$$G(z) = (z - z_0)^{\beta} g(z)$$

เราเรียกเซต $\{F(z), G(z)\}$ ว่า **ฐานหลักแบบบัญญัติ** (canonical basis) สำหรับ SOLDE

2. **เมทริกซ์ A ทำให้เป็นทแยงมุมได้ และค่าเจาะจง 2 ค่าเหมือนกัน** กรณีเช่นนี้ทั้ง F(z) และ G(z) มีค่าคงตัว α ที่เหมือนกัน ดังนั้น

$$F(z) = (z - z_0)^{\alpha} f(z) \qquad \text{และ} \qquad G(z) = (z - z_0)^{\alpha} f(z)$$

3. **เราไม่สามารถหาเวกเตอร์เจาะจง 2 เวกเตอร์ได้ ซึ่งสมนัยกับกรณีที่ A ไม่อาจทำให้ทแยงมุมได้** หรือไม่เป็นเมทริกซ์ปรกติ อย่างไรก็ตาม เราสามารถหาเวกเตอร์เจาะจง 1 ค่าได้เสมอ ดังนั้น A จึงมีค่าเจาะจงเพียงค่าเดียวเท่านั้นคือ λ ถ้าให้ $w_1(z)$ เป็นผลเฉลยในรูปแบบ $(z - z_0)^{\alpha} f(z)$ โดยที่ f(z) เป็นฟังก์ชันค่าเดี่ยวและ $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ การมีอยู่จริงของผลเฉลยเช่นนี้รับประกันโดยทฤษฎีบท 3.1

ให้ $w_2(z)$ เป็นผลเฉลยอื่นที่เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งทฤษฎีบท 3.1 ก่อนหน้านี้ประกันการมีอยู่จริงของผลเฉลยที่สองนี้ ดังนั้น

$$w_2(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) = aw_1(z) + bw_2(z)$$

เมทริกซ์วงจรจะเป็น $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ ซึ่งมีค่าเจาะจง λ และ b เนื่องจาก A สมมติว่ามีค่าเจาะจงเพียงค่าเดียว จึงทำให้ $b = \lambda$ และ A กลายเป็น

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ a & \lambda \end{pmatrix} \qquad a \neq 0$$

เงื่อนไข $a \neq 0$ จำเป็นต้องใช้ในการแยกกรณีนี้ออกจากกรณีอื่น ๆ เราได้ทำการต่อเนื่องวิเคราะห์ $h(z) = w_2(z)/w_1(z)$ ครบ 1 รอบ รอบ ๆ z_0 และได้

$$\begin{aligned} h(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)}) &= \frac{w_2(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)})}{w_1(z_0 + re^{i(\theta+2\pi)})} = \frac{aw_1(z) + \lambda w_2(z)}{\lambda w_1(z)} \\ &= \frac{a}{\lambda} + \frac{w_2(z)}{w_1(z)} = \frac{a}{\lambda} + h(z) \end{aligned}$$

สิ่งที่ตามมาคือ ฟังก์ชัน $g_1(z) = h(z) - \frac{a}{2\pi i\lambda}\ell n\, z$ เป็นฟังก์ชันค่าเดี่ยวใน $r_1 < |z - z_0| < r_2$ ดังนั้น $w_2(z) = h(z)w_1(z)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$w_2(z) = w_1(z)g_1(z) + \frac{a}{2\pi i\lambda}(\ell nz)w_1(z)$$

ถ้าเรานิยาม $g_1(z)$ และ $w_2(z)$ เสียใหม่เป็น $(2\pi i\lambda/a)g_1(z)$ และ $(2\pi i\lambda/a)w_2(z)$ ตามลำดับ เราจะได้**ทฤษฎีบท 3.2** คือ

"ถ้า $p(z)$ และ $q(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน $r_1 < |z - z_0| < r_2$ ดังนั้น SOLDE $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ ยอมให้มีฐานหลักของผลเฉลยในย่านใกล้เคียงของจุดเอกฐาน z_0 และผลเฉลยมีรูปแบบ

$$\begin{aligned} w_1(z) &= (z - z_0)^{\alpha} f(z) \\ w_2(z) &= (z - z_0)^{\beta} g(z) \end{aligned}$$

หรือ ในกรณียกเว้นที่ไม่มีเวกเตอร์เจาะจง 2 เวกเตอร์ มีรูปแบบ

$$w_1(z) = (z-z_0)^{\alpha} f(z)$$
$$w_2(z) = w_1(z)[g_1(z)+\ell nz]$$

ฟังก์ชัน $f(z)$, $g(z)$ และ $g_1(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และค่าเดี่ยวในพิสัย $r_1 < |z-z_0| < r_2$"

ทฤษฎีบทนี้ยอมให้เราแยกจุดแตกกิ่ง z_0 ออกจากที่เหลือของผลเฉลย อย่างไรก็ตาม แม้ว่า $f(z), g(z)$ และ $g_1(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณวงแหวน $r_1 < |z-z_0| < r_2$ แต่อาจจะมีโพลอันดับใดก็ได้ที่ z_0 โดยทั่วไปเราไม่อาจแยกโพลออกจากกันได้ แต่ถ้าหาก $p(z)$ และ $q(z)$ มี โพลที่มีอันดับแน่นอน เราอาจแยกโพลเหล่านี้ได้ ด้วยเหตุนี้เราจึงจำเป็นต้องนิยามสิ่งต่อไปนี้ :

SOLDE ในรูปแบบ $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ ซึ่งวิเคราะห์ในช่วง $0 < |z-z_0| < r$ มีจุดเอกฐานปรกติที่ z_0 ถ้า **$p(z)$ มีโพลเชิงเดี่ยว ที่นั่นและ $q(z)$ มีโพลอันดับสอง ที่นั่น**

ในย่านใกล้เคียงของจุดเอกฐานปรกติ z_0 ฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $p(z)$ และ $q(z)$ มีการกระจายในรูปอนุกรมกำลังเป็น

$$p(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$
$$q(z) = \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$$

คูณทั้งสองข้างของสมการแรกด้วย $(z-z_0)$ และสมการที่สองด้วย $(z-z_0)^2$ จะได้

$$(z-z_0)p(z) \equiv P(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-z_0)^k$$

และ

$$(z-z_0)^2 q(z) \equiv Q(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} B_k (z-z_0)^k$$

เพื่อความสะดวกเรามักคูณ SOLDE ที่กำหนดด้วย $(z-z_0)^2$ แล้วเขียนสมการเป็น

$$\hat{L}[w] \equiv (z-z_0)^2 w'' + (z-z_0)P(z)w' + Q(z)w = 0 \qquad (3.4)$$

เราจึงเขียนผลเฉลยได้ในรูปแบบ

$$w(z) = (z - z_0)^{\upsilon}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (z - z_0)^k\right]$$

หรือ

$$\boxed{w(z) = (z - z_0)^{\upsilon} \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k} \quad , \quad C_0 = 1 \tag{3.5}$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ (3.4) จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{(n+\upsilon)(n+\upsilon-1)C_n + \sum_{k=0}^{n} \left[(k+\upsilon)A_{n-k} + B_{n-k}\right]C_k\right\}(z - z_0)^{n+\upsilon} = 0$$

ซึ่งทำให้ความสัมพันธ์เวียนเกิดกลายเป็น

$$(n+\upsilon)(n+\upsilon-1)C_n = -\sum_{k=0}^{n} [(k+\upsilon)A_{n-k} + B_{n-k}]C_k \tag{3.6}$$

โดยที่ $n = 0, 1, 2, \ldots$ เมื่อ $n = 0$, **เราได้สมการ indicial equation ที่เราทราบกันดีสำหรับเลขชี้ก**
υ คือ

$$\boxed{I(\upsilon) \equiv \upsilon(\upsilon - 1) + A_0\upsilon + B_0 = 0}$$

รากของสมการนี้เรียกว่า **เลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะ** (characteristic exponents) ของ
เรียกว่า **indicial polynomial** เราสามารถเขียนสมการ (3.6) ในเทอมของพหุนามนี้

$$\boxed{I(\upsilon + n)C_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+\upsilon)A_{n-k} + B_{n-k}\right]C_k} \tag{3.8}$$

สมการ (3.7) กำหนดค่าที่เป็นไปได้ของ υ และสมการ (3.8) ,... ซึ่งใช้
กำหนด $w(z)$ อย่างไรก็ตามหากพหุนาม (3.8) เป็นศูนย์ที่ $n+\upsilon$ บ เป็นจำนวนเต็ม

ค่าบวก กล่าวคือ ถ้า $n+\upsilon$ เป็นรากของสมการ (3.7) รวมทั้ง υ ก็เป็นรากของสมการนี้ด้วย ดังนั้น $I(\upsilon+n)=0=I(\upsilon)$ และสมการ (3.8) จะไม่นิยาม

ถ้า υ_1 และ υ_2 เป็นเลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะของ indicial equation และ $Re(\upsilon_1)>Re(\upsilon_2)$ ดังนั้น ผลเฉลยสำหรับ υ_1 จะมีอยู่จริงเสมอ ผลเฉลยสำหรับ υ_2 จะมีอยู่จริงเช่นกันก็ต่อเมื่อ $\upsilon_1-\upsilon_2\neq n$ สำหรับจำนวนเต็ม n ค่าบวกบางค่า โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า z_0 เป็นจุดสามัญซึ่งเป็นจุดที่ทั้ง $p(z)$ และ $q(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น ผลเฉลยเดียวเท่านั้นที่จะกำหนดได้ด้วยสมการ (3.8)

เราจึงสรุปเป็นทฤษฎีบท 3.3 ได้ดังนี้ :

"ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ $w''+p(z)w'+q(z)w=0$ มีจุดเอกฐานปรกติที่ $z=z_0$ ดังนั้น อย่างน้อยที่สุดอนุกรมกำลังในรูปแบบของสมการ (3.5) จะสอดคล้องกับสมการ ถ้า υ_1 และ υ_2 เป็นเลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะของ z_0 ดังนั้นจะมีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน 2 ค่า เว้นเสียแต่ว่า $\upsilon_1-\upsilon_2$ เป็นจำนวนเต็ม"

เพื่อให้เกิดความชัดเจนยิ่งขึ้น เราลองพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์บางสมการที่ปรากฏในฟิสิกส์บ่อย ๆ ต่อไปนี้ คือ

สมการเบสเซล :

$$w''+\frac{1}{z}w'+\left(1-\frac{\alpha^2}{z^2}\right)w=0$$

ในกรณีนี้ $z_0=0,\quad A_0=1$ และ $B_0=-\alpha^2$ ดังนั้น indicial equation คือ

$$\upsilon(\upsilon-1)+\upsilon-\alpha^2=0$$

ซึ่งมีผลเฉลยเป็น $\upsilon_1=-\alpha$ และ $\upsilon_2=+\alpha$ ดังนั้นจึงมีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน 2 ค่า ของสมการเบสเซล เว้นเสียแต่ $\upsilon_2-\upsilon_1=2\alpha$ เป็นจำนวนเต็ม หรือ α เป็นทั้งจำนวนเต็มหรือกึ่งจำนวนเต็ม

สมการศักย์คูลอมบ์ :

ศักย์คูลอมบ์ $f(r)=\beta/r$ มีสมการเชิงรัศมีเป็น

$$w'' + \frac{2}{z}w' + \left(\frac{\beta}{z} - \frac{\alpha}{z^2}\right)w = 0$$

จุด $z = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติที่มี $A_0 = 2$ และ $B_0 = -\alpha$ indicial polynomial คือ

$$I(\upsilon) = \upsilon^2 + \upsilon - \alpha$$

ด้วยเลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะ $\upsilon_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha}$ และ $\upsilon_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha}$ จะมีผลเฉลย 2 ค่าที่เป็นอิสระต่อกัน เว้นเสียแต่ $\upsilon_2 - \upsilon_1 = \sqrt{1+4\alpha}$ เป็นจำนวนเต็มในทางปฏิบัติ $\alpha = \ell(\ell+1)$ โดยที่ ℓ เป็นจำนวนเต็มบางจำนวน ดังนั้น $\upsilon_2 - \upsilon_1 = 2\ell + 1$ จึงมีผลเฉลยเพียงค่าเดียว

สมการไฮเพอร์จีออเมตริก

$$w'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{z(1-z)}w' - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)}w = 0$$

ฟังก์ชันที่ปรากฏในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์บางส่วนจะเป็นผลเฉลยของสมการนี้ ด้วยค่า α, β และ γ ที่เหมาะสม จุดเอกฐานปรกติ คือ $z = 0$ และ $z = 1$ ที่จุด $z = 0$, $A_0 = \gamma$, $B_0 = 0$ และ พหุนาม indicial คือ $I(\upsilon) = \upsilon(\upsilon + \gamma - 1)$ ซึ่งมีรากเป็น $\upsilon_1 = 0$ และ $\upsilon_2 = 1 - \gamma$ เว้นเสียแต่ γ เป็นจำนวนเต็ม เราจะมีผลเฉลย 2 ค่าที่สมนัยกับ υ_1 และ υ_2 นั้น

จากทฤษฎีสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งกล่าวว่า **ตราบใดที่ $\upsilon_1 - \upsilon_2$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ผลเฉลยในรูปอนุกรมตามทฤษฎีบท 3.3 จะอยู่เข้าสำหรับย่านใกล้เคียงของ** z_0 สิ่งที่น่าสนใจคือ เกิดอะไรขึ้นถ้า $\upsilon_1 - \upsilon_2$ เป็นเลขจำนวนเต็ม

เพื่อความสะดวกเราจะเลือกแกนโดยให้จุด z_0 อยู่ที่จุดกำเนิด ทำให้เราเขียน $z - z_0$ เป็น z เท่านั้น

สมมติ $\upsilon_1 - \upsilon_2$ เป็นจำนวนเต็ม และให้ υ_1 เป็นรากที่มีส่วนจริง (real part) มากกว่า ดังนั้น $\upsilon_2 = \upsilon_1 - n$ เมื่อ $n \geq 0$ และผลเฉลยในรูปแบบ

$$w_1 = z^{\upsilon_1} f(z) \equiv z^{\upsilon_1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k\right)$$

มีอยู่จริงในบริเวณ $0<|z|<r$ สำหรับ $r>0$ ต่อไปเรานิยามให้

$$w(z) \equiv w_1(z)h(z) = z^{\upsilon_1} f(z)h(z)$$

แล้วแทนค่าลงใน SOLDE เพื่อให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งใน h',

$$h'' + \left(p + \frac{2w_1'}{w_1}\right)h' = 0$$

หรือโดยแทนค่า $w_1'/w_1 = \upsilon_1/z + f'/f$, สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่สมมูลกันคือ

$$h'' + \left(\frac{2\upsilon_1}{z} + 2\frac{f'}{f} + p\right)h' = 0 \tag{3.9}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ใน h' นี้มีจุดเอกฐานปรกติที่ $z=0$ เพราะ $f(0)=1\neq 0$ และ $p(z)$ มีโพลเชิงเดี่ยวที่นั่น เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าสัมประสิทธิ์ของเทอม z^{-1} ในการกระจายอนุกรมโลรองต์ของเทอมที่คูณด้วย h' ในสมการ (3.9) มีค่าเท่ากับ $n+1$ และ

$$h(z) = \begin{cases} \ell n\, z + g_1(z) & , \quad n=0 \\ C\,\ell n\, z + z^{-n} g_2(z) & , \quad n \neq 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

โดยที่ $g_1(z)$ และ $g_2(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z=0$

เราจึงสรุปเป็น**ทฤษฎีบท 3.4** ได้ว่า

"สมมติเลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะของ SOLDE ด้วยจุดเอกฐานปรกติที่ $z=0$ คือ υ_1 และ υ_2 ถ้า $\upsilon_1 - \upsilon_2$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะปรากฏฐานหลักของสมการในรูปแบบของสมการ (3.5) ด้วยค่า $\upsilon = \upsilon_1$ หรือ $\upsilon = \upsilon_2$ หรืออีกนัยหนึ่ง ถ้า $\upsilon_2 - \upsilon_1 - n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ดังนั้นจะปรากฏฐานหลักแบบบัญญัติของผลเฉลยในรูปแบบ

$$w_1 = z^{\upsilon_1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k\right)$$
$$w_2 = z^{\upsilon_2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right) + C w_1 \ell n\, z$$

โดยที่อนุกรมกำลังจะลู่เข้าในย่านใกล้เคียงของ $z=0$"

3.4 สมการเชิงอนุพันธ์ Fuchsian

ปัญหาหลาย ๆ ปัญหาในทางฟิสิกส์จะเป็นเรื่องเกี่ยวกับผลเฉลยของ SOLDE ที่ระยะอนันต์ ตัวอย่างเช่นฟังก์ชันที่ใช้อธิบาย ความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density) ของอนุภาคในกลศาสตร์ควอนตัมจะต้องเข้าสู่ศูนย์เมื่อระยะจากศูนย์กลางของแรงยึดเหนี่ยวเพิ่มขึ้น เป็นต้น จากหัวข้อที่ผ่าน ๆ มาจะเห็นว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้นกับฟังก์ชันเป็นสัมประสิทธิ์ของสมการ การกำหนดพฤติกรรมของผลเฉลยที่ระยะอนันต์นั้นหากเราแทน $z = 1/t$ ลงใน SOLDE

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)w = 0 \tag{3.11}$$

เราจะได้

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}r(t)\right]\frac{dv}{dt} + \frac{1}{t^4}S(t)v(t) = 0 \tag{3.12}$$

โดยที่

$$v(t) \equiv w\left(\frac{1}{t}\right), \quad r(t) \equiv p\left(\frac{1}{t}\right), \quad S(t) \equiv q\left(\frac{1}{t}\right)$$

จะเห็นได้ว่าเมื่อ $z \to \infty,\ t \to 0$ ดังนั้น เราจึงสนใจในพฤติกรรมของสมการ (3.12) สำหรับ $t = 0$ เราสมมติว่าทั้ง $r(t)$ และ $S(t)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $t = 0$ สมการ (3.12) แสดงว่าผลเฉลย $v(t)$ อาจมีภาวะเอกฐานที่ $t = 0$ (หรือ $z = \infty$) เพราะเทอมที่ปรากฏในฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ของวงเล็ก $[\cdots]$

เราสมมติให้ระยะอนันต์เป็นจุดเอกฐานปรกติของสมการ (3.11) ซึ่งหมายถึง $t = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติของสมการ (3.12) ดังนั้นในการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $r(t)$ และ $S(t)$ (เพราะทั้งสองฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์) เทอมแรกของ $r(t)$ และสองเทอมแรกของ $S(t)$ ต้องเป็นศูนย์ ดังนั้น เราจึงเขียน

$$r(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n + .. = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$$

$$S(t) = b_2 t^2 + b_2 t^3 + \ldots + b_n t^n + .. = \sum_{k=2}^{\infty} b_k t^k$$

สำหรับ p(z) และ q(z) เราต้องเขียนในรูปแบบ

$$p(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$$
$$q(z) = \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \ldots + \frac{b_n}{z^n} + \ldots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} \qquad (3.13)$$

สำหรับ $|z| \to \infty$

เมื่อ $z = \infty$ เป็นจุดเอกฐานปรกติของสมการ (3.11) หรือ $t = 0$ เป็นจุดเอกฐานปรกติของสมการ (3.12) ทฤษฎีบท 3.4 บอกให้ทราบว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์จะอยู่ในรูปแบบ

$$v_1(t) = t^{\alpha}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k t^k\right) \quad , \qquad \alpha = \upsilon_1, \upsilon_2$$

หรือในเทอมของ z,

$$\boxed{w_1(z) = z^{-\alpha}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{z_k}\right) \quad , \qquad \alpha = \upsilon_1, \upsilon_2} \qquad (3.14)$$

ถ้า $\upsilon_1 - \upsilon_2$ **ไม่เป็นจำนวนเต็ม** υ_1 และ υ_2 ในที่นี้เป็นเลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะที่ $t = 0$ ของสมการ(3.12) ซึ่งพหุนาม indicial สามารถหาได้ง่ายเป็น

$$\upsilon(\upsilon - 1) + (2 - a_1) + b_2 = 0$$

ถ้า $\upsilon_1 - \upsilon_2$ เป็นจำนวนเต็ม จะยังคงมีผลเฉลยในรูปแบบของสมการ (3.14) แต่ผลเฉลยที่สองอาจมีเทอมลอการิทึม (logarithmic term),

สมการเอกพันธ์เชิงอนุพันธ์ที่มีฟังก์ชันสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ค่าเดี่ยว เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ Fuchsian (Fuchsian differential equation) หรือ FDE ถ้าเป็นสมการที่มีจุดเอกฐานปรกติเท่านั้นในระนาบเชิงซ้อนที่รวมจุดที่ระยะอนันต์เข้าไปด้วย (extended complex plane)

เนื่องจากชนิดเดียวของ FDE ที่อธิบายหมู่ใหญ่ของฟังก์ชันไม่มูลฐาน (nonelementary function) ที่ปรากฏในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์ เราจึงควรแยกชนิดของ FDE โดยใช้ฟังก์ชันเชิงซ้อนที่มีภาวะเอกฐานเท่านั้น ในระนาบเชิงซ้อนที่รวมจุดอนันต์เข้าไปเป็นโพลเป็น **ฟังก์ชันตรรกยะ** (rational functions) ซึ่งเป็นอัตราส่วนของพหุนาม เราจึงหวังว่า FDE จะมีฟังก์ชันตรรกยะเท่านั้นที่เป็นสัมประสิทธิ์

เราจะเริ่มด้วย FDE อันดับสอง หรือ SOFDE โดยเริ่มจากกรณีที่สมการมีจุดเอกฐานปรกติอยู่ 2 จุดคือ z_1 และ z_2 เราเสนอตัวแปรใหม่ $\zeta = (z - z_1)/(z - z_2)$ จุดเอกฐานปรกติที่ z_1 และ z_2 จะถูกส่ง (mapped) ไปยังจุด $\zeta_1 = 0$ และ $\zeta_2 = \infty$ ตามลำดับในระนาบของ ζ สมการ (3.11) จะกลายเป็น

$$\frac{d^2u}{\partial\zeta^2} + \Phi(\zeta)\frac{du}{\partial\zeta} + \Theta(\zeta)u = 0 \tag{3.15}$$

โดยที่ u, Φ และ Θ เป็นฟังก์ชันของ ζ ซึ่งได้จากการที่ z กำหนดในเทอมของ ζ ใน $w(z), p(z)$ และ $q(z)$ ตามลำดับ เนื่องจาก $\zeta = 0$ เป็นโพลเชิงเดียวของ $\Phi(\zeta)$ เราต้องได้

$$\Phi(\zeta) = \frac{a_1}{\zeta} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k$$

แต่ $\zeta = \infty$ ก็เป็นจุดเอกฐานปรกติด้วย จากสมการ (3.13) ทำให้ $\alpha_k = 0$ สำหรับ $k = 0, 1, 2, \ldots$ ดังนั้น $\Phi(\zeta) = a_1/\zeta$ ทำนองเดียวกันเราจะได้ $\Theta(\zeta) = b_2/\zeta^2$ ด้วยเหตุนี้ทำให้ SOFDE ที่มีจุดเอกฐานปรกติจึงสมมูลกับสมการเชิงอนุพันธ์

$$w'' + \frac{a_1}{z}w' + \frac{b_2}{z^2}w = 0$$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย z^2 จะได้

$$z^2w'' + a_1zw' + b_2w = 0$$

ซึ่งเป็น**สมการออยเลอร์** อันดับสอง สมการออยเลอร์อันดับที่ n จะสมมูลกับสมการเชิงเส้นอันดับ n หรือ NOLDE ที่มีสัมประสิทธิ์คงตัว ดังนั้น SOFDE ที่มีจุดเอกฐานปรกติ 2 จุด จึงสมมูลกับ SOLDE ที่มีสัมประสิทธิ์คงตัว ซึ่งไม่มีอะไรใหม่เกิดขึ้น

SOFDE' ที่ง่ายที่สุดและผลเฉลยอาจรวมฟังก์ชันไม่มูลฐานเข้าไปด้วย จึงมีจุดเอกฐานปรกติที่ z_1, z_2 และ z_3 โดยการแปลง

$$\zeta = \frac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)}$$

เราสามารถส่ง z_1, z_2 และ z_3 ไปสู่ $\zeta_1 = 0,\ \zeta_2 = \infty$ และ $\zeta_3 = 1$ ดังนั้นเราจึงสมมุติว่าจุดเอกฐานปรกติ 3 จุด อยู่ที่ $z = 0, z = 1$ และ $z = \infty$ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า p(z) และ q(z) โดยทั่วไปคือ

$$p(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{B_1}{z-1}$$

และ

$$q(z) = \frac{A_2}{z^2} + \frac{B_2}{(z-1)^2} - \frac{A_3}{z(z-1)}$$

เราจึงได้ **ทฤษฎีบท 3.5** ได้ว่า

"SOFDE โดยทั่วไปที่มีจุดเอกฐานปรกติ 3 จุด สามารถแปลงไปสู่รูปแบบ

$$w'' + \left(\frac{A_1}{z} + \frac{B_1}{z-1}\right)w' + \left[\frac{A_2}{z^2} + \frac{B_2}{(z-1)^2} - \frac{A_3}{z(z-1)}\right]w = 0 \qquad (3.16)$$

โดยที่ A_1, A_2, A_3, B_1 และ B_2 เป็นค่าคงตัว สมการนี้เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์รีมันน์** **(Riemann differential equation)"**

เราสามารถเขียนสมการรีมันน์ในเทอมของคู่ของเลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะ $(\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2)$ และ (υ_1, υ_2) ตามจุดเอกฐาน 0, 1 และ ∞ ตามลำดับ สมการ indicial จะกลายเป็น

$$\lambda(\lambda-1) + A_1\lambda + A_2 = 0$$
$$\mu(\mu-1) + B_1\mu + B_2 = 0$$

และ

$$\upsilon^2(1 - A_1 - B_1)\upsilon + A_2 + B_2 - A_3 = 0$$

โดยการเขียนสมการ indicial เป็น $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = 0$ และอื่น ๆ อีก แล้วเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ เราสามารถหาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$A_1 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \qquad A_2 = \lambda_1\lambda_2$$
$$B_1 = 1 - \mu_1 - \mu_2 \qquad B_2 = \mu_1\mu_2$$
$$A_1 + B_1 = \upsilon_1 + \upsilon_2 + 1 \qquad A_2 + B_2 - A_3 = \upsilon_1\upsilon_2$$

สมการเหล่านี้นำไปสู่ **เอกลักษณ์รีมันน์** (Riemann identity)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2 + \upsilon_1 + \upsilon_2 = 1 \tag{3.17}$$

เมื่อแทนค่าผลเหล่านี้ใน (3.16) จะได้ **ทฤษฎีบท 3.6** คือ

"SOFDE ที่มีจุดเอกฐานปรกติ 3 จุด ในระนาบเชิงซ้อนที่รวมจุดอนันต์เข้าไปด้วยจะสมมูลกับสมการเชิงอนุพันธ์รีมันน์

$$w'' + \left(\frac{1-\lambda_1-\lambda_2}{z} + \frac{1-\mu_1-\mu_2}{z-1}\right)w' + \left(\frac{\lambda_1\lambda_2}{z^2} + \frac{\mu_1\mu_2}{(z-1)^2} + \frac{\upsilon_1\upsilon_2 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2}{z(z-1)}\right)w = 0 \tag{3.18}$$

ซึ่งกำหนดได้อย่างเดียวโดยคู่ของเลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะที่แต่ละจุดเอกฐานเลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะสอดคล้องกับเอกลักษณ์รีมันน์"

ความเป็นได้อย่างเดียวของสมการเชิงอนุพันธ์รีมันน์ยอมให้เราหาเอกลักษณ์สำหรับผลเฉลยและลดพารามิเตอร์อิสระของสมการ(3.18) จาก 5 เหลือ 3 สังเกตุว่า ถ้า $w(z)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.18) ที่สมนัยกับ $(\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2)$ และ (υ_1, υ_2) ดังนั้น ฟังก์ชัน $v(z) = z^\lambda w(z)$ ซึ่งมีจุดแตกกิ่งอีกด้วยที่ 0, 1 และ ∞ เป็นผลเฉลยที่สมนัยกับ $(\lambda_1 + \lambda, \lambda_2 + \lambda), (\mu_1, \mu_2)$ และ $(\upsilon_1 - \lambda, \upsilon_2 - \lambda)$ ซึ่งจะเห็นได้จากทฤษฎีบท 3.4 และสมการ (3.14) และโดยทั่วไปฟังก์ชัน

$$v(z) = z^\lambda (z-1)^\mu w(z)$$

มีจุดแตกกิ่งที่ $z = 0, 1, \infty$ เพราะ $w(z)$ ก็มีด้วย ดังนั้นจึงเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์รีมันน์ คู่ของเลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะคือ

$$(\lambda_1 + \lambda, \lambda_2 + \lambda),\ (\mu_1 + \mu, \mu_2 + \mu) \text{ และ } (\upsilon_1 - \lambda - \mu, \upsilon_2 - \lambda - \mu)$$

ในกรณีเฉพาะถ้าให้ $\lambda = -\lambda_1$ และ $\mu = -\mu_1$ ดังนั้นคู่ดังกล่าวจะลดลงเป็น

$$(0, \lambda_2 - \lambda_1), \quad (0, \mu_2 - \mu_1) \text{ และ } (\upsilon_1 + \lambda_1 + \mu_1, \upsilon_2 + \lambda_1 + \mu_1)$$

ถ้าเรานิยาม $\alpha \equiv \upsilon_1+\lambda_1+\mu_1$, $\beta \equiv \upsilon_2+\lambda_1+\mu_1$ และ $\upsilon \equiv 1-\lambda_2+\lambda_1$ และใช้สมการ (3.17) เราสามารถเขียนคู่เหล่านี้ได้เป็น

$$(0, 1-\upsilon),\ (0, \upsilon-\alpha-\beta) \text{ และ } (\alpha, \beta)$$

ซึ่งให้สมการเชิงอนุพันธ์รีมันน์

$$w''+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{z-1}\right)w'+\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}w=0$$

โดยให้ $\lambda_1=\mu_1=0$, $\lambda_2=1-\gamma$, $\mu_2=\gamma-\alpha-\beta$, $\nu_1=\alpha$, $\nu_2=\beta$ ในสมการ (3.18) สมการที่สำคัญนี้มักเขียนโดยทั่วไปเป็น

$$\boxed{z(1-z)w''+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]w'-\alpha\beta w=0} \qquad (3.19)$$

ซึ่งเรียก**สมการเชิงอนุพันธ์ไฮเพอร์จีออเมตริก** (hypergeometric differential equation) **หรือ HED** ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป

3.5 ฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริก

ฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริก (hypergeometric function) เป็นฟังก์ชันที่เรามักพบบ่อยครั้งในกลศาสตร์ควอนตัมและฟิสิกส์ทฤษฎี **ฟังก์ชันนี้ขึ้นกับพารามิเตอร์เชิงซ้อน 3 ค่า และตัวแปรเชิงซ้อน z หลาย ๆ ฟังก์ชันสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกได้ด้วยการเลือกพารามิเตอร์ทั้ง 3 และตัวแปร z ที่เหมาะสม** ฟังก์ชันนี้มีคุณสมบัติแจ่มชัดบางอย่างเทียบกับการต่อเนื่องวิเคราะห์ซึ่งในบางครั้งจะมีประโยชน์มากในทางปฏิบัติ

ฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกเป็นผลเฉลยของ SOLDE ที่มีจุดเอกฐานปรกติ 3 จุด จากสมการ (3.19) ของหัวข้อที่แล้วจะเห็นว่าเลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะ 2 ค่า ที่ $z=0$ คือ 0 และ $1-\gamma$ และจากทฤษฎีบท 3.4 แสดงว่าจะมีผลเฉลยวิเคราะห์ที่ $z = 0$ สมมติเราแทนผลเฉลยนี้ด้วย $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ และเขียน

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad , \qquad a_0=1$$

เราเรียกผลเฉลย $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ **นี้ว่า ฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริก ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของอนุกรม** แทนค่าฟังก์ชันนี้ลงในสมการ (3.19) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ

$$a_{k+1} = \frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)} a_k \quad , \qquad k \geq 0$$

สัมประสิทธิ์เหล่านี้สามารถหาค่าได้ ถ้า $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta;\gamma;z) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{k!\gamma\,(\gamma+1)\cdots(\gamma+k+1)} z^k \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\gamma+k)} z^k \end{aligned} \tag{3.20}$$

เราเรียกอนุกรมใน (3.20) ว่า **อนุกรมไฮเพอร์จีออเมตริก** ที่เรียกเช่นนี้เพราะ $F(1,\beta;\beta;z)$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตธรรมดานั่นเอง Γ ในสมการ(3.20) เรียกว่า **ฟังก์ชันแกมมา** (gamma function) เนื่องจากสามารถเขียนในรูปของแฟกทอเรียลได้จึงเรียกอีกอย่างว่า **ฟังก์ชันแฟกทอเรียล** (factorial function) และในบางกรณีจะเรียก **ปริพันธ์ออยเลอร์ชนิดที่สอง** (Euler's integral of the second kind)

คุณสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกสามารถศึกษาได้จากตัวอย่างต่อไปนี้ :

(1) คุณสมบัติหลายประการของฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกสามารถหาได้โดยตรงจากสมการ (3.19) เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (3.19) และให้ $v = w'$ จะได้

$$z(1-z)v'' + [\gamma+1-(\alpha+\beta+3)z]v' - (\alpha+1)(\beta+1)v = 0$$

ซึ่งแสดงว่า

$$F'(\alpha,\beta;\gamma;z) = CF(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z)$$

ค่าคงตัว C สามารถได้จากการหาอนุพันธ์ของสมการ (3.20) ถ้าให้ $z = 0$ ในผลที่ได้ และจาก $F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;0) = 1$ ดังนั้นเราจะได้

$$\boxed{F'(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z)}$$

หรืออีกนัยหนึ่ง เมื่อแทนค่า $w = z^{1-\gamma} u(\gamma \neq 1)$ ลงในสมการ (3.19) จะได้

$$z(1-z)u'' + [\gamma_1 - (\alpha_1 + \beta_1 + 1)z]u' - \alpha_1\beta_1 u = 0$$

โดยที่ $\alpha_1 = \alpha - \gamma + 1,\ \ \beta_1 = \beta - \gamma + 1$ และ $\gamma_1 = 2 - \gamma$ ดังนั้น

$$u = F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1;\ \ 2-\gamma;\ z)$$

และ u จึงเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ **z = 0** ซึ่งนำไปสู่ผลที่น่าสนใจคือ ถ้า γ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันคือ

$$w_1(z) \equiv F(\alpha, \beta; \gamma; z)$$

และ

$$w_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1;\ 2-\gamma;\ z)$$

จะก่อให้เกิดฐานหลักแบบบัญญัติของผลเฉลยของ HDE ที่ z = 0 ซึ่งเป็นผลจากทฤษฎีบท 3.4 และความจริงที่ว่า $(0, 1-\gamma)$ เป็นคู่ของเลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะที่ $z = 0$

ความสัมพันธ์ที่ 3 สามารถหาได้โดยการแทนค่า $w = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}u$ ซึ่งนำไปสู่สมการไฮเพอร์จีออเมตริกสำหรับ u ด้วยค่า $\alpha_1 = \gamma - \alpha,\ \beta_1 = \gamma - \beta$ และ $\gamma_1 = \gamma$ ดังนั้นเราจึงได้เอกลักษณ์

$$\boxed{F(\alpha,\beta;\gamma;z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z)}$$

ในการหาฐานหลักแบบบัญญัติที่ **z = 1** เราจะแทน $t = 1 - z$ แล้วสังเกตุว่าผลที่ได้ยังคงเป็น HDE ด้วยค่า $\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = \beta$ และ $\gamma_1 = \alpha + \beta - \gamma + 1$ จาก $w_1(z)$ และ $w_2(z)$ ทำให้เราได้

$$w_3(z) = F(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1;\ 1-z)$$

และ

$$w_4(z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha; \gamma-\alpha-\beta+1;\ 1-z)$$

ฟังก์ชันเหล่านี้ก่อให้เกิดฐานหลักแบบบัญญัติของผลเฉลยของสมการ HDE ที่ $z = 1$

สมมาตรของฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกหาได้โดยง่ายจาก HDE คือ

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = F(\beta,\alpha;\gamma;z)$$

ฟังก์ชันจำนวน 6 ฟังก์ชันคือ $F(\alpha \pm 1,\beta;\gamma;z), F(\alpha,\beta \pm 1;\gamma;z)$, และ $F(\alpha,\beta;\gamma \pm 1;z)$ เรียกว่าฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกติดกัน (contigous) กับ $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ เราสามารถใช้อนุกรมในสมการ (3.20) หาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ระหว่างฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกติดกันคือ

$$\left[\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)z\right]F(\alpha,\beta;\gamma;z) + \alpha(1-z)F(\alpha+1,\beta;\gamma;z) - (\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta;\gamma;z) = 0$$

$$(\gamma - \alpha - 1)F(\alpha,\beta;\gamma;z) + \alpha F(\alpha+1,\beta;\gamma;z) - (\gamma-1)F(\alpha,\beta;\gamma-1;z) = 0$$

(2) ตัวอย่างที่ผ่านมาแสดงการหาฐานหลักของผลเฉลยที่ $z = 1$ จากผลเฉลยปรกติของ HDE ที่ $z = 0$ ซึ่งก็คือ $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ **เราสามารถแสดงให้เห็นว่าฐานหลักของผลเฉลยที่ $z = \infty$ สามารถหาได้จากฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกเช่นกัน**

สมการ (3.14) แนะว่าฟังก์ชันในรูปแบบ

$$v(z) = z^r F\left(\alpha_1,\beta_1;\gamma_1;\frac{1}{z}\right) \equiv z^r w\left(\frac{1}{z}\right)$$

โดยที่ r, α_1, β_1 และ γ_1 เป็นพารามิเตอร์ที่เราจะต้องหาค่า เพื่อความสะดวกเราจะให้ $t \equiv 1/z, dw/dt \equiv \dot{w}$ และ $d^2w/dt^2 \equiv \ddot{w}$ เนื่องจาก w เป็นผลเฉลยของ HDE ดังนั้นเราจึงได้

$$\ddot{w} = -\frac{[\gamma - (\alpha+\beta+1)t]\dot{w}}{t(1-t)} + \frac{\alpha\beta}{t(1-t)}w$$

ในเทอมของ $z = 1/t$ จะได้

$$\ddot{w} = \frac{[\gamma z^2 - (\alpha+\beta+1)z]\dot{w}}{1-z} - \frac{\alpha\beta z^2}{1-z}w$$

จากการใช้ความสัมพันธ์

$$\frac{df}{dz}=\left(\frac{df}{dt}\right)\frac{dt}{dz}=-\left(\frac{1}{z^2}\right)\frac{df}{dt}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ v(z) เทียบกับ z จะกลายเป็น

$$v'\equiv\frac{dv}{dz}=rz^{r-1}w-z^{r-2}\dot{w}$$

$$v''\equiv\frac{d^2v}{dz^2}=r(r-1)z^{r-2}w-2(r-1)z^{r-3}\dot{w}+z^{r-4}\ddot{w}$$

คูณสมการของ v'' ด้วย $z(1-z)$ จะได้

$$z(1-z)v''=r(r-1)z^{r-1}(1-z)w-2(r-1)z^{r-2}(1-z)\dot{w}+zr^{r-3}(1-z)\ddot{w}$$

หาค่า $\dot{w}$ จากสมการสำหรับ v' จะได้

$$\dot{w}=z^{2-r}(rz^{r-1}w-v')=z^{2-r}\left(\frac{rv}{z}-v'\right)$$

และแทนค่าสำหรับ $w,\dot{w}$ และ $\ddot{w}$ ในเทอมของ v จะทำให้

$$z(1-z)v''+[1-\alpha-\beta-2r-(-2-\gamma-2r)z]v'-[r^2-r+r\gamma-\frac{1}{z}(r+\alpha)(r+\beta)]v=0$$

ซึ่งจะกลายเป็น HDE ถ้า $r=-\alpha$ หรือ $r=-\beta$

สำหรับ $r=-\alpha$, พารามิเตอร์อื่น ๆ คือ $\alpha_1=\alpha, \beta_1=1+\alpha-\gamma$ และ $\gamma_1=\alpha-\beta+1$

$$\therefore \quad \boxed{v_1(z)=z^{-\alpha}F(\alpha,1+\alpha-\gamma;\alpha-\beta+1;\frac{1}{z})}$$

และสำหรับ $r=-\beta$, พารามิเตอร์อื่น ๆ คือ $\alpha_1=\beta,\beta_1=1+\beta-\gamma$ และ $\gamma_1=\beta-\alpha+1$

$$\therefore \quad \boxed{v_2(z)=z^{-\beta}F(\beta,1+\beta-\gamma;\beta-\alpha+1;\frac{1}{z})}$$

ทั้งสองสมการนี้ก่อให้เกิดฐานหลักของผลเฉลยของ HDE ซึ่งใช้ได้รอบ ๆ $z = \infty$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาแสดงว่ามีความเป็นไปได้ที่จะหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกที่มีพารามิเตอร์แตกต่างกันและตัวแปรอิสระ**คุมเมอร์** (Kummer) ได้แสดงให้เห็นว่าจะมีผลเฉลยที่แตกต่างกันจำนวน 24 ค่าของ HDE ผลเฉลยเหล่านี้ขึ้นต่อกันแบบเชิงเส้น และเรียกว่า **ผลเฉลยของคุมเมอร์** ผลเฉลย 6 ค่าจากทั้งหมดได้แสดงให้ดูแล้วจากตัวอย่างทั้งสองที่ผ่านมา ความสัมพันธ์ที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือ ถ้าหาก $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ เป็นผลเฉลยของ HDE ดังนั้น

$$z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,1-\alpha;1-\alpha+\beta;\frac{1}{z}) \tag{3.21}$$

จะเป็นผลเฉลยของ HDE ด้วย

หลาย ๆ ฟังก์ชันที่ปรากฏในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์จะสัมพันธ์กับฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริก หรือแม้กระทั่งบางฟังก์ชันมูลฐานสามารถกำหนดในเทอมของฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกที่มีพารามิเตอร์เหมาะสม ตัวอย่างเช่น เมื่อ $\beta = \gamma$, เราได้

$$F(\alpha,\beta;\beta;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)} z^k = (1-z)^{-\alpha}$$

และในทำนองเดียวกัน $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};z^2\right) = \frac{1}{z}\sin^{-1} z$

$$F(1,1;2;-z) = \frac{1}{z}\ell n(1+z)$$

อย่างไรก็ตาม โดยทั่วไปแล้วฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกมักเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันที่ไม่เป็นมูลฐานที่ปรากฏในฟิสิกส์ เช่น :

ฟังก์ชันจาโคบี (Jacobi functions)

ฟังก์ชันจาโคบีเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\frac{du}{dx} + \lambda(\lambda+\alpha+\beta+1)u = 0 \tag{3.22}$$

ถ้าให้ $x \equiv 1-2z$ สมการ (3.22) จะเปลี่ยนไปเป็น HDE ที่มีพารามิเตอร์เป็น $\alpha_1 = \lambda$, $\beta_1 = \lambda+\alpha+\beta+1$ และ $\gamma_1 = 1+\alpha$ ผลเฉลยของสมการ (3.22) เรียกว่าฟังก์ชันจาโคบี**ชนิดที่หนึ่ง** (Jacobi functions of the first kind) ด้วยค่าการเป็นปรกติที่เหมาะสมคือ

$$P_\lambda^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\lambda+\alpha+1)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\alpha+1)} F(-\lambda, \lambda+\alpha+\beta+1; 1+\alpha; \frac{1-z}{2}) \qquad (3.23)$$

เมื่อ $\lambda = n$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มค่าบวก $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ จะเป็นพหุนามระดับขั้น n ด้วยการกระจายเป็น

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{z-1}{2}\right)^k$$

ซึ่งเป็นพหุนามจาโคบี การแปลง $x = 1-2z$ ทำให้จุด $z = 0$ และ $z = 1$ เปลี่ยนไปเป็นจุด $x = 1$ และ $x = -1$ ตามลำดับ ดังนั้นจุดเอกฐานปรกติของฟังก์ชันจาโคบีชนิดที่หนึ่งจึงอยู่ที่ ± 1 และ ∞

เซตของผลเฉลยของสมการ (3.22) ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันอีกกลุ่มหนึ่งหาได้โดยการใช้สมการ (3.21) ผลเฉลยชุดนี้เรียกว่า **ฟังก์ชันจาโคบีชนิดที่สอง** (Jacobi functions of the second kind) หรือ $Q_\lambda^{(\lambda,\beta)}(z)$

$$Q_\lambda^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{2^{\lambda+\alpha+\beta}\Gamma(\lambda+\alpha+1)\Gamma(\lambda+\beta+1)}{\Gamma(2\lambda+\alpha+\beta+2)(z-1)^{\lambda+\alpha+1}(z+1)^{\beta}} F\left(\lambda+\alpha+1, \lambda+1; 2\lambda+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-z}\right) \qquad (3.24)$$

การเลือกค่าพารามิเตอร์ α, β ในพหุนามจาโคบีที่เหมาะสมจะให้พหุนามที่แตกต่างและเรียกแตกต่างกันไป เช่น

พหุนามเลอจองด์หรือฟังก์ชันเลอจองด์ (Legendre polynomials or Legendre functions) เกิดจากการกำหนดให้ $\alpha = \beta = 0$ และเรียกว่า **ฟังก์ชันเลอจองด์ชนิดที่หนึ่ง** :

$$P_\lambda(z) \equiv P_\lambda^{(0,0)}(z) = F\left(-\lambda, \lambda+1; 1; \frac{1-z}{2}\right) \qquad (3.25)$$

หรือเรียกว่า **ฟังก์ชันเลอจองด์ชนิดที่สอง** :

$$Q_\lambda(z) \equiv Q_\lambda^{(0,0)}(z) = \frac{2^\lambda[\Gamma(\lambda+1)]^2}{\Gamma(2\lambda+2)(z-1)^{\lambda+1}} F\left(\lambda+1, \lambda+1; 2\lambda+2; \frac{2}{1-z}\right) \tag{3.26}$$

พหุนามกีเกนเบาเวร์ (Gegenbauer polynomials or functions or ultraspherical functions) เกิดจากการกำหนดให้ $\alpha = \beta = \mu - \frac{1}{2}$

$$C_\lambda^\mu(z) \equiv \frac{\Gamma(\lambda+2\mu)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(2\mu)} F\left(-\lambda, \lambda+2\mu; \mu+\frac{1}{2}, \frac{1-z}{2}\right) \tag{3.27}$$

พหุนามเชบีเชฟ (Tschebychev polynomial or function) ซึ่งอาจแบ่งออกเป็น **พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่ง** เมื่อ $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ แทนด้วย $T_n(z)$ และ**พหุนามเชบีเชฟชนิดที่สอง** เมื่อ $\alpha = \beta = +\frac{1}{2}$ แทนด้วย $U_n(z)$

$$T_\lambda(z) = F\left(-\lambda, \lambda; \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right) \tag{3.28}$$

$$U_\lambda(z) = (\lambda+1)F\left(-\lambda, \lambda+2; \frac{3}{2}; \frac{1-z}{2}\right) \tag{3.29}$$

เหตุผลที่เราต้องเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกเพราะหลาย ๆ ฟังก์ชันที่ปรากฏในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์มักเป็นกรณีพิเศษของ $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ ตัวอย่างเช่นสมการเลอจองด์ในตารางที่ 2.1 ของบทที่ 2 มีจุดเอกฐานปรกติ 3 จุดคือ -1, +1, และ ∞ สิ่งนี้ประกันได้ว่า ฟังก์ชันเลอจองด์เป็นกรณีพิเศษของฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริก **ถ้า α หรือ β เป็นจำนวนเต็มค่าลบ ฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกจะกลายเป็นพหุนามจาโคบี** พหุนามจาโคบีจะปรากฏในการศึกษาเกี่ยวกับการแปลงของ spherical harmonics ภายใต้การหมุนของพิกัด นอกจากนี้ในหัวข้อต่อไปเราจะกล่าวถึงฟังก์ชันที่ใกล้เคียงกับฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกที่เรียกว่า **confluent hypergeometric function** ซึ่งรวมกรณีพิเศษของหลาย ๆ ฟังก์ชันที่น่าสนใจในฟิสิกส์ เช่น ฟังก์ชันเบสเซล ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์สำหรับศักย์คูลอมบ์ (พหุนามลาแกร์) ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์สำหรับศักย์ของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก (พหุนามแอร์มิต) **ปริพันธ์เฟรสแนล** (Fresnel integrals) ของทัศนศาสตร์ (optics) และอื่น ๆ อีกมากมาย

3.6 ฟังก์ชันที่คล้อยตามฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริก

การแปลง $x = 1 - 2z$ ช่วยย้ายจุดเอกฐานปรกติของ HDE ด้วยปริมาณจำกัดผลก็คือฟังก์ชันตัวใหม่ยังคงมีจุดเอกฐานปรกติ 2 จุด เช่นเดิมคือ $z = \pm 1$ ในระนาบเชิงซ้อน ในบางกรณีที่น่าสนใจ เช่น แรงสู่ศูนย์กลาง จุดกำเนิดซึ่งสมนัยกับ $r = 0$ ในพิกัดทรงกลมเท่านั้นที่เป็นจุดเอกฐาน ถ้าเราต้องการสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ได้กับกรณีเช่นนี้ เราต้องเลื่อนจุดเอกฐาน $z = 1$ ไปสู่ที่อนันต์ ซึ่งสามารถทำได้โดยการแทนค่า $t = rz$ ใน HDE แล้วให้ลิมิต $r \to \infty$ ดังนั้น

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{\gamma}{t} + \frac{1-\gamma+\alpha+\beta}{t-r}\right)\frac{dw}{dt} + \frac{\alpha\beta}{t(t-r)}w = 0 \tag{3.30}$$

ถ้าเราให้ลิมิต $r \to \infty$ โดยให้ α, β และ γ ยังคงมีค่าจำกัดเช่นเดิม สมการ (3.30) จะลดลงสู่สมการมูลฐาน

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{dw}{dt} = 0$$

เพื่อให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่ใช่มูลฐาน เราจำเป็นต้องจัดการกับพารามิเตอร์โดยให้บางส่วนเข้าสู่ค่าอนันต์ เราต้องการ γ ยังคงเท่าเดิมเพราะปรากฏในเทอมแรกของสัมประสิทธิ์ของ dw/dt ดังนั้นเราจึงให้ β หรือ α เข้าสู่ค่าอนันต์ ผลที่ได้จะเหมือนกันเพราะ α และ β ปรากฏแบบสมมาตรในสมการ เราจึงเลือก $\beta = r \to \infty$ สมการ (3.30) ที่ t มีค่าจำกัดจึงกลายเป็น

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \left(\frac{\gamma}{t} - 1\right)\frac{dw}{dt} - \frac{\alpha}{t}w = 0$$

เมื่อคูณตลอดด้วย t แล้วเปลี่ยนตัวแปรอิสระกลับไปสู่ z อีกครั้งจะได้

$$zw''(z) + (\gamma - z)w'(z) - \alpha w(z) = 0 \tag{3.31}$$

ซึ่งเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ที่คล้อยตามไฮเพอร์จีออเมตริก** (confluent hypergeometric differentiall equation) หรือ CHDE

สังเกตว่าจุดที่ระยะอนันต์ไม่เป็นจุดเอกฐานปรกติของสมการ **(3.31)** อีกต่อไป อย่างไรก็ตาม เรายังคงสามารถหาผลเฉลยของ CHDE ในรูปแบบของอนุกรมกำลังเช่นเดิมได้ เนื่องจาก $z = 0$ ยัง

คงเป็นจุดเอกฐานปรกติของ (CHDE เราสามารถกระจายรอบ ๆ จุดนี้ เลขชี้กำลังลักษณะเฉพาะคือ 0 และ $1-\gamma$ เหมือนเดิม ดังนั้นจึงมีผลเฉลยวิเคราะห์สำหรับ CHDE ที่จุดกำเนิดซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันที่คล้อยตามไฮเพอร์จีออเมตริก (confluent hypergeometric function) และเราจะแทนด้วย $\Phi(\alpha,\gamma;z)$ เนื่องจาก $z=0$ เป็นจุดเอกฐานของ CHDE แต่เพียงอย่างเดียว ฟังก์ชัน $\Phi(\alpha,\gamma;z)$ จึงเป็นฟังก์ชันทั่ว (entire function)

เราสามารถกระจายอนุกรมของ $\Phi(\alpha,\gamma;z)$ ได้โดยตรงจากสมการ (3.20) และใช้ความจริงคือ

$$\Phi(\alpha,\gamma;z)=\lim_{\beta\to\infty}F\left(\alpha,\beta;\gamma;\frac{z}{\beta}\right)$$

ดังนั้น

$$\Phi(\alpha,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\gamma+k)\,\Gamma(k+1)}z^{k} \tag{3.32}$$

ซึ่งเรียกว่า **อนุกรมที่คล้อยตามไฮเพอร์จีออเมตริก** (confluent hypergeometric series)

ผลเฉลยที่สองของ CHDE สามารถหาได้ดังเช่นกรณี HDE กล่าวคือถ้า $1-\gamma$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น

$$\begin{aligned} & z^{1-\gamma}\lim_{\beta\to\infty}F\left(\beta-\gamma+1,\alpha-\gamma+1;2-\gamma;\frac{z}{\beta}\right) \\ &\quad = z^{1-\gamma}\lim_{\beta\to\infty}F\left(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;\frac{z}{\beta}\right) \\ &\quad = z^{1-\gamma}\Phi(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z) \end{aligned}$$

โดยที่ α และ β สลับที่กันได้เพราะ F มีลักษณะสมมาตรในพารามิเตอร์ 2 ตัวแรก ดังนั้น ผลเฉลยใดๆของ CHDE จึงสามารถเขียนเป็นผลบวกเชิงเส้นของ$\Phi(\alpha,\gamma;z)$ และ $z^{1-\gamma}\Phi(\alpha-\gamma+1,2-\gamma;z)$

อีกรูปแบบหนึ่งของสมการที่คล้อยตามไฮเพอร์จีออเมตริก หาได้โดยการเปลี่ยนตัวแปรอิสระจาก z ไปเป็น z^2 ดังนั้น

$$w''(z^2)+\left[\frac{2\gamma-1}{z}-2z\right]w'(z^2)-4\alpha w(z^2)=0 \tag{3.33}$$

และเช่นเดียวกับฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริก ฟังก์ชันติดกันมีอยู่จริงเมื่อพารามิเตอร์ α และ γ เปลี่ยนแปลงไป ±1 เมื่อรวมกับกรณีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ทั้งสอง เราจึงมีความเป็นไปได้ 8 กรณี ฟังก์ชันเดิมและคู่ของฟังก์ชันติดกัน ทำให้เราสามารถหาสมการได้ทั้งสิ้น 28 สมการ ความ

สัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับฟังก์ชันเบสเซล ฟังก์ชันแอร์มิต และฟังก์ชันลาแกร์เป็นกรณีพิเศษของสมการเหล่านี้

เนื่องจากอนุกรมไฮเพอร์จีออเมตริกในสมการ (3.20) สามารถเขียนในตัวแทนอินทิกรัลได้เป็น

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}\,dt\ (R_e\gamma > R_e\beta > 0)$$

โดยการเปลี่ยน β เป็น α เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\Phi(\alpha,\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}e^{tz}dt$$

การกำหนดในตัวแทนอินทิกรัลจะได้ศึกษาในรายละเอียดอีกครั้งในบทต่อ ๆ ไป

จากรูปแบบของสมการที่คล้อยตามไฮเพอร์จีออเมตริกและลักษณะของภาวะเอกฐานจะเห็นได้ว่าฟังก์ชั่นที่คล้อยตามไฮเพอร์จีออเมตริกมีประโยชน์ในการเป็นตัวแทนของฟังก์ชันพิเศษในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์จำนวนมากมาย ตัวอย่างเช่น

$$e^z = \Phi(\alpha,\alpha;z) \tag{3.34}$$

$$\mathrm{erf}z = \frac{2z}{\sqrt{\pi}}\Phi\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2};-z^2\right) \tag{3.35}$$

ฟังก์ชันเบสเซล;

$$J_\upsilon(z) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\upsilon e^{-iz}\Phi\left(\upsilon+\frac{1}{2},2\upsilon+1;2iz\right) \tag{3.36}$$

ฟังก์ชันแอร์มิต;

$$H_{2\upsilon}(z) = (-1)^\upsilon\frac{(2\upsilon)!}{\upsilon!}\Phi\left(-\upsilon,\frac{1}{2};z^2\right) \tag{3.37}$$

$$H_{2\upsilon+1}(z) = (-1)^\upsilon\frac{2(2\upsilon+1)!}{\upsilon!}z\Phi\left(-\upsilon,\frac{3}{2};z^2\right) \tag{3.38}$$

พหุนามลาแกร์ ;

$$L_n^{\alpha}(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}\Phi(-n,\alpha+1;z) \tag{3.39}$$

มีประเด็นที่น่าสนใจเกี่ยวกับผลเฉลยของสมการที่คล้อยตามไฮเพอร์จีออเมตริก ดังนี้ ถ้า γ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ผลเฉลย 2 ค่า ที่เป็นอิสระต่อกันคือ

$$w_1(z) = \Phi(\alpha,\gamma;z)$$
$$w_2(z) = z^{1-\gamma}\Phi(1+\alpha-\gamma,\ 2-\gamma;\ z)$$

ถ้า $\gamma = 0,-1,-2,\ldots$ $w_1(z)$ จะกระจายออกไป เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\lim_{\gamma\to -n}\frac{\Phi(\alpha,\gamma;z)}{\Gamma(\gamma)} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha)}\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\Phi(\alpha+n+1,n+2;z)$$

ถ้า $\gamma = 1, w_1(z) = w_2(z)$ ถ้า $\gamma = 2,3,4,\ldots$ $w_2(z)$ จะกระจายออกไปและเมื่อทำให้มีค่าจำกัดจะเป็นสัดส่วนกับ $w_1(z)$ ดังนั้น ถ้าเราเสนอฟังก์ชัน

$$\frac{1}{\sin\pi\gamma}\left[\frac{\Phi(\alpha,\gamma;z)}{\Gamma(\gamma)}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} - \frac{z^{1-\gamma}\Phi(1+\alpha-\gamma,2-\gamma;z)}{\Gamma(2-\gamma)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right]$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีพฤติกรรมที่ดี (well behaved) เมื่อ γ เข้าสู่จำนวนเต็มและก่อให้เกิดผลเฉลยที่สองของสมการที่คล้อยตามไฮเพอร์จีออเมตริก

ถ้าเราให้ $w(z) = uz^{-\gamma/2}e^{z/2}$, เราจะได้สมการ

$$u'' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\frac{\gamma}{2}-\alpha}{z} + \frac{\frac{1}{2}\gamma\left(1-\frac{1}{2}\gamma\right)}{z^2}\right]u = 0$$

และถ้าให้ $n = \frac{\gamma}{2} - \alpha$ และ $m = \frac{1}{2}(\gamma-1)$ เราจะได้

$$u'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2}\right)u = 0 \tag{3.40}$$

สมการเชิงอนุพันธ์นี้เรียกว่า **สมการวิทเทคเกอร์** (Whittaker's equation) และมีผลเฉลยเป็น

$$u_1 = z^{m+1/2}e^{-z/2}\Phi\left(m + \frac{1}{2} - n, 2m + 1; z\right)$$
$$u_2 = z^{-m+1/2}e^{-z/2}\Phi\left(-m + \frac{1}{2} - n, -2m + 1; z\right)$$

ฟังก์ชันทั้งสองนี้ไม่สมบูรณ์หรือใช้ไม่ได้ ถ้า γ **เป็นจำนวนเต็ม หรืออีกนัยหนึ่งเมื่อ** 2m **เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นเราจึงนิยามฟังก์ชันวิทเทคเกอร์** (Whittaker function)

$$W_{n,m} = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m - n\right)}u_1 + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m - n\right)}u_2 \tag{3.41}$$

$W_{n,m}(z)$ และ $W_{-n,m}(-z)$ เป็นผลเฉลยของสมการวิทเทคเกอร์ สำหรับทุกค่าของ n และ m

เราจะสรุปความสัมพันธ์ 2 ประการโดยไม่มีการพิสูจน์คือ

1. **การแปลงคุมเมอร์** (Kummer's transformation) :

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = e^z\Phi(\gamma - \alpha, \gamma; -z) \tag{3.42}$$

2. **สูตรเชิงเส้นกำกับ** (asymptotic formulas) : สำหรับ $|z|$ ค่ามาก ๆ

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) \sim \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^z z^{\alpha-\gamma} & \operatorname{Re} z > 0 \\ \\ \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} & \operatorname{Re} z < 0 \end{cases} \tag{3.43}$$

เราได้พิจารณาเกี่ยวกับคุณลักษณะของสมการและฟังก์ชันที่คล้อยตามไฮเพอร์จีออเมตริกมาพอสมควรแล้ว เพื่อให้เราเกิดทักษะและการนำไปใช้แก้สมการที่เรามักประสบในฟิสิกส์ทฤษฎีได้ดียิ่งขึ้น เราลองพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

สมการชเรอดิงเงอร์ที่เป็นอิสระต่อเวลาในหน่วยของ $\hbar = 1$ คือ

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi = E\psi$$

ในกรณีของอะตอมที่คล้ายกันกับไฮโดรเจน $V(r) = -Ze^2/r$ โดยที่ Z คือ เลขอะตอมและสมการกลายเป็น

$$\nabla^2\psi + \left(2mE + \frac{2mZe^2}{r}\right)\psi = 0$$

ส่วนของสมการในเชิงรัศมีได้กล่าวไว้แล้วในเรื่องการแยกตัวแปรของบทที่ 1 คือสมการ (1.45) ด้วยค่า $f(r) = 2mE + 2mZe^2/r$ ถ้าเราให้ $u \equiv r(R)(r)$ เราอาจเขียน

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\lambda + \frac{a}{r} - \frac{b}{r^2}\right)u = 0 \qquad (1)$$

โดยที่ $\lambda \equiv 2mE$, $a = 2mZe^2$ และ $b = \ell(\ell+1)$ สมการนี้อาจทำให้ง่ายขึ้นอีกโดยการให้ $r \equiv kz$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ ที่ต้องหาค่าอีกครั้ง ดังนั้น

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\lambda k^2 + \frac{ak}{z} - \frac{b}{z^2}\right)u = 0$$

ถ้าเราเลือก $\lambda k^2 = -1/4$ จะทำให้

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{a/2\sqrt{-\lambda}}{z} - \frac{b}{z^2}\right)u = 0$$

สมการในรูปแบบเช่นนี้ สามารถแปลงไปสู่ CHDE ได้โดยการแทนค่า

$$u(z) = z^{\mu}e^{-\upsilon z}f(z)$$

และถ้าให้ $a' \equiv a/2\sqrt{-\lambda}$ ดังนั้น

$$\frac{d^2f}{dz^2}+\left(\frac{2\mu}{z}-2\upsilon\right)\frac{df}{dz}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{\mu(\mu-1)}{z^2}-\frac{2\mu\upsilon}{z}+\frac{a'}{z}-\frac{b}{z^2}+\upsilon^2\right]f=0 \qquad (2)$$

และถ้าเลือกต่อไปให้ $\upsilon^2=\frac{1}{4}$ และ $\mu(\mu-1)=b$ จะทำให้สมการล่าสุดกลายเป็น

$$f''+\left(\frac{2\mu}{z}-2\upsilon\right)f'-\frac{2\mu\upsilon-a'}{z}f=0$$

ซึ่งมีรูปแบบเช่นเดียวกับสมการ (3.31)

ในกลศาสตร์ควอนตัมเราต้องการให้ $u(z)\to 0$ เมื่อ $z\to\infty$ ดังนั้น $\upsilon=\frac{1}{2}$ และในทำนองเดียวกัน

$$b=\ell(\ell+1)\ \Rightarrow\ \mu=-\ell \ \text{ หรือ } \ \mu=\ell+1$$

นอกจากนี้เรายังต้องการ $u(0)$ มีค่าจำกัด นั่นคือ ฟังก์ชันคลื่นไม่กระจายออกไปที่ $r=0$ ซึ่งหมายความว่า $\mu=\ell+1$ ดังนั้นเราจึงได้

$$f''+\left(\frac{2\mu}{z}-1\right)f'-\frac{\mu-a'}{z}f=0, \qquad \mu=\ell+1$$

เมื่อคูณตลอดด้วย z จะได้

$$zf''+(2\mu-z)f'-(\mu-a')f=0$$

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (3.31) แสดงว่า f เป็นสัดส่วนกับ $\Phi(\mu-a',2\mu;z)$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ (1) สามารถเขียนได้เป็น

$$u=Cz^{\ell+1}e^{-z/2}\Phi(\ell+1-a',2\ell+2;z)$$

เมื่อใช้ความรู้ที่ได้จากหัวข้อที่ 2.3.3 เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าฟังก์ชัน

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{โดยที่} \quad c_{n+2}=\frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)}c_n$$

จะเข้าสู่ค่าอนันต์ได้รวดเร็วเช่นเดียวกับ e^{x^2} ดังนั้นผลคูณของ $e^{-z/2}\Phi(\ell+1-a',2\ell+2;z)$ จึงเป็นค่าอนันต์เว้นเสียแต่อนุกรมกำลังที่แทน Φ เป็นอนุกรมรู้จบหรือพหุนาม ซึ่งเกิดขึ้นได้เมื่อ

$$\ell+1-a'=-N \tag{3}$$

สำหรับจำนวนเต็ม $N\geq 0$ ในกรณีดังกล่าวเราจึงให้นิยาม **พหุนามลาแกร์**

$$L_n^j(z)\equiv\frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(j+1)}\Phi(-N,j+1;z) \quad , \qquad j=2\ell+1$$

เงื่อนไขของสมการ (3) แสดงกฎการเป็นควอนตัม (quantization rule) สำหรับระดับพลังงานของอะตอมที่คล้ายไฮโดรเจน จากนิยามของ a' เราได้ $a'=a/2\sqrt{-\lambda}\ =\ N+\ell+1\equiv n$ โดยที่ $n\geq 1$ ทำให้

$$\lambda=-\frac{a^2}{4n^2}=-\frac{4m^2Z^2e^4}{4n^2} \qquad , \qquad n\geq 1$$

หรือ

$$E=-Z^2\left(\frac{mc^2}{2}\right)\alpha\frac{1}{n^2}$$

โดยที่ $\alpha=e^2/\hbar c=1/137$ เรียกว่า **fine structure constant** เมื่อแทนค่าคงตัวทุกค่า เราสามารถเขียนสมการในรูปแบบที่ให้ค่าพลังงานในหน่วย eV (electron volts) คือ

$$E=-\frac{13.6\,Z^2}{n^2}\ \text{eV} \quad , \qquad n\geq 1 \tag{4}$$

ผลเฉลยของสมการ (1) จึงเป็น

$$R_{n,\ell}(r)\equiv\frac{u_{n,\ell}(r)}{r}=Cr^{\ell}e^{-Zr/na_0}\Phi\left(-n+\ell+1,2\ell+2;\frac{2Zr}{na_0}\right)$$

และผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\psi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} C_{n\ell m} Y_{\ell m}(\theta,\phi) r^{\ell} e^{-Zr/na_0} \Phi\left(-n+\ell+1, 2\ell+2; \frac{2Zr}{na_0}\right)$$

โดยที่ $a_0 = \hbar^2 / me^2 = 0.529 \times 10^{-8}$ cm คือ **รัศมีโบร์** (Bohr radius)
สมการเบสเซลซึ่งได้กล่าวมาบ้างแล้วในบทที่ 2 มักเขียนเป็น

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left(1 - \frac{\upsilon^2}{z^2}\right) w = 0 \qquad (3.44)$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาถ้าเราแทน $u = z^{\mu} e^{-\eta z} f(z)$ จะสามารถแปลงสมการ (3.44) ไปเป็น

$$f'' + \left(\frac{2\mu+1}{z} - 2\eta\right) f' + \left[\frac{\mu^2 - \upsilon^2}{z^2} - \frac{\eta(2\mu+1)}{z} + \eta^2 + 1\right] f = 0$$

และหากกำหนดให้ $\mu = \upsilon$ และ $\eta = i$ จะกลายเป็น

$$f'' + \left(\frac{2\upsilon+1}{z} - 2i\right) f' - \frac{(2\upsilon+1)i}{z} f = 0$$

รวมทั้งกำหนดให้ $2iz = t$ จะได้

$$t\frac{d^2 f}{dt^2} + [(2\upsilon+1) - t]\frac{df}{dt} - \left(\upsilon + \frac{1}{2}\right) f = 0$$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการ (3.31) ด้วยค่า $\alpha = \upsilon + \frac{1}{2}$ และ $\gamma = 2\upsilon + 1$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเบสเซล (3.44) สามารถเขียนเป็นค่าคงตัวคูณด้วย $z^{\upsilon} e^{-iz} \Phi\left(\upsilon + \frac{1}{2}, 2\upsilon+1; 2iz\right)$ เพื่อให้ค่าเป็นปรกติที่เหมาะสม เราจึงนิยาม **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง** (Bessel function of the first kind) อันดับ υ เป็น

$$J_\upsilon(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\upsilon+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon} e^{-iz}\Phi\left(\upsilon+\frac{1}{2}, 2\upsilon+1; 2iz\right) \tag{3.45}$$

โดยการใช้สมการ (3.32) และการกระจายสำหรับ e^{-iz} เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$J_\upsilon(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\upsilon+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad , \quad \upsilon \geq 0 \tag{3.46}$$

เราเลือกให้ υ ต้องไม่เป็นค่าลบเพื่อให้มั่นใจว่า $J_\upsilon(z)$ มีค่าแจ่มชัดที่ $z = 0$ ดังนั้น ดังได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น, $J_\upsilon(z)$ จึงเป็นฟังก์ชันทั่วถ้า $\upsilon \geq 0$ ผลเฉลยที่สองที่เป็นอิสระเชิงเส้นสามารถหาได้เช่นเคยและเป็นสัดส่วนกับ

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon} e^{-iz} z^{1-(2\upsilon+1)}\Phi\left(\upsilon+\frac{1}{2}-(2\upsilon+1)+1, 2-(2\upsilon+1); 2iz\right) \\
&= C\left(\frac{z}{2}\right)^{-\upsilon} e^{-iz}\Phi\left(-\upsilon+\frac{1}{2}, -2\upsilon+1; 2iz\right) \\
&= CJ_{-\upsilon}(z)
\end{aligned}$$

เพื่อให้ $1-\gamma \equiv 1-(2\upsilon+1) = -2\upsilon$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม หาก υ เป็นจำนวนเต็ม $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ **ดังนั้น เมื่อ υ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ผลเฉลยทั่วไปจึงอยู่ในรูปแบบ** $AJ_\upsilon(z) + BJ_{-\upsilon}(z)$

ต่อไปเราจะต้องหาผลเฉลยที่สองที่เป็นอิสระเชิงเส้นเมื่อ υ เป็นจำนวนเต็มและค่าของ n ก่อนอื่นเราจะนิยาม

$$Y_\upsilon(z) \equiv \frac{\left[J_\upsilon(z)\cos\upsilon\pi - J_{-\upsilon}(z)\right]}{\sin\upsilon\pi} \tag{3.47}$$

ซึ่งเรียกว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สอง หรือฟังก์ชันนอยมันน์** (Bessel function of the second kind or Neumann function) สำหรับ υ ที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม ฟังก์ชันนี้เป็นผลบวกเชิงเส้นของผลเฉลยอิสระเชิงเส้น J_υ และ $J_{-\upsilon}$ สำหรับ υ ที่เป็นจำนวนเต็ม **ฟังก์ชันนี้จะยังไม่กำหนด** (indeterminate) ดังนั้น เราจะใช้**หลักเกณฑ์โลปีตาล** (l'Hopital's rule) และนิยาม

$$Y_n(z) \equiv \lim_{\upsilon\to n} Y_\upsilon(z) = \frac{1}{\pi}\lim_{\upsilon\to n}\left[\frac{\partial J_\upsilon}{\partial\upsilon} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\upsilon}}{\partial\upsilon}\right]$$

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (3.46) เทียบกับ υ จะได้

$$\frac{\partial J_\upsilon}{\partial \upsilon} = J_\upsilon \ell n\left(\frac{z}{2}\right) - \left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Psi(\upsilon+k+1)}{k!\Gamma(\upsilon+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

โดยที่ $\Psi(z) \equiv (d/dz)\ell n\Gamma(z)$ และในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial J_{-\upsilon}}{\partial \upsilon} = -J_{-\upsilon}\ell n\left(\frac{z}{2}\right) + \left(\frac{z}{2}\right)^{-\upsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(-\upsilon+k+1)}{k!\Gamma(-\upsilon+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในนิยามของ $Y_n(z)$ จะได้

$$\begin{aligned} Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z)\ell n\left(\frac{z}{2}\right) &- \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Psi(n+k+1)}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \\ &- \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Psi(k-n+1)}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \end{aligned} \tag{3.48}$$

เนื่องจาก $Y_\upsilon(z)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อ $J_\upsilon(z)$ สำหรับทุกค่าใด ๆ ของ υ ซึ่งอาจเป็นจำนวนเต็มหรือไม่เป็นจำนวนเต็ม เราจึงถือว่า $\{J_\upsilon(z), Y_\upsilon(z)\}$ เป็นฐานหลักของผลเฉลยสำหรับสมการเบสเซล

ฐานหลักอื่น ๆ ของผลเฉลยจะกำหนดเป็น

$$\begin{aligned} H_\upsilon^{(1)}(z) &\equiv J_\upsilon(z) + iY_\upsilon(z) \\ H_\upsilon^{(2)}(z) &\equiv J_\upsilon(z) - iY_\upsilon(z) \end{aligned} \tag{3.49}$$

ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สาม หรือ ฟังก์ชันฮันเกล (Bessel function of the third kind or Hankel function)

เมื่อแทน z ด้วย iz ในสมการเบสเซลจะได้

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} - \left(1 + \frac{\upsilon^2}{z^2}\right) w = 0$$

ซึ่งฐานหลักของผลเฉลยประกอบด้วยพหุคูณของ $J_\upsilon(iz)$ และ $J_{-\upsilon}(iz)$ ดังนั้น **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งที่ถูกดัดแปร** (modified Bessel function of the first kind) จึงนิยามให้เป็น

$$I_\upsilon(z) \equiv e^{-i(\pi/2)\pi} J_\upsilon(iz) = \left(\frac{z}{2}\right)^\upsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\upsilon+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

ในทำนองเดียวกัน **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สามที่ถูกดัดแปร** จะนิยามเป็น

$$K_\upsilon(z) = \frac{\pi}{2\sin\upsilon\pi}[I_{-\upsilon}(z) - I_\upsilon(z)]$$

เมื่อ υ เป็นจำนวนเต็ม, n, $I_n = I_{-n}$ และ K_n จะยังไม่กำหนด ดังนั้นเราจึงนิยาม $K_n(z)$ ให้เป็น $\lim\limits_{\upsilon\to n} K_\upsilon(z)$ ซึ่งทำให้

$$K_n(z) = \frac{(-1)^n}{2}\lim_{\upsilon\to n}\left[\frac{\partial I_{-\upsilon}(z)}{\partial\upsilon} - \frac{\partial I_\upsilon(z)}{\partial\upsilon}\right]$$

$K_n(z)$ มีตัวแทนอนุกรมกำลังเป็น

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z)\ell n\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+n+1)}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$
$$+\frac{1}{2}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k-n+1)}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

เราสามารถหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับผลเฉลยของสมการเบสเซลได้ดังนี้ ถ้า $Z_\upsilon(z)$ เป็นผลเฉลยอันดับ υ ดังนั้น เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$Z_{\upsilon+1} = C_1 z^\upsilon \frac{d}{dz}\left[z^{-\upsilon} Z_\upsilon(z)\right]$$

และ

$$Z_{\upsilon-1} = C_2 z^{-\upsilon} \frac{d}{dz}\left[z^{\upsilon} Z_\upsilon(z)\right]$$

ถ้าเราเลือกค่าคงตัวในลักษณะที่ $Z_{\upsilon+1}$ และ $Z_{\upsilon-1}$ สอดคล้องกับสมการ (3.46) ดังนั้น $C_1 = -1$ และ $C_2 = 1$ อนุพันธ์ของสมการสำหรับ $Z_{\upsilon+1}$ และ $Z_{\upsilon-1}$ จะให้

$$Z_{\upsilon+1} = \left(\frac{\upsilon}{z}\right)Z_{\upsilon} - \frac{dZ_{\upsilon}}{dz} \tag{3.50}$$

$$Z_{\upsilon-1} = \left(\frac{\upsilon}{z}\right)Z_{\upsilon} + \frac{dZ_{\upsilon}}{dz} \tag{3.51}$$

และเมื่อรวม 2 สมการนี้เข้าด้วยกันจะให้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$Z_{\upsilon-1}(z) + Z_{\upsilon+1}(z) = \frac{2\upsilon}{z}Z_{\upsilon}(z) \tag{3.52}$$

โดยที่ $Z_{\upsilon}(z)$ อาจเป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่เท่าใดก็ได้

บทที่ 4
ข้อปัญหาค่าขอบ

4.1 เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น

การกำหนดหรือหาค่าผลเฉลยที่สมบูรณ์ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือ PDE จำเป็นต้องระบุเซตของ **เงื่อนไขขอบ** (boundary condition) และ**เงื่อนไขเริ่มต้น** (initial condition) ที่เหมาะสม ขอบ (boundary) ไม่จำเป็นต้องเป็นจุดแต่ขึ้นอยู่กับมิติซึ่งอาจเป็นเส้นหรือผิว สิ่งที่ทำให้ได้เซตที่เหมาะสมของเงื่อนไขขอบเป็นปัญหาที่ซับซ้อนสำหรับ PDE คำตอบขึ้นอยู่กับธรรมชาติของ PDE, ธรรมชาติของขอบ, และธรรมชาติของเงื่อนไขขอบ

ข้อปัญหาค่าขอบ (boundary value problem) จะเป็นเซตที่ถูกต้องถ้าหากมีผลเฉลยแต่เพียงค่าเดียวเท่านั้นสำหรับรูปแบบของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ทฤษฎีของ PDE จะให้ผลเกี่ยวกับ**การมีจริง** (existence) และ**ความเป็นได้อย่างเดียว** (uniqueness) ของผลเฉลยของข้อปัญหาค่าขอบแต่ผลที่ได้นี้จำเป็นต้องถูกจำกัดและซับซ้อนขึ้นโดยความหลากหลายของชนิดของสมการเชิงอนุพันธ์ และโดเมนที่ถูกนิยามไว้รวมทั้งชนิดของเงื่อนไขขอบ แทนที่เราจะเสาะหาทฤษฎีทั่วไปที่ใช้กับข้อปัญหาพิเศษเหล่านี้ เราจะมุ่งเข้าสู่การค้นหาผลเฉลยที่แท้จริงที่สามารถพิสูจน์ได้และเป็นคำตอบเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ในทฤษฎีและการประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญหรือ ODE และ PDE, ตัวแปรตามแทนด้วย u มักกำหนดให้ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบางประการที่เกี่ยวกับขอบของโดเมนที่สมการเชิงอนุพันธ์ระบุไว้ สมการที่แสดงเงื่อนไขขอบเหล่านั้นอาจเกี่ยวข้องกับค่าของอนุพันธ์ของ u รวมทั้งค่าของ u เองด้วยที่จุดบนขอบ นอกจากนี้บางเงื่อนไขเกี่ยวกับความต่อเนื่องของ u และค่าอนุพันธ์ของ u ในช่วงโดเมนและบนขอบจำเป็นต้องทราบด้วยเช่นกัน

เซตของข้อกำหนดเหล่านี้ก่อให้เกิดข้อปัญหาค่าขอบของฟังก์ชัน u เราใช้ถ้อยคำเหล่านี้เมื่อไรก็ตามที่สมการเชิงอนุพันธ์มีเงื่อนไขขอบกำหนดไว้ด้วยแม้ว่าเงื่อนไขอาจไม่เพียงพอที่จะมั่นใจได้ว่าการมีจริงของผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวของปัญหาจะปรากฏก็ตาม

พิจารณา 3 สมการเหล่านี้คือ

$$u''(x) - u(x) = -1 \qquad (0 < x < 1)$$
$$u'(0) = 0, \qquad u(1) = 0$$

ทั้ง 3 สมการก่อให้เกิดข้อปัญหาค่าขอบใน ODE สมการเชิงอนุพันธ์นิยามบนโดเมน $0 < x < 1$ โดยมีจุดขอบที่ $x = 0$ และ $x = 1$ ผลเฉลยของปัญหานี้ที่ควบคู่ไปกับค่าอนุพันธ์ซึ่งต่อเนื่องบนช่วงปิด $0 \le x \le 1$ คือ

$$u(x) = 1 - \frac{\cosh x}{\cosh 1}$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยตรงด้วยการแทนค่านี้ลงใน ODE ดังกล่าว

ในบางครั้งเรามักเขียน PDE โดยกำหนดตัวแปรอิสระเป็นตัวห้อยหรือดรรชนีล่าง เช่น ถ้า u เป็นฟังก์ชันของ x และ y, เราอาจเขียน $\partial u / \partial x$ เป็น u_x , $\partial^2 u / \partial x^2$ เป็น u_{xx} , $\partial^2 u / \partial y \partial x$ เป็น u_{xy} เป็นต้น และเรามักสมมติให้อนุพันธ์ย่อยของ u ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขกำหนดเป็น $u_{yx} = u_{xy}$ นอกจากนี้เราอาจเลือกใช้สัญลักษณ์ $u_x(c, y)$ แทนค่าของฟังก์ชัน $\partial u / \partial x$ บนเส้น $x = c$

ถ้า PDE กำหนดโดย

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

และด้วยเงื่อนไขขอบ 2 เงื่อนไขคือ

$$\begin{aligned} u(0,\ y) &= u_x(0,\ y) && (y > 0) \\ u(x,\ 0) &= \sin x + \cos x && (x \ge 0) \end{aligned}$$

เป็นข้อปัญหาค่าขอบใน PDE สมการเชิงอนุพันธ์นิยามในจตุภาคแรกของระนาบ xy เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าฟังก์ชัน

$$u(x,y) = e^{-y}(\sin x + \cos x)$$

เป็นผลเฉลยของปัญหานี้ ฟังก์ชันดังกล่าวและค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและสองต่อเนื่องในย่าน $x \ge 0,\ \ y \ge 0$

สมการเชิงอนุพันธ์ในฟังก์ชัน u, หรือเงื่อนไขขอบบน u จะเป็นเชิงเส้น ถ้าเป็นสมการระดับขั้นที่หนึ่งใน u และอนุพันธ์ของ u ดังนั้นเทอมของสมการเป็นทั้งฟังก์ชันของตัวแปรอิสระแต่เพียงอย่างเดียวซึ่งรวมทั้งค่าคงตัวด้วย หรือเป็นฟังก์ชันที่คูณด้วย u หรืออนุพันธ์ของ u โดยทั่วไปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นอันดับสองใน $u = u(x,y)$ จะมีรูปแบบเป็น

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \qquad (4.1)$$

โดยที่อักษร A ถึง G อาจเป็นค่าคงตัวหรือเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x และ y เท่านั้น สมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบใน 2 ตัวอย่างที่กล่าวมาแล้วเป็นแบบเชิงเส้น สมการเชิงอนุพันธ์

$$zu_{xx} + xy^2u_{yy} - e^xu_z = f(y,z)$$

เป็นเชิงเส้นใน $u = u(x,y,z)$ แต่สมการ

$$u_{xx} + uu_y = x$$

ไม่เป็นเชิงเส้นใน $u = u(x,y)$ เพราะเทอม uu_y ไม่เป็นระดับขั้นที่หนึ่ง

ข้อปัญหาค่าขอบเป็นเชิงเส้นถ้าสมการเชิงอนุพันธ์และทุกเงื่อนไขขอบเป็นเชิงเส้น ข้อปัญหาค่าขอบในตัวอย่างแรกและตัวอย่างที่สองจึงเป็นเชิงเส้น

ตัวแปรตาม u นอกจากจะเป็นฟังก์ชันของพิกัด x,y,z แล้ว ในบางครั้งยังเป็นฟังก์ชันของเวลา t ด้วย เช่นในกรณีของสมการความร้อน (heat equation) คือ

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = k\nabla^2 u \qquad (4.2)$$

จะเห็นว่า อุณหภูมิ $u = u(x,y,z,t)$, k คือค่าคงตัวเรียกว่า thermal diffusivity และ ∇^2 คือลาปลาเซียน ถ้าอุณหภูมิอยู่ในสถานะคงตัว (steady state) ซึ่งเป็นกรณีที่ u ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา สมการ (4.2) จะกลายเป็นสมการลาปลาซ

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \nabla^2 u = 0 \qquad (4.3)$$

ฟังก์ชัน $u = u(x, y, z)$ ที่มีค่าต่อเนื่องซึ่งควบคู่ไปกับค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและอันดับสองที่ต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการลาปลาซ (4.3) เรียกว่า **ฟังก์ชันฮาร์มอนิก** (harmonic function) ดังนั้นอุณหภูมิในสถานะคงตัวที่จุดภายในวัตถุซึ่งไม่มีการผลิตความร้อนเลยจึงแทนด้วยฟังก์ชันฮาร์มอนิกได้ ฟังก์ชันฮาร์มอนิกที่สำคัญในทฤษฎีสนามไฟฟ้าคือศักย์ไฟฟ้าสถิต $V(x, y, z)$ ในปริภูมิที่เป็นอิสระของประจุไฟฟ้า ศักย์ไฟฟ้าสถิตอาจเกิดจากการกระจายประจุไฟฟ้านอกบริเวณนั้นได้เช่นกัน ความจริงที่ว่า V เป็นฮาร์มอนิกฟังก์ชันเป็นผลจาก กฎกำลังสองผกผัน (inverse-square law) ของแรงดึงดูดหรือผลักกันระหว่างประจุ ในลักษณะเดียวกันนี้, ศักย์ความโน้มถ่วง (gravitational potential) ก็เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกในบริเวณของปริภูมิที่ไม่มีอนุภาคครอบครองอยู่

4.2 ชนิดของสมการและเงื่อนไขขอบ

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นอันดับสองตามสมการ (4.1) คือ

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

โดยที่ A, B, ..., G เป็นค่าคงตัวหรือเป็นฟังก์ชันของ x และ y สมการนี้อาจแยกออกเป็น 3 ชนิดขึ้นอยู่กับว่า $B^2 - 4AC$ เป็นบวก, ลบ, หรือเท่ากับศูนย์ :

ถ้า $B^2 - 4AC > 0$, เรียกว่า สมการไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic)
ถ้า $B^2 - 4AC < 0$, เรียกว่า สมการเชิงวงรี (elliptic)
ถ้า $B^2 - 4AC = 0$, เรียกว่า สมการเชิงพาราโบลา (parabolic)

การแยกออกเป็น 3 ชนิดเช่นนี้ตั้งอยู่บนความจริงที่ว่า เมื่อ A, B, ... , F เป็นค่าคงตัว และ G = 0, ผลเฉลยของสมการจะมีรูปแบบ $u = \exp(\lambda x + \mu y)$ เสมอโดยที่ค่าคงตัว λ และ μ สอดคล้องกับสมการพีชคณิต

$$A\lambda^2 + B\lambda\mu + C\mu^2 + D\lambda + E\mu + F = 0 \tag{4.4}$$

จากเรขาคณิตวิเคราะห์เราทราบว่าสมการเช่นนี้ แสดงภาคตัดกรวยในระนาบ $\lambda\mu$ และชนิดที่แตกต่างกันของภาคตัดกรวยจะกำหนดจาก $B^2 - 4AC$ เช่นกัน

สมการลาปลาซ, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, เป็นกรณีพิเศษซึ่งมีค่า $A = C = 1$ และ $B = 0$ ดังนั้นจึงเป็นสมการเชิงวงรีตลอดระนาบ $-xy$

สมการปัวส์ซอง, $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$, ในสองมิติเป็นสมการเชิงวงรีในบริเวณใด ๆ ของระนาบ $-xy$ ที่ฟังก์ชัน $f(x,y)$ นิยาม

สมการความร้อนหนึ่งมิติ, $-ku_{xx}+u_t=0$, ใน $u=u(x,t)$ เป็นสมการเชิงพาราโบลาในระนาบ $-xt$

สมการคลื่นในหนึ่งมิติ, $-a^2y_{xx}+y_{tt}=0$, สำหรับ $y=y(x,t)$ เป็นสมการไฮเพอร์โบลิก

สมการโทรเลข (telegraph equation),

$$v_{xx}=KLv_{tt}+(KR+LS)v_t+RSv$$

โดยที่ $v(x,t)$ แทนได้ทั้งศักย์ไฟฟ้าสถิตหรือกระแสที่เวลา t ที่จุด x ซึ่งห่างจากปลายข้างหนึ่งของสายการส่งผ่าน (transmission line) หรือสายเคเบิลที่มีความจุไฟฟ้าสถิต K, ความเหนี่ยวนำในตัว L, ความต้านทาน R, และความนำรั่ว (leakage conductance) S, ทุกค่าวัดในหนึ่งหน่วยความยาว สมการโทรเลขเป็นสมการไฮเพอร์โบลิก ถ้า $KL>0$ และเป็นสมการเชิงพาราโบลาถ้าทั้ง K หรือ L เป็นศูนย์

ทั้ง 3 ชนิดของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองดังกล่าวโดยทั่วไปต้องการเงื่อนไขขอบที่แตกต่างกันในการกำหนดค่าของผลเฉลย

ถ้า u เป็นตัวแปรตามในข้อปัญหาค่าขอบ เงื่อนไขที่กำหนดค่าของ u ตามแนวของขอบเรียกว่า **เงื่อนไขดีริชเลต์** (Dirichlet condition) ข้อปัญหาของการกำหนดฟังก์ชันฮาร์มอนิกบนโดเมนที่ระบุค่าฟังก์ชันจนทั่วขอบของโดเมน เรียกว่า **ข้อปัญหาดีริชเลต์** (Dirichlet problem) ในกรณีเช่นนี้ค่าของฟังก์ชันสามารถตีความได้ว่าเป็นอุณหภูมิที่สถานะคงตัว การตีความในลักษณะนี้ทำให้เราคาดหวังว่าข้อปัญหาอาจมีผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวถ้าหากฟังก์ชันที่กำลังพิจารณาสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด

ถ้าหากสมการเป็นแบบเชิงวงรี, เราจะแก้สมการที่เป็นข้อปัญหาดีริชเลต์ พิจารณาข้อปัญหาของการกำหนดฟังก์ชัน $u(x,y)$ ของศักย์ไฟฟ้าสถิตในทรงกระบอก ซึ่งบรรจุประจุด้วยความหนาแน่นประจุ ρ อยู่ภายในทรงกระบอก และกำหนดให้ขอบเป็นผิวสมศักย์ (equipotential surface) ดังนั้นข้อปัญหาในที่นี้คือ

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy}&=-\rho \qquad x^2+y^2<R^2 \\ u(x,y)&=C \qquad x^2+y^2=R^2 \end{aligned}$$

ศักย์ไฟฟ้า C ที่ผิวซึ่งคงตัวอาจกำหนดให้เป็นศูนย์ก็ได้

เงื่อนไขนอยมันน์ (Neumann condition) อธิบายค่าของอนุพันธ์แนวฉาก(normal derivatives), du/dn, บนส่วนของขอบ โดยที่ n เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับทิศทางการเพิ่มค่าของ u ตามตัวแปรอิสระ ในบางครั้งเราเรียกข้อปัญหาค่าขอบแบบนี้ว่า **ข้อปัญหาค่าขอบชนิดที่สอง** (boundary value problem of the second kind) และเรียกข้อปัญหาดีริชเลต์ ว่า **ข้อปัญหาค่าขอบชนิดที่หนึ่ง** (boundary value problem of the first kind) นอกจากนี้เราเรียกเงื่อนไขที่อธิบายค่าของ hu + du/dn ที่จุดขอบว่า **เงื่อนไขโรบิน** (Robin condition) โดยที่ h อาจเป็นค่าคงตัวหรือเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ และเรียกข้อปัญหาค่าขอบที่มีเงื่อนไขโรบินว่า **ข้อปัญหาค่าขอบชนิดที่สาม** (boundary value problem of the third kind)

ดังนั้น ข้อปัญหาค่าขอบสำหรับสมการเชิงวงรี ประกอบด้วยการหาฟังก์ชัน u ที่สอดคล้องกับสมการและเงื่อนไขขอบบนขอบ S ซึ่งกำหนดในรูปแบบ

$$\alpha u + \beta \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{s} = v \tag{4.5}$$

โดยที่ $\alpha, \beta,$ และ v เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่กำหนดให้บนขอบ S ด้วยค่า α และ β ที่เป็นบวกรวมทั้ง $\alpha+\beta$ เป็นบวกด้วย เราอาจแยกเงื่อนไขขอบของสมการเชิงวงรีออกเป็น 3 ชนิด คือ

เงื่อนไขขอบชนิดที่หนึ่ง ($\alpha = 1$ และ $\beta = 0$):

$$u|_{s} = u_0 \tag{4.6}$$

เงื่อนไขขอบชนิดที่สอง ($\alpha = 0,\ \ \beta = 1$):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{s} = u_1 \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u|_{s} = u_2 \tag{4.8}$$

ข้อปัญหาค่าขอบที่สมนัยกับเงื่อนไขขอบแต่ละชนิดนี้ เรียกว่า ข้อปัญหาค่าขอบชนิดที่หนึ่ง , สอง และสาม เช่นกัน

สำหรับสมการลาปลาซและสมการปัวส์ซอง, ข้อปัญหาค่าขอบชนิดที่หนึ่ง

$$\nabla^2 u = -f, \qquad u|_s = u_0 \tag{4.9}$$

เรียกว่า ข้อปัญหาดีริชเลต์ ; ข้อปัญหาค่าขอบชนิดที่สอง

$$\nabla^2 u = -f, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_s = u_1 \tag{4.10}$$

เรียกว่า ข้อปัญหานอยมันน์

ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ $u = u(x,t)$ เทียบกับตัวแปรอิสระ t ซึ่งเป็นตัวแปรอิสระอีกหนึ่งตัวแปรด้วย และถ้าค่าของทั้ง u และ u_t ที่ $t = 0$ มีการระบุหรือกำหนดไว้ด้วย เงื่อนไขเช่นนี้เรียกว่า **เงื่อนไขโคชี** (Cauchy condition) เทียบกับ t ในบางครั้งจำเป็นต้องมีการระบุเงื่อนไขขอบที่ปลายขอบของช่วงที่กำหนด หรือในก รณีของช่วงที่เป็นอนันต์ (infinite interval) จะแสดงการเติบโตของ $u(x,t)$ เมื่อ x มีค่ามาก ๆ ด้วย เงื่อนไขขอบในลักษณะนี้มักปรากฏในสมการไฮเพอร์โบลิกหรือสมการเชิงพาราโบลา ตัวอย่างเช่น สมการการสั่นของเชือกปลายตรึงทั้งสองข้าง คือ

$$\begin{aligned}
u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0 \qquad t > 0, \quad 0 < x < L \\
u(x,0) &= f_1(x) \qquad 0 < x < L \\
u_t(x,0) &= f_2(x) \qquad 0 < x < L \\
u(0,t) &= 0, \qquad u(L,t) = 0, \quad t > 0
\end{aligned}$$

จะเห็นว่าเงื่อนไขเริ่มต้น f_1, f_2 สมนัยกับตำแหน่งและความเร็วเริ่มต้นของเชือกตามลำดับ ตำแหน่งกำหนดโดย $u(x,t)$ ที่เวลา t และพิกัด x เงื่อนไขขอบระบุว่าที่ปลายทั้งสองของเชือกคือ $x = 0$ และ $x = L$ ถูกตรึงอยู่ตลอดเวลา ค่าเริ่มต้นสำหรับ u และ u_t จะมีความจำเป็นถ้าหากเราต้องการทราบการกระจัด $u(x,t)$

ในกรณีของสมการลาปลาซ, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, หรือสมการความร้อน, $ku_{xx} = u_t$, เงื่อนไขโคชีสำหรับ u เทียบกับ x ไม่สามารถกำหนดโดยปราศจากข้อจำกัดที่ชัดเจนได้ แต่อาจกระทำได้โดยกำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันอุณหภูมิ เมื่ออุณหภูมิ u ในแผ่นวัตถุ $0 \le x \le c$ ถูกระบุที่บนผิว $x = 0$, ฟลักซ์ Ku_x ที่ผ่านผิวทางซ้ายมือจะกำหนดโดยค่าของ u ที่ผิวนั้นและเงื่อนไขอื่น ๆ อีกด้วย และในทางกลับกัน, ถ้าฟลักซ์ Ku_x ถูกกำหนดที่ $x = 0$, อุณหภูมิที่ผิวจะสามารถกำหนดได้เช่นกัน

ความสัมพันธ์ของเงื่อนไขขอบที่ได้กล่าวมานี้สำหรับ PDE ใน 2 มิติ แสดงในตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ชนิดของเงื่อนไขขอบและผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

เงื่อนไขขอบ	ชนิดของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย		
	เชิงวงรี	ไฮเพอร์โบลิก	พาราโบลา
	ลาปลาซ, ปัวส์ซอง (x,y)	สมการคลื่น (x,t)	สมการการแพร่ (x,t)
โคชี;			
ผิวเปิด	ไม่เสถียร	เสถียร, เป็นได้อย่างเดียว	มีข้อจำกัดมาก
ผิวปิด	มีข้อจำกัดมาก	มีข้อจำกัดมาก	มีข้อจำกัดมาก
ดีริชเลต์;			
ผิวเปิด	ไม่เพียงพอ	ไม่เพียงพอ	เสถียร, เป็นได้อย่างเดียว
ผิวปิด	เสถียร, เป็นได้อย่างเดียว	ไม่อาจเป็นได้อย่างเดียว	มีข้อจำกัดมาก
นอยมันน์;			
ผิวเปิด	ไม่เพียงพอ	ไม่เพียงพอ	เสถียร, เป็นได้อย่างเดียว
ผิวปิด	เสถียร, เป็นได้อย่างเดียว	ไม่อาจเป็นได้อย่างเดียว	มีข้อจำกัดมาก

จากตารางจะเห็นว่าสำหรับสมการปัวส์ซองกรณีผิวปิด, เงื่อนไขดีริชเลต์จะให้ผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวและเสถียร เงื่อนไขนอยมันน์ซึ่งเป็นอิสระต่อเงื่อนไขดีริชเลต์จะให้ผลเฉลยที่เสถียรและเป็นได้อย่างเดียวที่เป็นอิสระต่อผลเฉลยของดีริชเลต์ ดังนั้น เงื่อนไขโคชีซึ่งหมายถึงเงื่อนไขดีริชเลต์รวมกับเงื่อนไขนอยมันน์จะให้ผลเฉลยที่ไม่คล้องจองกัน

โดยปกติเงื่อนไขขอบชนิดหนึ่งประกันได้ว่าที่ปลายของช่วงหรือที่ขอบจะมีผลคูณของบางกรณีที่สมนัยกับเงื่อนไขขอบโคชี ความแตกต่างของกรณีหนึ่งมิติและสองมิติตามตารางก็คือ เราใช้เงื่อนไขกับปลายทั้งสองของช่วงของตัวแปรนั้น

โดยปกติเงื่อนไขขอบหนึ่ง ๆ ประกันได้ว่าที่ปลายขอบของช่วงจะมีผลคูณต่อไปนี้เป็นศูนย์ คือ

$$p(x)u(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x}\bigg|_{x=a} = 0$$

และ

$$p(x)u(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x}\bigg|_{x=b} = 0 \qquad (4.11)$$

โดยที่ u(x) เป็นผลเฉลยของสมการที่เรากำลังพิจารณา เราสามารถใช้เซตของเงื่อนไขขอบ

$$v\, pu'\big|_{x=a} = vpu'\big|_{x=b} \tag{4.12}$$

โดยที่ u(x) และ v(x) เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่สมนัยกับค่าเจาะจงที่เหมือนกันหรือแตกต่างกัน ในกรณีที่ u(x) และ v(x) เป็นผลเฉลยเชิงซ้อน เราจะได้เงื่อนไขขอบเชิงซ้อน

$$v\, pu\big|_{x=a} = v^*\, pu'\big|_{x=b}$$

หรือ

$$vpu^{*\prime}\big|_{x=a} = vpu^{*\prime}\big|_{x=b}$$

หรือ

$$v^{*\prime}\, pu\big|_{x=a} = v^{*\prime}\, pu\big|_{x=b} \tag{4.13}$$

เราเคยให้นิยามของเงื่อนไขขอบว่าเป็นเชิงเส้น ถ้าเป็นเงื่อนไขขอบที่แสดงความสัมพันธ์เชิงเส้นระหว่าง u และอนุพันธ์ย่อยของ u บนขอบหรืออีกนัยหนึ่ง, เงื่อนไขขอบจะเป็นเชิงเส้นถ้าเป็นเงื่อนไขที่แสดงด้วยสมการเชิงเส้นระหว่าง u และอนุพันธ์ของ u บนขอบ

ในลักษณะที่คล้ายกับหลักการซ้อนทับสำหรับผลเฉลยของ LDE ที่ได้กล่าวแล้ว เราจะมีหลักการซ้อนทับสำหรับเงื่อนไขขอบเชิงเส้นใน ทฤษฎีบท 4.1 คือ

"ถ้า u_1 และ u_2 เป็นผลเฉลยของ LDE ด้วยเงื่อนไขขอบเชิงเส้น

$$\left[\alpha\, u_1(x) + \beta \frac{\partial u_1(x)}{\partial n}\right]\bigg|_s = f(x)\big|_s \tag{4.14}$$

$$\left[\alpha\, u_2(x) + \beta \frac{\partial u_2(x)}{\partial n}\right]\bigg|_s = g(x)\big|_s \tag{4.15}$$

โดยที่ α, β เป็นค่าคงตัว, ดังนั้น $w = u_1 + u_2$ จึงเป็นผลเฉลยของ PDE ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ

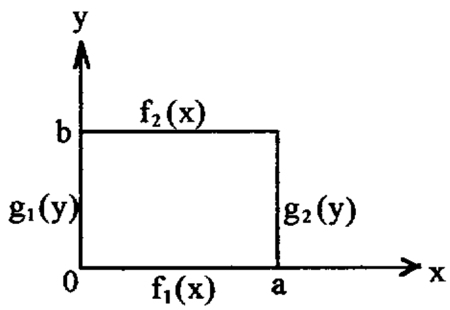
$$\left[\alpha w(x) + \beta \frac{\partial w(x)}{\partial n}\right]\bigg|_s = (f+g)\big|_s \quad ." \tag{4.16}$$

ทฤษฎีบท 4.1 มีประโยชน์มากถ้าหากเงื่อนไขเป็นเงื่อนไขขอบเชิงซ้อน
พิจารณาสมการลาปลาซ $\nabla^2 u = 0$ ในสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้วยเงื่อนไขขอบเชิงเส้น

$$u(x,0) = f_1(x), \quad u(x,b) = f_2(x)$$

และ

$$u(0,y) = g_1(y), \quad u(a,y) = g_2(y)$$



เราจะได้เห็นในหัวข้อต่อ ๆ ไปว่าแทนที่เราจะแก้สมการของข้อปัญหาค่าขอบโดยใช้ระเบียบวิธีการแยกตัวแปร, เราต้องการเงื่อนไขขอบที่เป็นศูนย์บนคู่ของด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยม ดังนั้น เราจึงแยกปัญหาออกเป็น 2 ส่วน คือ

$$\begin{array}{ll} \nabla^2 u_1 = 0 & \nabla^2 u_2 = 0 \\ u_1(x,0) = f_1(x) & u_2(x,0) = 0, \ u_2(x,b) = 0 \\ u_1(x,b) = f_2(x) & u_2(0,y) = g_1(y) \\ u_1(0,y) = 0, \ u_1(a,y) = 0 & u_2(a,y) = g_2(y) \end{array}$$

ถ้าเราสามารถแก้สมการหา u_1 และ u_2 ได้, ดังนั้น $u_1 + u_2$ จะเป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซซึ่งสอดคล้องกับทุกเงื่อนไขขอบตามที่ระบุไว้ อย่างไรก็ตาม, เงื่อนไขขอบนอยมันน์โดยทั่วไปจะไม่ระบุผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวของข้อปัญหาค่าขอบเช่นนี้

พิจารณาผลเฉลยของสมการ $\nabla^2 u = 0$ ของตัวอย่างล่าสุดแต่ด้วยเงื่อนไขขอบนอยมันน์

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = f_1(x), \qquad \frac{\partial u(x,b)}{\partial y} = f_2(x)$$

และ

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = g_1(y), \qquad \frac{\partial u(a,y)}{\partial x} = g_2(y)$$

ถ้า u เป็นผลเฉลยของข้อปัญหาค่าขอบนี้ ดังนั้น $w = u + c$, โดยที่ c เป็นค่าคงตัว, จะเป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซด้วยเงื่อนไขขอบที่เหมือนเดิมด้วย ดังนั้น เงื่อนไขขอบนอยมันน์จึงกำหนดผลเฉลยของข้อปัญหาค่าขอบนี้ถึงค่าคงตัวเท่านั้น

ต่อไปเราจะพิจารณาเงื่อนไขเริ่มต้นที่เหมาะสมที่จะทำให้เข้ากันได้กับเงื่อนไขขอบเพื่อให้มั่นใจได้ว่าเป็นผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวของ PDE เงื่อนไขเริ่มต้นนี้กำหนดโดยกฎต่าง ๆ ที่เขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์

สมการความร้อนเป็นสมการที่แสดงกฎการอนุรักษ์พลังงาน ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นที่เหมาะสมคือ อุณหภูมิที่บางเวลา $t = t_0$ ในวัตถุ ผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวของสมการนี้จึงหาได้จากการระบุเงื่อนไขขอบที่เหมาะสมที่ควบคู่ไปกับอุณหภูมิเริ่มต้นของวัตถุ ข้อปัญหาค่าขอบสำหรับการนำความร้อนในแท่งวัตถุเอกพันธุ์ที่มีภาคตัดขวางคงตัวที่คั่นฉนวนส่วนข้าง กำหนดโดย

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{4.17}$$

เงื่อนไขขอบดีริชเลต์ คือ $\quad u(0,t) = T_0, \quad u(a,t) = T_1, \quad 0 < t$

และเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $\quad u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < a \qquad (4.18)$

ถ้าเราตรึงเวลา t , สมการความร้อนนี้จะลดลงเป็น ODE อันดับสอง ดังนั้น เราต้องการเงื่อนไขขอบ 2 เงื่อนไขบน u สำหรับแต่ละ t และถ้าเราตรึง x, สมการจะลดลงเป็น ODE อันดับหนึ่ง, เราจึงต้องการเงื่อนไขขอบเดียวเท่านั้นบน u สำหรับแต่ละ x เงื่อนไขขอบนี้ใช้ร่วมกับเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0) = f(x)$

อาจมีข้อสงสัยว่าบางเงื่อนไขที่เพิ่มเข้ามาระบุได้ที่ขอบ $t = \infty$ หรือไม่ จากที่ได้พิจารณาก่อนหน้านี้บอกให้ทราบว่าไม่มีเงื่อนไขลักษณะนี้ในบริบทของเราเลย อย่างไรก็ตามปัญหานี้มีเงื่อนไข**บังคับโดยปริยาย (implicit constraint)** ที่ต้องการให้ $u(x,t)$ มีขอบเขตสำหรับทุกค่าของ t อย่าลืมว่าอุณหภูมิค่าอนันต์เป็นผลเฉลยที่ไม่อาจรับได้ เงื่อนไขบังคับโดยปริยายเช่นนี้ และเงื่อนไขขอบจะได้กล่าวถึงในหัวข้อที่ 4.3

สมการคลื่นสำหรับการเคลื่อนที่ของเส้นเชือก,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < a, \quad 0 < t \tag{4.19}$$

ซึ่งเป็นนิพจน์ของกฎข้อที่สองของนิวตัน เมื่อเราใช้กฎนี้แก้สมการหาการกระจัดของมวลจุด (point mass) เราต้องการตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วของอนุภาค ดังนั้นเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวของสมการนี้ เราจึงต้องการเงื่อนไขขอบบนเส้นเชือกที่ปลายเชือกและเงื่อนไขเริ่มต้นที่บอกตำแหน่งและความเร็วของเชือกที่เวลา $t = 0$ คือ

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \qquad 0 < x < a \tag{4.20}$$

ถ้าปลายเชือกถูกตรึงที่ $x = 0$ และ $x = a$, และการกระจัดและความเร็วที่ $t = 0$ คือ f(x) และ g(x) ตามลำดับ ดังนั้น เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นจึงเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0 & t &> 0 \\ u(a,t) &= 0 & t &> 0 \\ u(x,0) &= f(x) & 0 &< x < a \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x) & 0 &< x < a \end{aligned}$$

สังเกตุว่า ไม่มีเงื่อนไขเริ่มต้นที่จำเป็นต้องระบุสำหรับสมการลาปลาซ $\nabla^2 u = 0$ เพราะสมการนี้อธิบายการแจกแจงสถิตของแหล่งกำเนิด

4.3 เงื่อนไขขอบโดยปริยาย

แม้ว่าในหลาย ๆ กรณีการใช้เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นเพื่อนำไปสู่ผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวของข้อปัญหาค่าขอบ แต่ในบางครั้งข้อจำกัดโดยปริยายจำเป็นต้องนำเข้ามาพิจารณา อีกทั้งบางเงื่อนไขขอบของปัญหาไม่ปรากฏชัดเจนและต้องสรุปจากหลักเกณฑ์หรือนิรนัย (deduce) เชิงวิเคราะห์อย่างระมัดระวังมาก

ข้อจำกัดในลักษณะเช่นนี้เกิดขึ้นเมื่อเราใช้ PDE เป็นแบบจำลองของระบบในชีวิตจริง ผลเฉลยที่สมนัยจะต้องมีขอบเขต ดังนั้น ผลเฉลยใด ๆ ของ PDE ที่ไม่มีขอบเขตจะต้องตัดออกไปจากการพิจารณา นอกจากนี้เมื่อเราพิจารณาผลเฉลยของ PDE ในโดเมนที่กว้างใหญ่ไพศาลมาก ๆ ถึงอนันต์ เงื่อนไขที่ไม่มีขอบเขตสำหรับผลเฉลยที่อนันต์จะจัดเป็นเงื่อนไขขอบของผลเฉลยในหัวข้อนี้

สมการคลื่นความร้อน $\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ในช่วงของ x ตั้งแต่ $-\infty$ ถึง ∞ และ $t > 0$ ยอมให้ผลเฉลยมีค่าเป็น

$$u_0(x,t) = Ax + B$$
$$u_\lambda(x,t) = \cosh \lambda x \,.\, e^{k\lambda^2 t} \qquad (\lambda > 0 \text{ และเป็นค่าจริง}) \tag{4.21}$$

สมการนี้มีผลเฉลยอื่นอีก อย่างไรก็ตาม สำหรับ t ที่ตรึง,

$$\lim_{x \to \pm\infty} u_\lambda(x,t) = \infty \qquad 0 \le \lambda$$

ซึ่งแสดงว่าเป็นผลเฉลยที่ไม่อาจรับได้

เนื่องจาก u จะต้องมีขอบเขตที่อนันต์ทั้งค่าของ x และ t ข้อจำกัดต่อไปนี้จะต้องใช้ได้คือ

$$\lim_{x \to \pm\infty} u(x,t) < \infty \quad , \qquad \lim_{x \to \infty} u(x,t) < \infty$$

เงื่อนไขเริ่มต้นที่เหมาะสมจึงกำหนดโดย

$$u(x,0) = f(x) \qquad -\infty < x < \infty$$

โดยที่ f(x) มีขอบเขตสำหรับทุกค่าของ x เช่น $f(x) = e^{-x^2}$ เป็นต้น และทำให้กลายเป็นข้อปัญหาค่าขอบที่ชัดแจ้ง (explicit)

เงื่อนไขที่มีขอบเขตยังมีความสำคัญอีกด้วยเมื่อเราพิจารณาบริเวณที่ขอบเขต ลองพิจารณาสมการลาปลาซ

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{4.22}$$

บนจานแบน $0 \le r \le a$ ผลเฉลยที่ยอมรับได้คือ

$$u_n(r,\theta) = \frac{1}{r^n}\left(A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta\right)$$

และ

$$w_n(r,\theta) = r^n\left(C_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta\right) \tag{4.23}$$

สังเกตุว่าผลเฉลย $u_n(r,\theta)$ มีภาวะเอกฐานหรือไม่มีขอบเขตที่ $r = 0$ ดังนั้น จึงเป็นผลเฉลยที่ไม่อาจรับได้บนโดเมนนี้ ผลเฉลย $w_n(r,\theta)$ ยอมรับได้เพราะมีขอบเขต ในอีกนัยหนึ่ง ถ้าราเปลี่ยนโดเมน

ที่ควรสนใจและพิจารณาจุดที่อยู่นอกจานแบน นั่นคือ $a < r$ ดังนั้น ผลเฉลย $w_n(r,\theta)$ จะไม่มีขอบเขตและต้องตัดออกไปเพราะเป็นผลเฉลยที่ไม่อาจรับได้บนโดเมนเช่นนี้ ในขณะที่ $u_n(r,\theta)$ มีขอบเขตและยอมรับได้

สมการลาปลาซบนจานแบนเป็นสิ่งที่น่าสนใจเพราะเป็นข้อปัญหาค่าขอบที่สมบูรณ์และต้องตรวจสอบอย่างละเอียดสำหรับ**เงื่อนไขขอบโดยปริยาย** (implicit boundary conditions) เราจะพิจารณาข้อปัญหาค่าขอบที่สมบูรณ์สำหรับสมการลาปลาซบนจานแบน $0 \le r \le a$ นี้

ขั้นแรกของการหาผลเฉลยของสมการคือ เราต้องเลือกบริเวณสำหรับ θ ที่ทำให้ทุกจุดบนจานแทนคู่ของ (r,θ) เราจึงเลือก $-\pi < \theta \le \pi$ บริเวณของข้อปัญหาที่เรากำลังพิจารณามีขอบ $r = a$ ดังนั้นเงื่อนไขขอบดีรีชเลต์จึงอยู่ในรูปแบบ

$$u(a,\theta) = f(\theta)$$

ด้วยค่า $u(r,\theta)$ มีขอบเขตสำหรับทุกจุดบนจาน แม้ว่าจะดูเหมือนว่าเป็นข้อปัญหาค่าขอบที่สมบูรณ์แล้ว แต่ให้สังเกตุว่าจุด (r,θ) ด้วยค่า $\theta = \pi - \varepsilon$ และ $\theta = -\pi + \varepsilon$, $0 < \varepsilon << 1$ เป็นตัวแทนของค่า θ ที่อยู่ห่างไกลออกไป แต่ก็ยังคงใกล้กันบนจานอยู่ดี ดังนั้น เราต้องทำให้มั่นใจได้ว่า u และอนุพันธ์ของ u เทียบกับ θ มีค่าต่อเนื่องที่ขอบ $\theta = \pm\pi$ เราสามารถทำเช่นนี้ได้โดยเขียน

$$u(r,\pi) = u(r,-\pi), \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r,-\pi) \qquad 0 \le r \le a$$

เงื่อนไขที่กล่าวมานี้รวมทั้งเงื่อนไขที่มีขอบเขตในตัวอย่างล่าสุดจะทำให้ได้ข้อปัญหาค่าขอบที่สมบูรณ์ตามต้องการด้วยเงื่อนไขขอบดีริชเลต์ อย่างไรก็ตามเนื่องจาก $\theta = -\pi$ อยู่นอกโดเมนของ θ, $u(r,-\pi)$ และ $(\partial u / \partial \theta)$ จึงควรเขียนเป็น $\lim\limits_{\theta \to -\pi^+} u(r,\theta)$ และ $\lim\limits_{\theta \to -\pi^+} (\partial u / \partial \theta)$ ตามลำดับ

แทนที่เราจะระบุผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง เราสามารถใช้เงื่อนไขขอบหรือเงื่อนไขเริ่มต้น ในกรณีของเงื่อนไขเริ่มต้นนั้น ค่าของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่ารวมทั้งค่าอนุพันธ์จะต้องระบุที่บางจุดในลักษณะที่คล้ายกันนี้, PDE อันดับสองเราสามารถพิจารณาปัญหาซึ่งฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า u ถูกระบุบนผิว S ควบคู่ไปกับอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตั้งฉากกับ S ปัญหาเช่นนี้เรียกว่า **ข้อปัญหาค่าเริ่มต้น** (initial value problem) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า**ถ้าสัมประสิทธิ์ของสมการเชิงอนุพันธ์, เงื่อนไขเริ่มต้น, และ S มีค่าปรับเรียบ (smooth) เพียงพอ ดังนั้น เงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวจะนำไปสู่ผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวของสมการในบริเวณที่บรรจุ S นั้น** ข้อความนี้เรียกว่า Cauchy-Kovalevsky theorem ซึ่งเราจะไม่กล่าวถึงรายละเอียดในที่นี้ แต่เราจะยกตัวอย่างของอาดามาด์

(Hadamard's example) ดังนี้

ทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ไม่ได้แก้ปัญหาความถูกต้องของสมการเชิงอนุพันธ์ได้อย่างสมบูรณ์เพียงพอ แต่ทฤษฎีนี้ประกันการมีอยู่จริงและความเป็นได้อย่างเดียวของผลเฉลยภายในย่านใกล้เคียงน้อย ๆ เท่านั้น นอกจากนี้ข้อมูลเริ่มต้นและฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องไม่ได้เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และอาจไม่ต่อเนื่องด้วย อาดามาด์ได้ยกตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการลาปลาซด้วยข้อปัญหาค่าเริ่มต้น

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{k}\sin kx$$

โดยที่ $k > 0$ เป็นจำนวนเต็ม เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่าผลเฉลยของสมการลาปลาซนี้คือ

$$u_k(x,t) = \frac{\sinh kt}{k^2} \cdot \sin kx$$

สิ่งที่ไม่ธรรมดาสำหรับผลเฉลยนี้คือ

$$\left|\frac{\sin kx}{k}\right| < \frac{1}{k}$$

ดังนั้นเมื่อ k มีค่ามากเข้าใกล้ $+\infty$, เงื่อนไขเริ่มต้นดังกล่าวจะเข้าสู่

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

ซึ่งผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียว คือ $u = 0$ หรืออีกนัยหนึ่ง, ผลเฉลยที่ควรจะเป็นดังกล่าวจะกลายเป็นไม่มีขอบเขตเมื่อ $k \to \infty$ แม้ว่าค่าของ $|t|$ จะน้อยเพียงใดก็ตาม ซึ่งแสดงว่าการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยในเงื่อนไขเริ่มต้นบน u ของปัญหานี้นำไปสู่การเปลี่ยนแปลงอย่างใหญ่หลวงในผลเฉลยจึงกล่าวสรุปได้ว่า ผลเฉลยของสมการลาปลาซไม่ได้ขึ้นอย่างต่อเนื่องต่อข้อมูลเริ่มต้น, อย่างน้อยที่สุดในกรณีนี้นั่นเอง

4.4 ความเป็นได้อย่างเดียวสำหรับข้อปัญหาค่าขอบ

เมื่อกำหนดข้อปัญหาค่าขอบสำหรับสมการความร้อน, สมการคลื่น, สมการลาปลาซ หรือสมการอื่น ๆ ที่เรามักพบในฟิสิกส์ คำถามที่จะต้องตามมา คือ ผลเฉลยของงปัญหามีความเป็นได้อย่าง

เดียวหรือไม่ โดยทั่วไปจะมีความเป็นไปได้ที่เราอาจเชื่อหรือมั่นใจว่าผลเฉลยมีความเป็นได้อย่างเดียวแน่นอน อย่างไรก็ตาม, ความเป็นได้อย่างเดียวของผลเฉลยสามารถพิสูจน์โดยใช้การอ้างเหตุผลอย่างเคร่งครัด

ในหัวข้อนี้จะเป็นการสาธิตการหาความเป็นได้อย่างเดียวของผลเฉลยสำหรับข้อปัญหาค่าขอบหลาย ๆ กรณี การพิสูจน์ในลักษณะที่คล้าย ๆ กันจะใช้ได้สำหรับข้อปัญหาค่าขอบอื่น ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่าน ๆ มา

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าผลเฉลยของปัญหาดีริชเลต์

$$\nabla^2 u = 0, \qquad u|_s = f$$

มีความเป็นได้อย่างเดียว การพิสูจน์เริ่มจากการสังเกตุว่าผลเฉลยของสมการลาปลาซเราเรียกว่าฟังก์ชันฮาร์มอนิก หนึ่งในคุณสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันฮาร์มอนิกกำหนดโดย ทฤษฎีบทค่าสูงสุด-ต่ำสุด (maximum - minimum value theorem) ซึ่งกล่าวว่า

"ถ้า u มีค่าต่อเนื่องบนโดเมนอันตะ และเป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกในโดเมนนั้น ดังนั้น ค่าสูงสุดและต่ำสุดของ u หาได้บนขอบของโดเมน"

ถ้า u_1, u_2 เป็นผลเฉลย 2 ค่าของข้อปัญหาดีริชเลต์ข้างต้นนี้ จะเห็นได้โดยง่ายว่า $u_2 - u_1$ เป็นฮาร์มอนิก และ $(u_1 - u_2)|_s = 0$ ดังนั้นค่าสูงสุดและต่ำสุดของ $u_1 - u_2$ บนโดเมนจึงเป็นศูนย์ หรือ $u_1 = u_2$ บนโดเมนนั้นเอง

เราสามารถพิสูจน์ผลที่คล้ายกันนี้สำหรับข้อปัญหาดีริชเลต์สำหรับสมการคลื่น

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && 0 \le x \le a \\
&u(0,t) = u(a,t) = 0 && t > 0 \\
&u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) && 0 < x < a
\end{aligned} \tag{4.24}$$

ก่อนอื่นเราจะหาสมการพลังงาน (energy equation) สำหรับสมการคลื่น เราคูณสมการนี้ด้วย u_t แล้วอินทิเกรตจาก 0 ถึง a จะได้

$$\frac{1}{c^2}\int_0^a u_{tt} u_t \, dx = \int_0^a u_{xx} u_t \, dx$$

เมื่อเขียน $u_{tt}\, u_t$ เสียใหม่เป็น $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2)$ แล้วอินทิเกรตขวามือของสมการล่าสุดโดยการหาปริพันธ์โดยแยกส่วนจะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{1}{c^2}\int_0^a u_t^2 dx &= u_x u_t \Big|_0^a - \int_0^a u_x u_{xt} dx \\ &= u_x u_t \Big|_0^a - \int_0^a \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_x^2\right)dx \\ &= u_x u_t \Big|_0^a - \frac{d}{dt}\int_0^a \frac{1}{2}u_x^2 dx\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^a \left[\frac{1}{c^2}u_t^2 + u_x^2\right] = u_x u_t \Big|_0^a \qquad (4.25)$$

นิพจน์

$$E(u,t) = \frac{1}{2}\int_0^a \left[\frac{1}{c^2}u_t^2 + u_x^2\right]dx \qquad (4.26)$$

เรียกว่า **ปริพันธ์พลังงาน** (energy integral) ของ u บน [0, a] และสมการ (4.25) เรียกว่า สมการพลังงาน สำหรับสมการคลื่น

ต่อไปเราจะพิจารณาผลเฉลยของสมการคลื่นตามที่กำหนดไว้ ถ้า u_1 และ u_2 เป็นผลเฉลยที่แตกต่างกันของสมการ ดังนั้น $w = u_1 - u_2$ จึงเป็นผลเฉลยของสมการคลื่นด้วยเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned} &w(0,t) = w(a,t) = 0 && t > 0 \\ &w(x,0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0 && 0 < x < a \end{aligned}$$

เมื่อใช้สมการพลังงานกับ w, เงื่อนไขเริ่มต้นคือสมการที่สองจะนำไปสู่

$$\frac{d}{dt}\int_0^a \left[\frac{1}{c^2}w_t^2 + w_x^2\right]dx = 0$$

ซึ่งบอกให้เราทราบว่า $E(w,t)$ เป็นค่าคงตัว การหาค่าคงตัวนี้ให้สังเกตุว่าที่ $t=0,\ w_t(x,0)=0$ และ

$$w_x(x,0)=\left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{t=0}=\frac{\partial w(x,0)}{\partial x}=0$$

ดังนั้น สำหรับทุกค่าของ $t\geq 0$,

$$E(w,t)=E(w,0)=0$$

แต่ปริพันธ์ในสมการ (4.26) ไม่เป็นค่าลบ ดังนั้น จากสมการสุดท้ายจะให้

$$w_x(x,t)=w_t(x,t)=0 \qquad t\geq 0, \quad 0\leq x\leq a$$

ซึ่งแสดงว่า $w(x,t)$ เป็นค่าคงตัว อย่างไรก็ตาม, $w(x,0)=0$ ดังนั้น ถ้า $w(x,t)$ เป็นค่าคงตัว สิ่งที่ตามมาคือ $w(x,t)=0$ และ $u_1=u_2$ นั่นเอง

ความเป็นได้อย่างเดียวของผลเฉลยสำหรับสมการความร้อนด้วยเงื่อนไขขอบดีริชเลต์

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && 0\leq x\leq a, \quad 0<t\\ &u(0,t)=T_0, && u(a,t)=T_1\\ &u(x,0)=f(x)\end{aligned} \tag{4.27}$$

เราจะใช้ **หลักค่าสูงสุด** (maximum principle) สำหรับสมการความร้อนคือ "ผลเฉลยของสมการความร้อนบน $0\leq x\leq a$ และสำหรับ $0<t<T$ จะมีค่าสูงสุดและต่ำสุดบนขอบ B บางส่วนในระนาบ (x,t) ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$B=\left\{(x,0),\ (0,t),\ (a,t)\ \middle|\ 0\leq x\leq a,\ 0\leq t\leq T\right\} \tag{4.28}$$

ถ้า u_1 และ u_2 เป็นผลเฉลยของสมการความร้อนด้วยข้อปัญหาค่าขอบที่กำหนดข้างต้น ดังนั้น $w=u_1-u_2$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น

$$w(0,t)=w(a,t)=w(x,0)=0 \tag{4.29}$$

หรือ $w = 0$ บนขอบ B จากหลักค่าสูงสุดนี้แสดงว่า $w = 0$ สำหรับทุกค่าของ x และ t ที่เรากำลังพิจารณา ซึ่งหมายถึง $u_1 = u_2$

เมื่อถึงจุดนี้เราอาจสงสัยว่าข้อปัญหาค่าขอบอื่น ๆ ที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้น ๆ มีผลเฉลยที่เป็นได้อย่างเดียวหรือไม่ เราจะไม่ตอบคำถามโดยตรงในช่วงนี้ แต่เราจะแสดงในหัวข้อที่ 4.5 โดยโครงสร้างว่าโดยทั่วไปที่เงื่อนไขขอบมีการปรับเรียบหรือ smooth, คำตอบของคำถามนี้จะยืนยันได้ อย่างไรก็ตามผลเฉลยสำหรับบางข้อ ปัญหาค่าขอบมีจริงก็ต่อเมื่อบางเงื่อนไขที่มีสภาพเข้ากันได้หรือใช้แทนกันได้เท่านั้น เช่น ข้อปัญหานอยมันน์

$$\nabla^2 u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = f$$

มีผลเฉลยก็ต่อเมื่อเงื่อนไขที่ใช้แทนกันได้คือ $\oint_s f ds = 0$ การพิสูจน์คำกล่าวนี้เราจะใช้เอกลักษณ์ของกรีน(Green's identity) ซึ่งกล่าวว่าสำหรับฟังก์ชัน u, v ใด ๆ ที่ปรับเรียบในโดเมนอันตะ D,

$$\iint_D (v\nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u)dA = \oint_s v\frac{\partial u}{\partial n}ds \qquad (4.30)$$

ถ้าเราให้ $v = 1$ และ u เป็นผลเฉลยของสมการ, ดังนั้น เอกลักษณ์ของกรีนแสดงว่าเงื่อนไขที่ใช้แทนกันได้ข้างต้นจะต้องเป็นจริงสำหรับผลเฉลยของข้อปัญหาค่าขอบนี้

ความเป็นได้อย่างเดียวของผลเฉลยสำหรับสมการคลื่น

พิจารณาสมการคลื่นสำหรับลวดสปริงที่มีการสั่นอธิบายด้วย

$$u_{tt} - c^2(x)u_{xx} = F(x,t) \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \qquad (1)$$

และด้วยเงื่อนไข $\quad u(x,0) = f(x) \qquad 0 \le x \le L$

$$u_t(x,0) = g(x) \qquad 0 \le x \le L$$

$$u(0,t) = f_1(t)$$

$$u(L,t) = f_2(t)$$

โดยที่ $c^2(x) = \tau_0 / \rho(x)$

ให้ u_1 และ u_2 เป็นผลเฉลย 2 ค่า ของสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสำหรับ $t < T$ ให้ $v = u_1 - u_2$ เป็นความแตกต่างของผลเฉลยทั้งสองนี้ เราต้องพิสูจน์ว่า $v = 0$ เพื่อแสดงว่ามีผลเฉลยเพียงค่าเดียว เมื่อคูณสมการ (1) ด้วย ρu_t จะทำให้ซ้ายมือของสมการกลายเป็น

$$\rho u_t\left[u_{tt} - c^2 u_{xx}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho}{2}(u_t)^2 + \frac{\tau_0}{2}(u_x)^2\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\tau_0 u_x u_t\right]$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left[\rho(u_t)^2 + \tau_0(u_x)^2\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_0 u_x u_t\right) = F\rho u_t \qquad (2)$$

เมื่ออินทิเกรตเทียบกับ x จาก 0 ถึง L และเทียบกับ t จาก 0 ถึงบางเวลา $T > 0$ จะได้

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left\{\rho(x)[u_t(x,T)]^2 + \tau_0[u_x(x,T)]^2\right\}dx - \frac{1}{2}\int_0^L \left\{\rho(x)[u_t(x,0)]^2 + \tau_0[u_x(x,0)]^2\right\}dx$$

$$-\int_0^T \tau_0 u_x(L,t)u_t(L,t)dt + \int_0^L \tau_0 u_x(0,t)u_t(0,t)dt = \int_0^T\int_0^L F\rho u_t dxdt \qquad (3)$$

อินทิกรัล 2 ชุดแรกแสดงความแตกต่างของพลังงานรวม (พลังงานจลน์และพลังงานศักย์) ที่เวลา T และ 0 ส่วนอินทิกรัล 2 ชุดหลังแสดงงานที่ทำโดยองค์ประกอบ y ของแรงดึงที่ปลายเส้นลวด ขวามือของสมการเป็นงานที่ทำโดยแรง F

เนื่องจาก u_1 และ u_2 เป็นผลเฉลยของสมการ (1) ซึ่งมีข้อมูล F, f_1, f_2, f_3, f_4 ชุดเดียวกันสำหรับ $t < T$, ความแตกต่าง $v = u_1 - u_2$ สอดคล้องกับปัญหาเดียวกัน แต่ด้วย $F = f = g = f_1 = f_2 = 0$ สำหรับ $0 < x < L$ และ $0 < t < T$ จึงเห็นได้ชัดเจนว่า

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial v(L,t)}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial v(x,0)}{\partial x} = 0$$

สมดุลพลังงานของสมการ (3) จะลดลงเป็น

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left\{\rho[v_t(x,T)]^2 + \tau_0[v_x(x,T)]^2\right\}dx = 0 \qquad (4)$$

ซึ่งหมายถึงเส้นลวดไม่มีพลังงานที่เวลา $t = 0$, พลังงานยังคงเป็นศูนย์ถ้าไม่มีงานกระทำบนเส้นลวด

สมมติว่า $\rho(x)$ และ τ_0 เป็นค่าบวก ดังนั้น ปริพัทธ์หรือค่าอินทิเกรตจะไม่เป็นลบและอินทิกรัลจาก 0 ถึง L เป็นบวกซึ่งขัดแย้งกับสมการ (4) แสดงว่าปริพัทธ์ในสมการ (4) ไม่อาจเป็นบวกภายในช่วงใด ๆ ได้ ถ้าเราสมมติว่าปริพัทธ์มีค่าต่อเนื่อง ดังนั้น จึงต้องเป็นศูนย์ ดังนั้น ถ้าทุกข้อมูลเป็นศูนย์สำหรับ $t < T$,

$$\frac{\partial v(x,T)}{\partial t} = 0 \qquad \text{สำหรับ} \quad t_1 < T$$

ทำให้

$$\frac{\partial v(x,t_1)}{\partial t} = 0 \qquad 0 < t_1 < T, \qquad 0 < x < L$$

แสดงว่า $v(x,t_1)$ เป็นค่าคงตัว แต่ $v(x,0) = 0$ ดังนั้น

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) = 0, \qquad t \le T$$

หรือ $v(x,t_1) = 0$ เนื่องจาก t_1 เลือกค่าได้, $v(x,t) = 0$ สำหรับ t ใด ๆ หมายถึง $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ ซึ่งแสดงความเป็นได้อย่างเดียวของผลเฉลยที่เราต้องการพิสูจน์นั่นเอง

4.5 การแยกตัวแปรด้วยเงื่อนไขขอบ

ในบทที่ 1 เราได้กล่าวถึงการแยกตัวแปรในสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อให้ได้สมการย่อยของฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระแยกจากกัน ผลเฉลยของแต่ละสมการจึงเป็นผลเฉลยทั่วไปหรือผลเฉลยแยกที่ปราศจากเงื่อนไข อย่างไรก็ตาม, ในหลาย ๆ ปัญหาเราต้องการผลเฉลยแยกที่สอดคล้องกับเงื่อนไขพิเศษบางอย่างที่ถูกกำหนดไว้ด้วย ซึ่งอาจเป็นเงื่อนไขขอบหรือเงื่อนไขของการมีขอบเขต (boundedness) และเงื่อนไขเริ่มต้นด้วย

เพื่อความสะดวกเราจะแยกออกเป็น 3 หัวข้อย่อย คือ ข้อปัญหาเชิงเอกพันธ์, ข้อปัญหาเชิงไม่เอกพันธ์, และข้อปัญหาที่มีบางเงื่อนไขเริ่มต้นไม่เป็นเอกพันธ์

4.5.1 ข้อปัญหาเชิงเอกพันธุ์

ข้อปัญหาค่าขอบเชิงเส้นเป็นข้อปัญหาเชิงเอกพันธ์เมื่อสมการเชิงอนุพันธ์และทุกเงื่อนไขขอบเป็นเอกพันธ์ ข้อปัญหาเช่นนี้มี ผลเฉลยชัด (trivial solution), $u \equiv 0$, เสมอ แต่ผลเฉลยอาจเป็นผลเฉลยไม่ชัด $u_1, u_2, \ldots$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันได้ หรือ u_n ไม่ใช่ผลบวกเชิงเส้นของกันและกัน

จากหลักการซ้อนทับเราทราบว่าผลรวมเชิงเส้น

$$U_n = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_N u_N$$

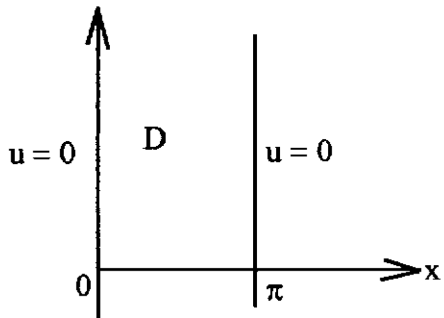
ก็เป็นผลเฉลยของข้อปัญหาเชิงเอกพันธ์เดียวกันนี้ด้วยสำหรับค่าคงตัว $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เราสามารถคาดเดาได้โดยง่ายสำหรับผลเฉลยพื้นฐานของสมการเชิงเส้น เช่น สมการลาปลาซ สมการความร้อนหรือสมการคลื่น อย่างไรก็ตาม เป็นการยากที่จะคาดเดาผลเฉลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบที่กำหนดไว้ด้วย ดังนั้น เราจึงพิจารณาข้อปัญหาที่เป็นมาตรฐานและง่ายต่อการปรับไปสู่ข้อปัญหาที่ยุ่งยากขึ้นได้

สมมติเงื่อนไขขอบเชิงเอกพันธ์ระบุเป็นคู่ของเส้นหรือระนาบ เช่น $x = 0$ และ $x = \pi$ ในระนาบคาร์ทีเซียน สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองด้วยเงื่อนไขขอบที่อาจเป็นเงื่อนไขดีริชเลต์ (D), เงื่อนไขนอยมันน์ (N) หรือ เงื่อนไขโรบิน (R)

โดยการตรวจพินิจ (inspection) จะเห็นว่า สำหรับ

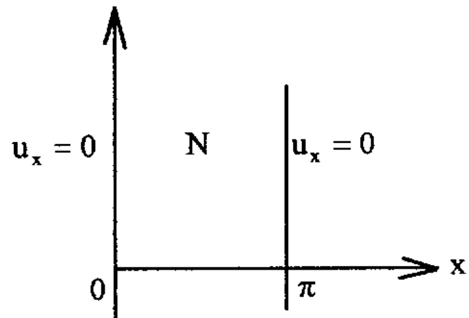
$$\begin{aligned}
D:&\quad X_n(x) &=&\quad \sin nx \quad n = 1, 2, \ldots \\
N:&\quad X_n(x) &=&\quad \cos nx \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\
R:&\quad X_n(x) &=&\quad \sin(nx/2) \quad n = 1, 3, 5, \ldots
\end{aligned} \tag{4.31}$$

จะให้ฟังก์ชัน $u(x,?) = X_n(x)$ ด้วยค่าอนุพันธ์ $u_x(x,?) = X'_n(x)$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบที่กำหนด และเป็นข้อปัญหาดีริชเลต์ D สำหรับข้อปัญหานอยมันน์หรือ N, สังเกตุว่า $X'_n(x) = -n\sin nx = 0$ ที่ $x = 0$ และ $x = \pi$ สำหรับข้อปัญหาโรบินหรือ R, เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $X_n(x) = \sin(nx/2)$ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขเมื่อ n เป็นเลขคี่ เพราะ $X'_n(\pi) = (n/2)\cos(n\pi/2) = 0$ ถ้า $n = 1, 3, \ldots$



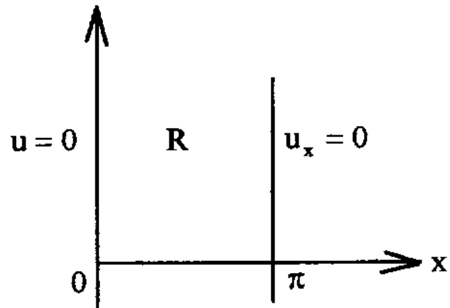
$X_n(x) = \sin nx$

$n = 1,2,\ldots$



$X_n(x) = \cos nx$

$n = 0,1,2,\ldots$



$X_n(x) = \sin\dfrac{nx}{2}$

$n = 1,3,\ldots$

เราเลือกใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติเพราะเป็นฟังก์ชันมูลฐานและจากประสบการณ์เกี่ยวกับอนุกรมฟูเรียร์บอกถึงคุณประโยชน์ของฟังก์ชันมูลฐานนี้ เราจะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในแต่ละกรณีที่กำหนดให้ X_n เป็นแฟกเตอร์ เราพิจารณาสมการที่กำหนดในรูปแบบแยก คือ

$$u_{xx} = \hat{L}(u)$$

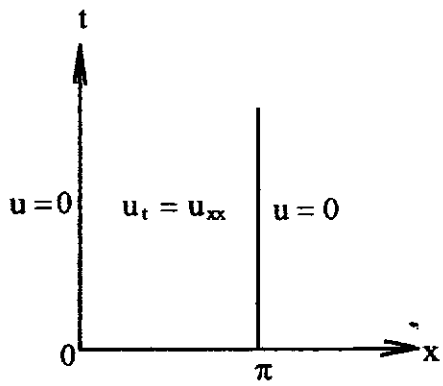
โดยที่ตัวดำเนินการ $\hat{L}$ ไม่เกี่ยวกับ x โดยชัดแจ้ง

สมการความร้อน :

$$u_t - u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0 \tag{4.32}$$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$



จะเห็นว่าทั้งสมการความร้อนและเงื่อนไขขอบเป็นเอกพันธ์ โดยเงื่อนไขขอบเป็นเงื่อนไข ดีริชเลต์ที่สอดคล้องกับ $X_n(x) = \sin nx, \quad n = 1,2,\ldots$ สำหรับแต่ละค่าของ n,

$$u(x,t) = T(t)\sin nx$$

จะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเดียวกันสำหรับฟังก์ชัน T ใด ๆ u จะสอดคล้องกับสมการ $u_t = u_{xx}$ ถ้า

$$T'(t)\sin nx = -n^2 T(t)\sin nx$$

ดังนั้นเราจึงให้ $T'(t) = -n^2 T(t)$ และสำหรับ ODE อันดับหนึ่งนี้เรามีผลเฉลยทั่วไปที่ทราบกันดี คือ

$$T_n(t) = b_n e^{-n^2 t} \tag{4.33}$$

โดยที่ b_n เป็นค่าคงตัว ผลที่ตามมาคือ

$$u_n(x,t) = b_n e^{-n^2 t}\sin nx \qquad n = 1,2,\ldots \tag{4.34}$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยของข้อปัญหาเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ ในทำนองเดียวกัน สำหรับค่าคงตัว a_n จะให้

$$u_n(x,t) = a_n e^{-n^2 t} \cos nx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.35}$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการเดียวกันแต่สอดคล้องกับเงื่อนไขนอยมันน์ N

สมมติว่าเราต้องการผลเฉลยสำหรับสมการความร้อนทั่วไป

$$u_t = k u_{xx} \qquad 0 < x < \ell, \quad k \text{ เป็นค่าคงตัว} \tag{4.36}$$

ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ เงื่อนไขนอยมันน์เช่นนี้ หลังจากที่เราแทนค่า x ด้วย $\pi x / \ell$ (ซึ่งเรียกว่าการเปลี่ยนมาตราส่วนหรือ scale change) ดังนั้น สำหรับแต่ละ $n = 0,1,2,\ldots$ เราลองให้ผลเฉลยเป็น

$$u(x,t) = T_n(t) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \tag{4.37}$$

และพบว่าเราต้องให้ $T_n(t) = a_n e^{-k(n\pi/\ell)^2 t}$ (4.38)

สมการคลื่น :

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < \pi, (c > 0 \text{ เป็นค่าคงตัว}) \tag{4.39}$$

ด้วยเงื่อนไข $u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$

ในที่นี้เงื่อนไขขอบเป็นเงื่อนไขโรบิน เราจึงลองให้ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ

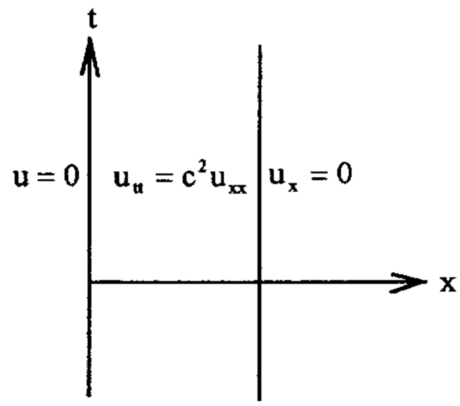
$$u(x,t) = T(t) \sin \frac{nx}{2}, \qquad n = 1,3,5,\ldots$$

ของสมการ $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ เมื่อแทนค่า $u(x,t)$ นี้ลงไปจะได้

$$T''(t) \sin \frac{nx}{2} = -c^2 \left(\frac{n}{2}\right)^2 T(t) \sin \frac{nx}{2}$$

จะเห็นได้ว่า T ควรสอดคล้องกับสมการ

$$T'' + \left(\frac{nc}{2}\right)^2 T = 0 \qquad n = 1,3,\ldots$$



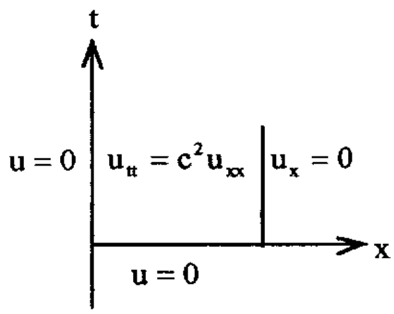
และสมการนี้มีผลเฉลยทั่วไปเป็น

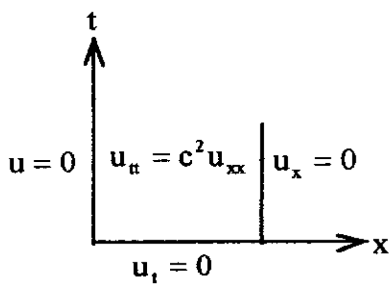
$$T_n(t) = a_n \cos\frac{nc}{2}t + b_n \sin\frac{nc}{2}t$$

สำหรับค่าคงตัว a_n และ b_n ใด ๆ ดังนั้นผลเฉลยของข้อปัญหาที่กำหนดให้คือ

$$u_n(x,t) = \left(a_n \cos\frac{nc}{2}t + b_n \sin\frac{nc}{2}t\right)\sin\frac{nx}{2} \qquad n = 1,3,\ldots \qquad (4.40)$$

สังเกตุว่าถ้าเราให้ $a_n = 0$, u_n นี้จะสอดคล้องกับเงื่อนไขเอกพันธ์เพิ่มเติมคือ $u(x,0) = 0$ และถ้าเราให้ $b_n = 0$ จะสอดคล้องกับเงื่อนไข $u_t(x,0) = 0$ (ดูรูปประกอบ)





อีกทางเลือกหนึ่งของ a_n และ b_n ที่ทำให้ u_n สอดคล้องกับเงื่อนไขโรบิน คือ

$$u_t(x,0) + 2u(x,0) = 0$$

สมการลาปลาซในพิกัดเชิงขั้ว :

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad r > 0 \tag{4.41}$$

การหาผลเฉลย $u = u(r,\theta)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขนอยมันน์

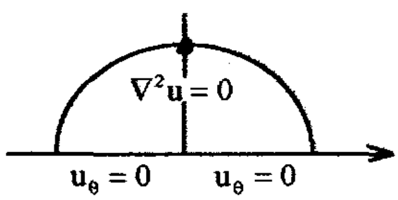
$$u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0 \tag{4.42}$$

เราเริ่มลองจาก

$$u(r,\theta) = R(r)\cos n\theta \qquad n = 0,1,\ldots$$

และเลือก $R = R(r)$ ที่ทำให้

$$\left(R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{n^2}{r^2}R\right)\cos n\theta = 0$$



ดังนั้น R ควรจะสอดคล้องกับสมการ

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{n^2}{r^2}R = 0$$

ซึ่งไม่เป็นมูลฐาน แต่ถ้าเราคูณตลอดด้วย r^2 จะกลายเป็นสมการโคชี

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \tag{4.43}$$

เมื่อแทนค่า $r = e^t$ ทำให้กลายเป็นสมการที่มีสัมประสิทธิ์คงตัว $T(t) = R(e^t)$ และ

$$rR' = \dot{T}, \quad r^2R'' = \ddot{T} - \dot{T}$$

โดยที่เครื่องหมาย . แสดงอนุพันธ์เทียบกับ t ดังนั้นสมการ (4.43) จึงกลายเป็น

$$(\ddot{T} - \dot{T}) + \dot{T} - n^2T = \ddot{T} - n^2T = 0$$

สำหรับ $n = 1,2,\ldots$ และค่าคงตัว a_n และ b_n,

$$T_n(t) = a_ne^{nt} + b_ne^{-nt}$$

หรือเนื่องจาก $e^{nt} = (e^t)^n = r^n$ และ $e^{-nt} = r^{-n}$

$$\therefore \quad R_n(r) = a_nr^n + b_nr^{-n} \qquad n = 1,2,\ldots$$

ส่วนกรณี $n = 0$ เราต้องพิจารณาแยกต่างหาก ในที่นี้ $T_0(t) = a_0 + b_0t$ ดังนั้น

$$R_0(r) = a_0 + b_0 \log r$$

และทำให้ผลเฉลยสำหรับ $r > 0$ กลายเป็น

$$u_0(r,\theta) = (a_0 + b_0 \log r)$$

$$u_n(r,\theta) = (a_nr^n + b_nr^{-n})\cos n\theta \qquad n = 1,2,\ldots \tag{4.44}$$

สำหรับสัมประสิทธิ์ใด ๆ a_n, b_n, $n = 0,1,2,\ldots$ แต่ละฟังก์ชันเป็นฮาร์มอนิก อย่างไรก็ตาม เมื่อ $b_n = 0$ ฟังก์ชันจะเป็นเช่นที่ได้แยกให้ดูแล้วและเป็นฮาร์มอนิกเช่นกัน

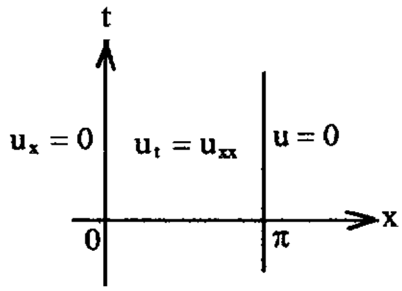
ถ้าเรามีเงื่อนไขในรูปแบบ D แทนที่จะเป็น N ในกรณีนี้ เราจะได้สมการ (4.44) โดย $\cos n\theta$ จะถูกแทนที่ด้วย $\sin n\theta$ สำหรับ $n = 1,2,\ldots$ เท่านั้น

วิธีการที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนี้เป็นการหาขั้นตอนสำหรับผลเฉลยที่ไม่แจ่มชัดของข้อปัญหาเชิงเอกพันธ์ที่กำหนด หากแนวทางดังกล่าวนี้ไม่ได้ผล เราอาจใช้เทคนิคพื้นฐานที่เรียกว่า การแยกตัวแปร

ดังได้กล่าวมาบ้างแล้วในบทที่ 1 กล่าวคือ เรายังคงเสาะหาผลเฉลยในรูปผลคูณของฟังก์ชันที่มีตัวแปรจำนวนน้อยแยกจากกัน ลองพิจารณาการหาผลเฉลยของสมการความร้อนที่กำหนดเงื่อนไขขอบดังนี้

$$u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < \pi$$

$$u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0$$



สังเกตุว่าเงื่อนไขขอบเช่นนี้ไม่เป็นแบบโรบิน เรามีทางเลือกหลายทาง ก่อนอื่นเราอาจลองฟังก์ชันตรีโกณมิติบางฟังก์ชันที่อาจใช้ได้ ต่อจากนั้นเราลองปรับให้เข้าสู่รูปแบบของโรบินโดยแทน x ด้วย $\pi - x$ อย่างไรก็ตามเราควรเลือกวิธีที่เป็นพื้นฐานกว่านี้โดยให้ผลเฉลยเขียนเป็น

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

ดังนั้น

$$u_t = XT', \quad u_{xx} = X''T$$

และ

$$XT' = X''T$$

เมื่อหารตลอดด้วย XT ทำให้เราแยกตัวแปรออกจากกันในรูปแบบ

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

เราจึงได้ 2 สมการย่อยเป็น

$$T' = \lambda T, \quad X'' = \lambda X$$

สมการแรกให้รูปแบบที่เป็นที่ทราบกันดีคือ $T(t) = ae^{\lambda t}$ แต่สมการที่สองมีผลเฉลยที่ขึ้นกับว่า λ เป็นบวก, ลบหรือเป็นศูนย์

เพื่อที่จะให้ $u = XT$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบที่กำหนดคือ

$$u_x(0,t) = 0 \quad \text{และ} \quad u(\pi,t) = 0$$

X จะต้องเลือกให้ได้ในลักษณะที่

$$X'(0) = 0 \qquad \text{และ} \qquad X(\pi) = 0$$

ดังนั้นเราจึงต้องแก้สมการค่าเจาะจง ของทั้ง λ และ X คือ

$$X'' - \lambda X = 0 \qquad 0 < x < \pi$$
$$X'(0) = X(\pi) = 0$$

กรณีที่ 1 : ถ้า $\lambda = 0$ สมการ $X'' = 0$ มีผลเฉลยเป็น

$$X(x) = a + bx \qquad \text{ด้วยค่า} \quad X'(x) = b$$

สำหรับค่าคงตัว a และ b

$$X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; b = 0 \quad \text{ดังนั้น} \quad X(x) = a$$

$$X(\pi) = 0 \;\Rightarrow\; a = 0 \quad \text{ดังนั้น} \quad X(x) = 0$$

เราจึงสรุปว่า ถ้า $\lambda = 0$ จะให้ผลเฉลยชัด $X(x) = 0$

กรณีที่ 2 : ถ้า $\lambda = \omega^2 > 0$ สมการ $X'' - \omega^2 X = 0$ มีผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$X(x) = a\cosh\omega x + b\sinh\omega x$$

และ

$$X'(x) = a\omega\sinh\omega x + b\omega\cosh\omega x$$

$$X'(0) = 0 = b\omega \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$X(\pi) = 0 = a\cosh\omega\pi \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

เราจึงสรุปว่า $X(x) = 0$ และเรามีผลเฉลยชัดเท่านั้น

กรณีที่ 3 : ถ้า $\lambda = -\omega^2 < 0$ สมการ $X'' + \omega^2 X = 0$ มีผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$X(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$$

และ

$$X'(x) = -a\omega\sin\omega x + b\omega\cos\omega x$$

$$X'(0) = 0 = b\omega \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

$$X(\pi) = 0 = a\cos\omega\pi$$

เราต้องเลือกให้ $a = 0$ เพราะ $\cos\omega\pi = 0$ เมื่อ $\omega\pi = \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1,3,5,\ldots$

ดังนั้น $\lambda_n = -\left(\frac{n}{2}\right)^2$ และ

$$X_n(x) = \cos\frac{nx}{2}, \qquad n = 1,3,5,\ldots$$

เป็นผลเฉลยไม่ชัดของสมการค่าเจาะจงที่กำหนดนี้

X_n เป็นฟังก์ชันเจาะจงของสมการค่าเจาะจงนี้ และทำให้ผลเฉลยของข้อปัญหาที่กำหนดไว้ตอนต้นเป็น

$$u_n(x,t) = e^{-(n/2)^2 t} \cos\frac{nx}{2} \qquad n = 1,3,5,\ldots$$

ตามที่กำหนดเงื่อนไขขอบไว้

หากมีเงื่อนไขอื่น ๆ เพิ่มเติมอีกเช่น เงื่อนไขเริ่มต้น ผลเฉลยอาจเขียนอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของทุกค่าของ $u_n(x,t)$ ที่เป็นไปตามหลักการซ้อนทับ

อย่างไรก็ตาม เมื่อเราเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ เราต้องพิจารณาดูด้วยว่าควรใช้ค่า n ที่เป็นค่าลบหรือไม่_ เพราะ $\sin(-nx) = -\sin(nx)$ และ $\cos(-nx) = \cos(nx)$ หากรวมกันได้ต้องนำมารวมด้วยเสมอ

มีข้อที่น่าสังเกตุเกี่ยวกับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$y''(x) - \alpha^2 y(x) = 0$$

ควรจำไว้ว่ามี 3 วิธีที่เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ :

ถ้าหนึ่งในเงื่อนไขขอบอยู่ในรูปแบบ

$$y(0) = 0 \qquad \text{หรือ} \qquad y'(0) = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไป

$$y(x) = A\cosh\alpha x + B\sinh\alpha x$$

จึงเหมาะที่สุดที่จะใช้เพราะค่าของ A หรือ B สามารถกำหนดได้โดยง่าย

ถ้า $y(L) = 0$ หรือ $y'(L) = 0$

เป็นเงื่อนไขขอบที่กำหนดโดย L เป็นจุดปลาย เราควรให้ผลเฉลยเป็น

$$y(x) = a\sinh\alpha(x-b) \qquad \text{สำหรับ} \quad y(L) = 0$$

$$y(x) = a\cosh\alpha(x-b) \qquad \text{สำหรับ} \quad y'(L) = 0$$

โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัวใด ๆ รูปแบบของผลเฉลยนี้ไม่ค่อยนิยมมากนักเมื่อเทียบกับกรณีแรก แต่สามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่าสมมูลกับเงื่อนไขขอบเฉพาะที่กำหนดโดยใช้เอกลักษณ์ไฮเพอร์โบลิก

$$\sinh(\alpha-\beta)=\sinh\alpha\cosh\beta-\cosh\alpha\sinh\beta$$

และ

$$\cosh(\alpha-\beta)=\cosh\alpha\cosh\beta-\sinh\alpha\sinh\beta$$

สุดท้ายคือ รูปแบบของผลเฉลย

$$y(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$$

พบว่ามีประโยชน์มากในการแก้ข้อปัญหาค่าขอบทั่วช่วงกึ่งอนันต์และการศึกษาปริพันธ์ฟูเรียร์ (Fourier integrals)

นอกจากนี้ในบางครั้งพบว่าการกำหนดผลเฉลยในรูปเชิงซ้อนจะมีประโยชน์มาก สมการความร้อน $u_t = ku_{xx}$ ไม่ยอมให้ผลเฉลยไม่ชัดที่มีการแกว่งกวัดในรูปแบบ

$$u(x,t)=X(x)e^{i\omega t}$$

ถ้า $X''=i(\omega/k)X$ แต่ด้วย $\omega/k=2a^2$, สมการสุดท้ายจะมีผลเฉลยเชิงซ้อน

$$X(x)=e^{\alpha x} \quad \text{เมื่อ} \quad \alpha^2=i2a^2 \quad \text{หรือ} \quad \alpha=\pm(1+i)a$$

ดังนั้น สำหรับแต่ละค่าของ a,

$$u(x,t)=e^{\alpha x}e^{i\omega t}=e^{ax}e^{i(2a^2kt+ax)}$$

จึงเป็นผลเฉลยเชิงซ้อนของสมการความร้อน ในขณะที่ส่วนจริง (real part)

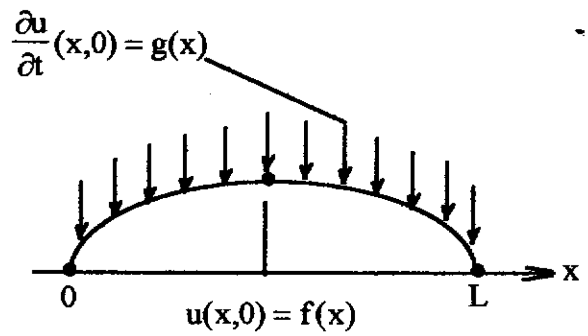
$$v(x,t)=e^{ax}\cos(2a^2kt+ax)$$

เป็นผลเฉลยค่าจริงที่ไม่เคยพบโดยวิธีตรง แต่ส่วนจินตภาพเป็นอีกส่วนหนึ่ง

4.5.2 ข้อปัญหาที่มีบางเงื่อนไขเริ่มต้นไม่เป็นเอกพันธุ์

ต่อไปเราจะหาระเบียบวิธีของผลเฉลยของข้อปัญหาค่าขอบที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นมากมายและ 2 หรือมากกว่าของเงื่อนไขเริ่มต้นไม่เป็นเอกพันธุ์ มี 2 ระเบียบวิธีที่เป็นที่รู้จักกันดีสำหรับการแก้ปัญหาในลักษณะเช่นนี้

ระเบียบวิธีแรกประกอบด้วยการแก้ 2 ข้อปัญหาค่าขอบดังที่ได้กล่าวมาแล้ว สมมติว่าเราต้องการแก้ปัญหาการสั่นของเชือกโดยที่ปลายเชือกทั้งสองตรึง และในตอนเริ่มต้นเชือกไม่เพียงแต่มีการกระจัดเท่านั้น แต่ความเร็วถูกระบุไว้ด้วย ดังแสดงในรูป



ปัญหานี้สามารถเขียนได้เป็น

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && 0 < x < L\,, \quad 0 < t \\
&u(0,t) = 0 = u(L,t) && 0 < t \\
&u(x,0) = f(x) && 0 < x < L \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) && 0 < x < L
\end{aligned}
$$

สมมติให้ผลเฉลยของสมการเขียนเป็น

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

โดยที่ v และ w สอดคล้องกับข้อปัญหาค่าขอบต่อไปนี้ตามลำดับคือ

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad , & \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \\
v(0,t) = 0 = v(L,t) \quad , & w(0,t) = 0 = w(L,t) & 0 < t \\
v(x,0) = f(x) & w(x,0) = 0 & \\
\dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0 & \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = g(x) & 0 < x < L
\end{array}
\tag{4.45}
$$

ผลที่เกิดจากการใช้ระเบียบวิธีการซ้อนทับ คือ ถ้า v และ w สอดคล้องกับข้อปัญหาค่าขอบแล้ว u จะต้องสอดคล้องกับสมการ (4.45) ด้วย

วิธีที่สองของการแก้ปัญหาอาจเรียกว่า การเข้าสู่โดยตรง กล่าวคือ เราแก้สมการ (4.45) โดยตรงดังที่เคยแสดงมาแล้ว ปัญหาค่าเจาะจงจะเหมือนเดิมแต่เมื่อเราแก้ ODE อื่น ๆ เราจะไม่มีเงื่อนไขเริ่มต้น เมื่อเราคูณ X_n ด้วย T_n แล้วหาผลรวมเชิงเส้นจนถึงอนันต์เพื่อให้ได้ $u(x,t)$ เราจะพบว่าจำเป็นต้องแก้ 2 เซตของค่าคงตัวใด ๆ เมื่อใช้เงื่อนไขเริ่มต้น 1 เงื่อนไขแล้ว จะนำไปสู่ปัญหาอนุกรมฟูเรียร์ 2 ปัญหาที่เราคำนวณ 2 เซตของค่าคงตัว

สมมติข้อปัญหาค่าขอบดังกล่าวคือ

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & 0 < x < 4 , \quad 0 < t \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}(4,t) & 0 < t \\
u(x,0) = 1 & 0 < x < 4 \\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x & 0 < x < 4
\end{array}
$$

ถ้าเราให้ $u(x,t) = X(x)T(t)$ ดังนั้น

$$
\begin{array}{l}
X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(4) = 0 \\
T'' + \dfrac{\lambda}{c^2} T = 0
\end{array}
$$

เมื่อแก้สมการค่าเจาะจงชุดแรกของ X เราจะได้ค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงเป็น

$$
\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{16}, \quad X_n = \cos\frac{n\pi x}{4} \qquad n = 0,1,2,\ldots
$$

ต่อจากนั้นจึงแก้สมการสำหรับ T เนื่องจากเราทราบ λ แล้ว ดังนั้นผลเฉลยของสมการจึงเป็น

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t$$

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi t}{4c} + B_n \sin\frac{n\pi t}{4c} \qquad n = 1,2,\ldots$$

สังเกตุว่าไม่มีเงื่อนไขเริ่มต้นพ่วงเข้ามาด้วยในสมการสำหรับ T เราจึงไม่สามารถหาค่า A_n หรือ B_n ในช่วงนี้ได้ เราจึงสมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(A_0 + B_0 t\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\frac{n\pi t}{4c} + B_n \sin\frac{n\pi t}{4c}\right]\cos\frac{n\pi x}{4}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{4c}\right)\left[-A_n \sin\frac{n\pi t}{4c} + B_n \cos\frac{n\pi t}{4c}\right]\cos\frac{n\pi x}{4}$$

เมื่อใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x,0) = 1$ จะได้

$$1 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{4}$$

ซึ่งเป็นอนุกรมฟูเรียร์ด้วยสัมประสิทธิ์ $A_0 = 2$ และ $A_n = 0$ ในลักษณะเดียวกันนี้ เมื่อเราทราบ $(\partial u/\partial t)(x,0) = x$ เราสามารถเขียน

$$x = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{4c} B_n \cos\frac{n\pi x}{4}$$

ในช่วง $[0, 4]$ ซึ่งเป็นอนุกรมฟูเรียร์แสดงฟังก์ชันคู่โดยขยายค่า x ในช่วง $[-4, 0]$ ด้วย -x จากการคำนวณพบว่า

$$B_0 = 4 \quad , \quad B_n = \begin{cases} -\dfrac{64c}{n^3\pi^3} & n = \text{เลขคี่} \\ 0 & n = \text{เลขคู่} \end{cases}$$

เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ลงไปในสมการของ u(x,t) ข้างต้นจะได้

$$u(x,t) = 1 + 2t - \frac{64c}{\pi^3}\sum_{1,3,5,..}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi t}{4c}\cos\frac{n\pi x}{4}$$

จากผลเฉลยนี้จะเห็นว่าตรงกลางเชือกคือ ที่ x = 2 มีการกระจัด u(2,t) = 1+2t ซึ่งบอกให้ทราบว่าเมื่อเชือกมีการเคลื่อนที่ ตรงกลางเชือกจะอยู่ห่างจาก u(2,0) = 1 ด้วยความเร็ว 2 m/s เมื่อ t = 4ca โดยที่ a = 0, 1, 2, ... เชือกจะอยู่ในแนวขนานกับแกน x

แฟกเตอร์ $\sin(n\pi t/4c)$ ทำให้เรากำหนดความถี่ของการสั่นของเชือกได้คาบ λ_n ของแต่ละเทอมในอนุกรมกำหนดโดย

$$\lambda_n = \text{คาบ} = \frac{2\pi}{n\pi/4c} = \frac{8c}{n}$$

และความถี่ f_n คือ $f_n = \frac{1}{\lambda_n} = \frac{n}{8c}$

ค่าน้อยที่สุดของ n คือ n = 1 จะให้ความถี่หลักมูล (fundamental frequency) คือ $f_1 = 1/8c$ ส่วนค่า n ที่มากกว่า 1 เป็นต้นไป จะให้ความถี่ที่เป็นพหุคูณของความถี่หลักมูล เรียกว่า ฮาร์มอนิกส์ (harmonics) เช่น ค่า n = 2 เป็นฮาร์มอนิกที่สอง n = 3 เป็นฮาร์มอนิกที่สาม เป็นต้น

4.5.3 ข้อปัญหาเชิงไม่เอกพันธุ์

ข้อปัญหาค่าขอบบางข้อเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธุ์และเงื่อนไขขอบที่ไม่เอกพันธุ์ โดยทั่วไปไม่มีแนวทางโดยตรงใด ๆ ที่สามารถแก้ปัญหาเหล่านี้ได้ อย่างไรก็ตาม ถ้าส่วนของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเอกพันธ์เป็นฟังก์ชันของ x และเงื่อนไขขอบมีค่าคงตัว เราอาจดำเนินการแก้สมการทีละขั้นได้ ขอให้ศึกษาจากตัวอย่างดังนี้

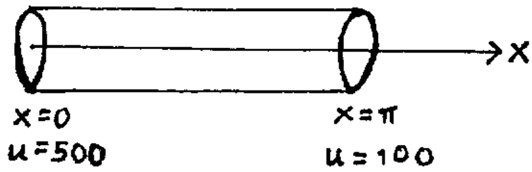
สมมติเราต้องการหาอุณหภูมิ u(x,t) ในแท่งโลหะที่กั้นฉนวนด้านข้างความยาว π โดยมีอุณหภูมิเริ่มต้นเป็น f(x) เมื่อเวลาผ่านไปให้ปลายแท่งทางซ้ายมือตรึงที่อุณหภูมิ 500° และปลายแท่งทางขวามือตรึงที่อุณหภูมิ 100° นอกจากนี้, สำหรับเวลา t > 0 มีกระแสไฟฟ้าเกิดขึ้นด้วยควบคู่กับความร้อนโดยปรากฏเป็นเทอม sin x ใน PDE ข้อปัญหาค่าขอบนี้จึงกำหนดเป็นสมการได้เป็น

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x$$

$u(0,t) = 500 \qquad 0 < t$

$u(\pi,t) = 100 \qquad 0 < t$

$u(x,0) = f(x) \qquad 0 < x < \pi$



เราสมมติให้ผลเฉลยแยกออกเป็น 2 ส่วนคือ

$$u(x,t) = v(x,t) + h(x)$$

เราจะวางแผนให้ v(x,t) เป็นเฉลยของข้อปัญหาเชิงเอกพันธ์โดยการเลือกค่าคงตัวของการอินทิเกรต เมื่อแทนค่า u(x,t) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + kh''(x) + \sin x$$

ดังนั้น เพื่อให้เป็นไปตามแผนที่ตั้งไว้ $kh''(x) = -\sin x$ ทำให้ได้

$$h(x) = C_1 x + C_2 + \frac{\sin x}{k}$$

ต่อไปเราดูที่เงื่อนไขขอบ ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$v(0,t) + h(0) = 500$$
$$v(\pi,t) + h(\pi) = 100$$

เพื่อให้ v(0,t) และ $v(\pi,t)$ เท่ากับศูนย์ เราต้องให้

$$h(0) = 500 \qquad \text{และ} \qquad h(\pi) = 100$$

เราใช้เงื่อนไขเหล่านี้เพื่อหาค่าคงตัว C_1 และ C_2 นั่นคือ

$$h(0) = 500 = C_1(0) + C_2 + \frac{\sin 0}{k} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 500$$
$$h(\pi) = 100 = C_1(\pi) + 500 + \frac{\sin \pi}{k} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{400}{\pi}$$

ดังนั้น

$$h(x) = -\frac{400}{\pi}x + 500 + \frac{\sin x}{k}$$

ต่อไปเราจะหาค่า v(x,t) ซึ่งตอนนี้สอดคล้องกับข้อปัญหาค่าขอบ

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$v(0,t) = 0 = v(\pi,t) \qquad 0 < t$$
$$v(x,0) = u(x,0) - h(x)$$
$$= f(x) - \frac{\sin x}{k} + \frac{400}{\pi}x - 500 \qquad 0 < x < \pi$$

ถ้า $f(x) = (\sin x / k) + 500$ ดังนั้น $v(x,0) = (400/\pi)x$

ถ้าให้ $v(x,t) = X(x)T(t)$ จะนำไปสู่สมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบ

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad X(0) = X(\pi) = 0$$
$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0$$

ค่าเฉพาะคือ $\lambda = n^2$, $n = 1,2,\ldots$ และฟังก์ชันเฉพาะคือ $X_n(x) = \sin nx$ และ $T_n(t) = e^{-kn^2t}$

เมื่อรวบรวมผลที่ได้ทั้งหมด เราคาดหวังว่าผลเฉลยจะอยู่ในรูปแบบ

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-kn^2t} \sin nx$$

และเนื่องจาก $v(x,0) = \frac{400}{\pi}x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

จะเห็นว่า

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{400x}{\pi}\sin nx = (-1)^{n+1}\frac{800}{n\pi}$$

ผลเฉลยของข้อปัญหาเชิงเอกพันธ์ คือ

$$v(x,t) = \frac{800}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-kn^2 t} \sin nx$$

ผลเฉลยของข้อปัญหาไม่เชิงเอกพันธ์ เมื่อใช้หลักการซ้อนทับจึงเป็น

$$u(x,t) = \frac{800}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-kn^2 t} \sin nx - \frac{400}{\pi}x + 500 + \frac{\sin x}{k}$$

ข้อปัญหานี้เป็นหนึ่งในปัญหาที่เกิดทั่วไปของการไหลของความร้อน สังเกตุว่าคำตอบ u(x,t) ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ อนุกรมอนันต์ ซึ่งขึ้นกับ x และ t และอีกส่วนหนึ่งคือ h(x) ซึ่งขึ้นกับ x เท่านั้น เนื่องจากเทอมเอกซ์โพเนนเชียลใน v(x,t) จะเห็นว่าเมื่อ $t \to +\infty$ ค่าของอนุกรมจะเข้าสู่ศูนย์ ผลเฉลยส่วนนี้จึงเรียกว่า **ผลเฉลยชั่วครู่** (transient solution) เพราะจะหายไปอย่างรวดเร็ว อีกส่วนหนึ่งของผลเฉลย h(x) ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาจึงเรียกว่า **ผลเฉลยสถานะคงตัว** (steady - state solution)

นอกจากนี้สังเกตุว่าแฟกเตอร์ n^2 ปรากฏในเทอมเอกซ์โพเนนเชียลในอนุกรม เทอมนี้ลดลงอย่างรวดเร็วแม้ในช่วงเวลาอันสั้นของ t ดังนั้น **เราสามารถกำหนดค่าประมาณของเทอมชั่วครู่โดยใช้เทอมเดียวหรือสองเทอมก็พอแล้ว**

4.6 การเปลี่ยนมาตราส่วนและมิติ

สมการลาปลาซในพิกัดเชิงขั้วของหัวข้อที่ 4.5.1 แสดงให้เห็นว่าการเปลี่ยนพิกัดของระบบมีผลเป็นอย่างยิ่งต่อรูปแบบของ PDE นอกจากนี้ การเลือกพิกัดของระบบมีผลต่อการแยกตัวแปรของข้อปัญหาด้วย ภายในระบบที่กำหนดพิกัดแล้ว **การเปลี่ยนมาตราส่วนอาจมีประโยชน์แต่ต้องใช้ให้ตลอดการแก้ปัญหา**

ตัวอย่างเช่น การเปลี่ยนมาตราส่วน $\bar{x} = x/\ell$, $\bar{y} = y/b$ จะแปลงสี่เหลี่ยมผืนผ้า $\{0 < x < \ell,\ 0 < y < b\}$ ไปสู่สี่เหลี่ยมจัตุรัส $\{0 < \bar{x} < 1,\ 0 < \bar{y} < 1\}$ อย่างไรก็ตามอาจแปลงผลเฉลย $u = u(x,y)$ ของสมการลาปลาซ $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ในพิกัดฉากไปสู่ผลเฉลย $\bar{u} = u(\ell\bar{x}, b\bar{y})$ ของสมการ

$$\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{\ell^2}{b^2}\bar{u}_{\bar{y}\bar{y}} = 0$$

$\bar{u}$ จะเป็นฮาร์มอนิกในจัตุรัสถ้า $\ell = b$ ดังนั้นเราอาจรักษาสภาพฮาร์มอนิกได้ตลอดการเปลี่ยนมาตราส่วน หรืออีกนัยหนึ่ง แทนที่เราจะเสาะหาผลเฉลย $\bar{u}$ ของสมการ

$$\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + 4\bar{u}_{\bar{y}\bar{y}} = 0$$

ในจัตุรัสหน่วย แต่อาจจะเป็นการง่ายที่จะหาฟังก์ชันฮาร์มอนิก u ในสี่เหลี่ยมผืนผ้า $\{0 < x < 2,\ 0 < y < 1\}$ ได้เช่นกัน

ในทำนองเดียวกัน การเปลี่ยนมาตราส่วน $\bar{x} = \pi x / \ell,\ \ \bar{t} = (\pi^2 / \ell^2)kt$ สำหรับค่า k และ ℓ ที่เป็นบวก การแปลงผลเฉลย $u = u(x,t)$ ของสมการความร้อน $u_t = ku_{xx}$ ในช่วง $\{0 < x < \ell,\ \ t > 0\}$ ไปสู่ผลเฉลย $\bar{u} = u(\ell\bar{x} / \pi,\ \ \ell^2\bar{t} / k\pi^2)$ ของสมการที่ง่ายกว่าคือ $\bar{u}_{\bar{t}} = \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}$ ในช่วง $\{0 < \bar{x} < \pi,\ \ \bar{t} > 0\}$ ในกรณีนี้ ค่าคงตัวของข้อปัญหาถูกกลืนโดยตัวแปรใหม่แล้ว

นอกจากนี้แล้วยังมีสิ่งที่สำคัญอีกประการหนึ่งของการเปลี่ยนมาตราส่วนและมักจะควบคู่ไปด้วยกัน คือ มิติ ของข้อปัญหา ซึ่งเราจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้ สมมุติ เราจะหาผลเฉลย $u = u(x,t)$ ของสมการ

$$u_t = ku_{xx} - au_x \qquad 0 < x < \ell$$

โดยที่ k และ a เป็นค่าคงตัวที่เป็นบวก เราจะดูว่าผลเฉลยเหล่านี้ขึ้นกับค่า x, t, a, k และ ℓ อย่างไร เราเสนอตัวแปรอิสระใหม่เป็น $\bar{x} = x / \ell$ และ $\bar{t} = t / T$ และให้ $\bar{u}(\bar{x},\bar{t}) = u(\ell\bar{x}, T\bar{t})$ ดังนั้น

$$u_t = \frac{1}{T}\bar{u}_{\bar{t}}, \quad u_x = \frac{1}{\ell}\bar{u}_{\bar{x}}, \quad u_{xx} = \frac{1}{\ell^2}\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}$$

และสมการใหม่จะกลายเป็น

$$\frac{1}{T}\bar{u}_{\bar{t}} = \frac{k}{\ell^2}\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{a}{\ell}\bar{u}_{\bar{x}}$$

หรือ

$$\bar{u}_{\bar{t}} = \frac{kT}{\ell^2}\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{aT}{\ell}\bar{u}_{\bar{x}} \qquad (4.46)$$

ถ้าเราเลือก $T = \ell / a$ หรือ $aT / \ell = 1$ ดังนั้น

$$\bar{t} = \frac{at}{\ell} \quad , \quad \frac{kT}{\ell^2} \quad = \quad \frac{k}{\ell a}$$

และทำให้สมการ (4.46) มีรูปแบบที่ง่ายขึ้น คือ

$$\bar{u}_{\bar{t}} = \frac{k}{\ell a}\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} - \bar{u}_{\bar{x}}$$

สำหรับค่าเฉพาะของ $k / \ell a$ ผลเฉลย $\bar{u} = \bar{u}(\bar{x}, \bar{t}, k / \ell a)$ ของสมการ เมื่อ $0 < \bar{x} < 1$ จะสมนัยกับผลเฉลย

$$u(x,t) = \bar{u}\left(\frac{x}{\ell}, \frac{at}{\ell}, \frac{k}{\ell a}\right)$$

ของสมการเริ่มต้นที่กำหนดให้ เมื่อ $0 < x < \ell$

ถ้าสมการที่กำหนดมีมิติที่ระบุชัดเจน เช่น x เป็นความยาว t เป็นเวลา u เป็นความเร็ว เป็นต้น แต่ละเทอมที่จะนำมาบวกกันจะต้องมีมิติเหมือนกัน ในกรณีนี้ อัตราส่วนของความเร็ว/เวลา จะมีมิติเช่นเดียวกับของ u_t

ในกรณีพิเศษที่เป็นอิสระต่อมิติของ u:

มิติของ k จะต้องเป็น $(\text{ความยาว})^2 / \text{เวลา}$

มิติของ a จะต้องเป็น ความยาว / เวลา

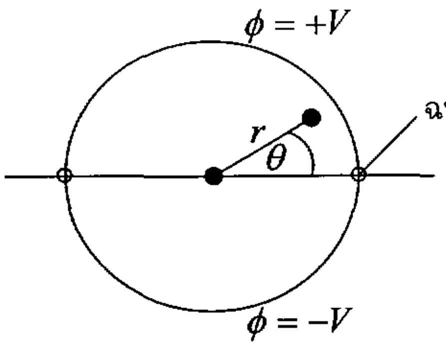
ดังนั้น ถ้า ℓ เป็นความยาว จะทำให้

$$\pi_1 = \frac{x}{\ell}, \quad \pi_2 = \frac{at}{\ell}, \quad \pi_3 = \frac{k}{\ell a}$$

ไม่มีหน่วยหรือไม่มีมิติ และเราได้แสดงให้เห็นว่าผลเฉลย u ของสมการที่กำหนดให้สำหรับ $0 < x < \ell$ เป็นฟังก์ชันของ π_1, π_2 และ π_3 แทนที่จะเป็นของปริมาณ x, t, a, k และ ℓ ในที่นี้ความเป็นเชิงเส้นของสมการช่วยให้เราสรุปผลได้รวดเร็วขึ้น

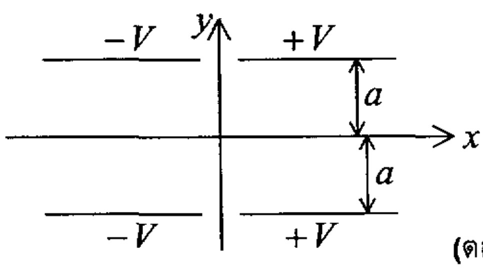
แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. โลหะรูปทรงกระบอกกลวงยาวมากมีรัศมี a ถูกแยกเป็นสองส่วนและคั่นด้วยฉนวน ทั้งสองส่วนของทรงกระบอกถูกตรึงด้วยศักย์ไฟฟ้า $+V$ และ $-V$ ตามลำดับ จงหาสนามไฟฟ้าสถิต $\bar{E}$ ภายในทรงกระบอกนี้ ปัญหานี้ควรใช้พิกัดทรงกระบอกดังแสดงในรูป



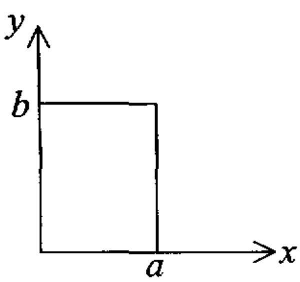
(ตอบ : $\phi(r,\theta) = \dfrac{4V}{\pi}\sum_{m=1,3,5,..} \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{r}{a}\right)^m \sin m\theta$)

2. แผ่นโลหะตัวนำขนาดใหญ่จำนวน 4 แผ่นมีศักย์ไฟฟ้าแสดงดังรูป เนื่องจากขนาดแผ่นโลหะมีขนาดใหญ่มากเมื่อเทียบกับระยะห่าง $2a$ ระหว่างแผ่นจึงถือว่ามันขยายไปถึงระยะอนันต์ในแนวแกน x และ z จงหาศักย์ไฟฟ้าภายในแผ่นโลหะนี้



(ตอบ : $\phi(x,y) = \dfrac{2V}{\pi}\int_0^\infty \dfrac{\cosh ky}{\cosh ka}\cdot\dfrac{\sin kx}{k}dk$)

3. คลื่นเสียงกำเนิดขึ้นที่ปลายด้านหนึ่งของท่อสี่เหลี่ยมยาว ซึ่งมีหน้าตัดขนาด $a \times b$ ดังรูป จงหารูปแบบของคลื่นภายในท่อสำหรับความถี่ค่าต่าง ๆ กัน



(ตอบ : $\phi(r,t) = \cos\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b}(A\cos kz + B\sin kz)e^{-iwt}$

โดยที่ $k = \left(\dfrac{w^2}{c^2} - \dfrac{m^2\pi^2}{a^2} - \dfrac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^{1/2}$)

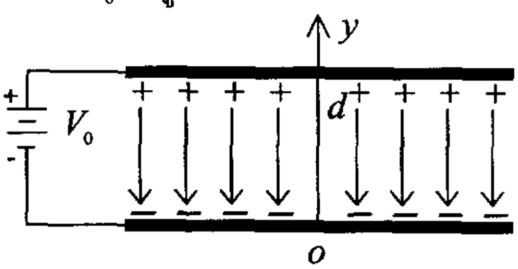
4. ในบางระบบซึ่งความหนาแน่นประจุไฟฟ้า ρ กระจายในลักษณะ

$$\rho = \begin{cases} Ar\cos\theta & , \ o \le r < a \\ o & , \ r \ge a \end{cases}$$

จงหาศักย์ไฟฟ้าสถิต*ภายใน*และ*ภายนอก*การกระจายประจุนี้ โดยถือว่าศักย์และค่าอนุพันธ์เชิงรัศมีของทั้งสองกรณีมีค่าต่อเนื่องทุกหนแห่ง

(ตอบ : $V_{in}(r,\theta,\phi) = \dfrac{A}{\epsilon_0}\left(\dfrac{a^2 r}{6} - \dfrac{r^3}{10}\right)\cos\theta, V_{out}(r,\theta,\phi) = \dfrac{Aa^5}{15\epsilon_0}\cdot\dfrac{\cos\theta}{r^2}$)

5. แผ่นตัวนำแบบขนานขนาดใหญ่สองแผ่นอยู่ห่างกันเป็นระยะ d และคงสภาพศักย์ไฟฟ้าที่ค่า 0 และ V_0 ดังรูป บริเวณภายในระหว่างแผ่นขนานบรรจุด้วยอิเล็กตรอน ซึ่งกระจายอย่างสม่ำเสมอด้วยความหนาแน่น $\rho = -\rho_0 \, {}^{y}\!/_{d}$ จงหา



(ก) ศักย์ไฟฟ้าที่ตำแหน่งใด ๆ ระหว่างแผ่นขนานและ

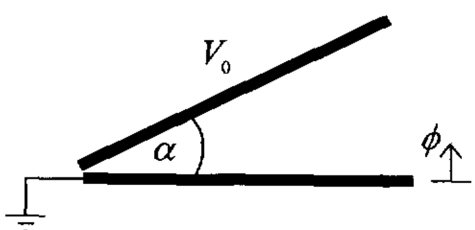
(ข) ความหนาแน่นประจุที่ผิวบนแผ่นขนาน

(ตอบ : (ก) $V(y) = \dfrac{\rho_0 y^3}{6\epsilon_0 d} + \left(\dfrac{V_0}{d} - \dfrac{\rho_0 d}{6\epsilon_0}\right)y$

(ข) ที่แผ่นล่าง, $\rho_\ell = E_\ell \, \epsilon_0 = -\dfrac{\epsilon_0 V_0}{d} + \dfrac{\rho_0 d}{6}$

ที่แผ่นบน, $\rho_u = -E_u \, \epsilon_0 = \dfrac{\epsilon_0 V_0}{d} + \dfrac{\rho_0 d}{3}$)

6. แผ่นตัวนำคั่นฉนวนขนาดใหญ่สองแผ่นคงสภาพศักย์ไฟฟ้าเป็น 0 และ V_0 ด้วยรูปลิ่มดังรูป จงหาการกระจายศักย์ไฟฟ้าสำหรับบริเวณ



(ก) $0 < \phi < \alpha$ และ

(ข) $\alpha < \phi < 2\pi$

(ตอบ : (ก) $V(\phi) = \dfrac{V_0}{\alpha}\phi$ (ข) $V(\phi) = \dfrac{V_0}{2\pi - \alpha}(2\pi - \phi)$)

บทที่ 5
ข้อปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์

5.1 สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์

ในบทที่ 4 เราได้กล่าวถึงแนวทางการแก้ปัญหาของข้อปัญหาค่าขอบมาบ้างพอสมควรแล้ว เราทราบว่าผลเฉลยแยกของ PDE ที่มีเงื่อนไขขอบระบุไว้ด้วย มักนำไปสู่ระบบของ **ฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก** (orthogonal function) หรืออีกนัยหนึ่ง **ฟังก์ชันเชิงตั้งฉากเกิดขึ้นโดยธรรมชาติจากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองด้วยเงื่อนไขขอบ** สองฟังก์ชันใด ๆ ϕ, φ เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากกันถ้าผลคูณภายใน (inner product) เท่ากับศูนย์ หรือ

$$< \phi \mid \varphi >= \int_a^b \phi(x)\varphi(x)dx = 0 \tag{5.1}$$

หากมีมากกว่าสองฟังก์ชันขึ้นไป เรากล่าวว่า $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ตั้งฉากกัน ถ้า $< \varphi_i \varphi_j > = 0$ สำหรับ $i \neq j$ ตัวอย่างเช่น sinx และ cosx ตั้งฉากกันในช่วง $0 \leq x \leq \pi$ เพราะ

$$\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\sin^2 x \Big|_0^\pi = 0$$

ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในรูปอนุกรมเป็นฟังก์ชันเจาะจงของข้อปัญหาค่าขอบต่อไปนี้ในช่วง $0 \leq x \leq c$

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \qquad X(0) = 0, X(c) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \qquad X'(0) = 0, X'(c) = 0 \end{aligned}$$

ข้อปัญหาในลักษณะเช่นนี้เป็นตัวอย่างหนึ่งของข้อปัญหาที่เรียกว่า **ข้อปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์** (Sturm-Liouville problems) ในบทนี้เราจะกล่าวถึงผลเฉลยที่เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากของข้อปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ดังกล่าวนี้

สมมุติเรามีตัวดำเนินการเชิงเส้นที่กำหนดโดย

$$\hat{L} = P_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + P_1(x)\frac{d}{dx} + P_o(x)$$

การแยกตัวแปรของ PDE มักนำไปสู่สมการในรูปแบบ

$$\hat{L}[u] + \lambda u = 0 \tag{5.2}$$

หรือ

$$p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2} + p_1(x)\frac{du}{dx} + p_o(x)u + \lambda u = 0 \tag{5.3}$$

ซึ่งเป็นสมการค่าเจาะจงสำหรับตัวดำเนินการ $\hat{L}$ ถ้าเราคูณสมการ (5.3) ด้วย

$$w(x) \equiv \frac{1}{p_2(x)}\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt\right]$$

แล้วจัดรูปแบบสมการเสียใหม่เป็น

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + [\lambda w(x) - q(x)]u = 0 \tag{5.4}$$

โดยที่ $p(x) \equiv w(x)p_2(x)$

และ $q(x) \equiv -p_o(x)w(x)$

สมการ (5.4) มีลักษณะผูกพันในตัว (self-adjoint) ซึ่งเคยกล่าวเป็นทฤษฎีบทในบทที่ 2 แล้ว รูปแบบมาตรฐานตามสมการ (5.4) นี้เรียกว่า **สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์** (Sturm-Liouville equation)

ข้อปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ เป็นข้อปัญหาของการหาทุกค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ λ เป็นค่าคงตัวที่ไม่ทราบค่าและสมมติว่าเป็นค่าจริง ส่วน $p(x)$, $q(x)$ และ $w(x)$ มีค่าต่อเนื่องใน $[a, b]$ $w(x)$ เป็น**ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก** (weight function) ซึ่งไม่เปลี่ยนเครื่องหมายภายในช่วง

และสามารถกำหนดให้เป็นบวก สมการ (5.4) สามารถแก้ภายใต้เงื่อนไขขอบที่กำหนดเช่น สมการที่มีสัมประสิทธิ์คงตัว $u'' + \lambda u = 0$ เป็นสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ด้วยค่า $p(x) = 1$, $w(x) = 1$, $q(x) = 0$ สมการเบสเซล $(xu')' + \lambda(xu) = 0$ เป็นสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ด้วยค่า $p(x) = x$, $w(x) = x$, $q(x) = 0$

สมการ (5.4) มีรูปแบบผูกพันในตัว สมการอื่น ๆ สามารถเขียนในรูปแบบนี้ได้โดยการเลือก $p(x)$, $w(x)$ และ $q(x)$ ที่เหมาะสม เช่น สมการที่มีรูปแบบเป็น

$$a(x)u'' + b(x)u' + [\lambda c(x) - d(x)]u = 0$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผูกพันในตัวได้โดยให้

$$p(x) = \exp\left[\int^x \frac{b(t)}{a(t)}dt\right]$$

$$w(x) = p(x)\frac{c(x)}{a(x)} \text{ และ } q(x) = p(x)\frac{d(x)}{a(x)}$$

ฟังก์ชัน $p(x)$, $w(x)$, $u(x)$ สมมติให้มีค่าต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ ด้วยค่า $p(x) > 0$ และ $w(x) > 0$ สำหรับ $a < x < b$ **ถ้า $p(a)w(a) = 0$ หรือ $p(b)w(b) = 0$,** จัดให้เป็น **ข้อปัญหาเอกฐานสตูร์ม-ลีอูวิลล์** (singular Sturm-Liouville problem) ในทางตรงกันข้าม, **ถ้าทั้ง $p(a)w(a) \neq 0$ และ $p(b)\,w(b) \neq 0$** จะเป็น**ข้อปัญหาปรกติสตูร์ม-ลีอูวิลล์** (regular Sturm-Liouville problem) ตัวอย่างเช่น $u'' + \lambda u = 0$ เป็นข้อปัญหาปรกติสตูร์ม-ลีอูวิลล์ และสมการเบสเซล $(xu')' + \lambda(xu) = 0$ เป็นข้อปัญหาเอกฐาน สตูร์ม-ลีอูวิลล์ ถ้า $0 < x < 1$ และเป็นข้อปัญหาปรกติสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ถ้า $1 < x < 2$ และถ้า **$-1 < x < 1$, สมการเบสเซลจะไม่เป็นสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ เพราะว่าฟังก์ชัน $p(x) = 0$ ที่ $x = 0$ ซึ่งอยู่ภายในช่วง $-1 < x < 1$**

เงื่อนไขขอบโดยทั่วไปมักเขียนเป็นผลรวมของค่า u และ u' ที่ปลายทั้งสองซึ่งแยกจากกันและเป็นอิสระต่อกัน สมการปรกติสตูร์ม-ลีอูวิลล์ภายในช่วง $[a, b]$ ด้วยเงื่อนไขขอบที่แยกจากกันคือ

$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0$$

และ

$$\beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$$

โดยที่ α, α', β และ β' เป็นค่าคงตัวที่กำหนดให้, ก่อให้เกิดข้อปัญหาปรกติสตูร์ม-ลีอูวิลล์ กรณีที่ $\alpha = \alpha' = 0$ และ $\beta = \beta' = 0$ ไม่นับเข้ากรณีนี้

อีกรูปแบบหนึ่งของเงื่อนไขขอบที่มักกำหนดกันคือ **เงื่อนไขขอบที่เป็นคาบ**เงื่อนไขเช่นนี้เหมาะกับกรณีที่ฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ เป็นคาบในช่วง [a, b] ด้วยคาบ (b - a) ในกรณีนี้เงื่อนไขขอบ

$$u(a) = u(b) \quad \text{และ} \quad u'(a) = u'(b)$$

ถูกกำหนดบนฟังก์ชันเจาะจงของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์

ลองพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้ :

(1) ข้อปัญหาสตูร์-ลีอูวิลล์ที่ประกอบด้วยสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0$$

ในช่วง [o, T] ด้วยเงื่อนไขขอบที่แยกจากกัน $u(0) = 0$ และ $u(T) = 0$ มีฟังก์ชันเจาะจงเป็น

$$u_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{T}\right)t \qquad n = 1, 2, ...$$

และค่าเจาะจง $\quad \lambda_n \equiv \omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 \qquad n = 1, 2, ...$

สังเกตุว่าเราไม่นับ $n = 0$ เพราะจะนำไปสู่ผลเฉลยชัด $u_o(t) = 0$.

(2) จากตัวอย่างที่ (1) ถ้าช่วงเปลี่ยนไปเป็น [-T, + T] และเงื่อนไขขอบที่เป็นคาบ $u(-T) = u(T)$ และ $u'(-T) = u'(T)$ เงื่อนไขขอบที่เป็นคาบในกรณีนี้ใช้ได้เพราะฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ $p(t) = w(t) = 1$ และ $q(t) = 0$ เป็นคาบใน [-T, +T] ฟังก์ชันเจาะจงเป็น 1, $\sin(n\pi t / T)$ และ $\cos(n\pi t / T)$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มค่าบวก **นอกจากนี้ยังมีสภาพซ้อนสถานะด้วย**เพราะฟังก์ชันเจาะจงทั้งสองเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันมีค่าเจาะจงเดียวกันคือ $(n\pi / T)^2$

(3) สมการเบสเซลสำหรับค่า ν^2 ที่ตรึงคือ

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0 \qquad a \le x \le b$$

ซึ่งทำให้อยู่ในรูปของสมการสตูร์ม-ลิอูวิลล์ได้โดยคูณด้วย

$$w(x)=\frac{1}{p_2(x)}\exp\left[\int^x\frac{p_1(t)}{p_2(t)}dt\right]=\exp\left[\int^x\frac{dt}{t}\right]=x$$

ดังนั้น $$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\left(k^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)u=0$$

ซึ่งเมื่อเทียบกับสมการ (5.4) จะได้ $p=w=x, \lambda=k^2$ และ $q(x)=\nu^2/x$ และถ้า $a>0$ เราจะได้ข้อปัญหาปรกติสตูร์ม-ลิอูวิลล์

ในข้อปัญหาสตูร์ม-ลิอูวิลล์ **เราจะศึกษาดูว่า λ มีผลต่อค่าของ u และ u' ได้อย่างไรที่บางจุดภายในช่วงที่กำหนด** พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์สองสมการ

$$\begin{aligned}\hat{L}u_j &= -\lambda_j w u_j\\ \hat{L}u_i^* &= -\lambda_i^* w u_i^*\end{aligned}$$

โดยที่เรายอมให้ผลเฉลยเชิงซ้อนประกอบด้วยฟังก์ชันจริง $p(z)$, $q(z)$, และ $w(z)$ เท่านั้น ผลเฉลยเชิงซ้อนมีความเป็นไปได้เสมอเพราะถ้า $u_{1,2}$ **เป็นผลเฉลยจริง 2 ค่าที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ดังนั้น $u_1 \pm iu_2$ จะเป็นผลเฉลยเชิงซ้อนที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันเช่นกัน**

สมการทั้งสองสามารถรวมกันได้เป็น

$$u_i^*\hat{L}u_j-u_j\hat{L}u_i^*=(\lambda_i^*-\lambda_j)wu_i^*u_j$$

เราจะอินทิเกรตทั้งสองข้างคือ

$$\left(\lambda_i^*-\lambda_j\right)\int_a^b wu_i^*u_j dz=\int_a^b\left(u_i^*\hat{L}u_j-u_j\hat{L}u_i^*\right)dz$$

ปริพันธ์แรกทางขวามือสามารถอินทิเกรตซ้ำโดยวิธีแยกส่วน

$$\int_a^b u_i^*\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dz}u_j\right)dz$$

$$= u_i^* p u_j' \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dz} u_i^*\right) p \frac{d}{dz} u_j dz$$

$$= p\left(u_i^* u_j' - u_j^{*\prime} u_j\right) \Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{d}{dz}\left(p \frac{d}{dz} u_i^*\right)\right] u_j dz$$

เงื่อนไขขอบที่ z = a และ b สามารถเลือกให้ทั้งฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน รวมทั้งส่วนผสมทั้งสองมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นในแต่ละกรณีจะทำให้

$$\int_a^b u_i^* \hat{L} u_j dz = \int_a^b u_j \hat{L} u_i^* dz = \int_a^b (\hat{L} u_i) * u_j dz$$

$$= \int_a^b (u_j^* \hat{L} u_i) * dz$$

โดยที่เราสามารถเขียนได้ 3 รูปแบบที่สมมูลกัน ตัวดำเนินการ $\hat{L}$ ที่สอดคล้องกับสมบัติเช่นนี้จึงเป็น **เฮอร์มิเทียน หรือ ผูกพันในตัว** ดังนั้นตัวดำเนินการจึงเป็นเฮอร์มิเทียนเป็นบางส่วนเพราะเงื่อนไขขอบที่กล่าวนี้สอดคล้องกับฟังก์ชัน u_i^* และ u_j ดังกล่าว สำหรับฟังก์ชันอื่น ๆ ที่เงื่อนไขขอบที่กำหนดไม่ทำให้เทอมของปริพันธ์เป็นศูนย์, ตัวดำเนินการ $\hat{L}$ เดียวกันนี้จะไม่เฮอร์มิเทียน

ไม่มีเหตุผลใดที่จะเชื่อได้ว่าเงื่อนไขชนิดหนึ่งสอดคล้องเสมอสำหรับค่าใด ๆ ของ λ อาจเป็นได้ที่จะสอดคล้องสำหรับค่าที่คัดสรรหรือที่เรียกว่า **สเปกตรัม** ของ $\lambda = \lambda_i, i = 0,1,2,\ldots N$ เราเรียกค่าเหล่านี้ว่าค่าเจาะจงของ DE และฟังก์ชัน u_i ที่สอดคล้องนี้ว่าฟังก์ชันเจาะจง สเปกตรัมของค่าเจาะจงสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. มีค่าได้จนถึงอนันต์ นั่นคือ $N = \infty$

2. การแจกแจงจะเป็น **ภินทนะ**(discrete) ถ้า b-a เป็น **อันตะ**(finite) นั่นคือ $\lambda_{n+1} - \lambda_n \neq 0$ ระหว่างค่าเจาะจงที่ติดกัน การแจกแจงจะกลายเป็นต่อเนื่องคล้ายจุดบนเส้นตรง เมื่อ b-a กลายเป็นอนันต์

ถ้า $\hat{L}$ เป็นเฮอร์มิเทียน, ดังนั้น

$$\left(\lambda_i^* - \lambda_j\right) \int_a^b w u_i^* u_j dz = 0$$

ปริพัทธ์ (integrand) ไม่เป็นลบสำหรับ j = i เนื่องจาก w(z) และ $|u_i(z)|^2$ ไม่เป็นลบ ปริพันธ์จึงไม่เป็นศูนย์ ยกเว้นกรณี $u_i(z) = 0$ ซึ่งเราจะไม่รวมเข้าไปในกรณีนี้ ดังนั้นค่าเจาะจง $\lambda_i^* = \lambda_i$ จึงเป็นค่าจริง และหาก $\lambda_j \neq \lambda_i$, สมการล่าสุดนี้จะเป็นจริง เมื่อปริพันธ์เป็นศูนย์หรือ

$$\int_a^b w u_i^* u_j dz = 0$$

ดังนั้น เราจึงเขียนให้เป็นทั่วไปได้ว่า

$$\int_a^b w u_i^* u_j dz = \delta_{ij} h_i \tag{5.5}$$

ซึ่งแสดงว่าฟังก์ชันเจาะจง u_i ก่อให้เกิดระบบของฟังก์ชันเชิงตั้งฉากในช่วง [a, b]

ตัวดำเนินการ $\hat{L}$ ที่ยกตัวอย่างนี้มีลักษณะเชิงซ้อน กล่าวคือ p(x) หรือ q(x) เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนของค่าจริง x อย่างไรก็ตาม ระบบที่เกิดขึ้นในฟิสิกส์เป็นจริง ตัวดำเนินการ $\hat{L}$ จึงควรเป็นจริงด้วย ฟังก์ชัน u ในสมการ (5.5) จึงไม่เป็นสังยุคเชิงซ้อน (complex conjungate) สมการ (5.5) จึงเขียนในรูปของสมการ (5.1) ซึ่งเป็นผลคูณภายในได้เป็น

$$< u_1 \mid u_2 >= \int_a^b w(x) u_1(x) u_2(x) dx = 0 \tag{5.6}$$

เราจึงสรุปเป็นทฤษฎีบท 5.1

ทฤษฎีบท 5.1 ฟังก์ชันเจาะจงของข้อปัญหาปรกติสตูร์ม-ลีอูวิลล์ด้วยเงื่อนไขขอบที่เป็นคาบเป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก และมีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก w(x)

เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น ขอให้ศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้ :

ข้อปัญหาปรกติ $u'' + \lambda u = 0$ ซึ่งมีค่า x อยู่ในช่วง $[0, \pi]$ มีฟังก์ชันเจาะจงเป็น $u_n(x) = \sin nx$ โดยที่ n = 1, 2,.... ในที่นี้, w(x) = 1 และทฤษฎีบท 5.1 กล่าวว่า

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx dx = 0, n \neq m$$

ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีในทฤษฎีของอนุกรมฟูเรียร์

ถ้าเป็นสมการเหมือนเดิมคือ $u'' + \lambda u = 0$ แต่ค่า x อยู่ในช่วง $[-\pi, \pi]$ จะมีฟังก์ชันเจาะจงเป็น 1, cosnx, sinnx โดยที่ n = 1, 2,.... และทฤษฎีบท 5.1 กล่าวว่า

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 \qquad , n \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$$

ข้อปัญหาปรกติสตูร์ม-ลีอูวิลล์มักมีข้อจำกัดมากสำหรับการประยุกต์ใช้ประโยชน์โดยที่ทั้ง a หรือ b หรือทั้งสองอาจเป็นอนันต์ หรือโดยที่ทั้ง a หรือ b อาจเป็นจุดเอกฐานของสมการ **ข้อปัญหาเอกฐานสตูร์ม-ลีอูวิลล์ เป็นข้อปัญหาซึ่งใช้กับเงื่อนไขต่อไปนี้**

1. ช่วง [a, b] ขยายไปจนถึงอนันต์ในทิศทางหนึ่งหรือทั้งสองทิศทาง
2. ทั้ง p หรือ w เป็นศูนย์ที่ปลายข้างหนึ่งหรือทั้งสองข้างของจุดปลาย a และ b
3. ฟังก์ชัน q(x) ไม่ต่อเนื่องในช่วง [a, b]
4. ฟังก์ชันหนึ่งของฟังก์ชัน p(x), q(x) และ w(x) เป็นเอกฐานที่ a หรือ b

ถ้าช่วง [a, b] มีข้อจำกัดในลักษณะที่ฟังก์ชันเจาะจงกลายเป็น **square-integrable**

คือ $$\langle u|u \rangle = \int_{a}^{b} |u(x)|^2 w(x) dx \tag{5.7}$$

ด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก w(x) จึงเห็นได้ชัดเจนว่าผลคูณภายในตามสมการ (5.6) จะเป็นอันตะเสมอ ดังนั้นฟังก์ชันเจาะจงของ ปัญหาเอกฐานสตูร์ม-ลีอูลิลล์ จึงเป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก

ฟังก์ชันเบสเซล $J_\nu(x)$ เป็นฟังก์ชันทั่ว (entire function) ดังนั้นจึงสามารถ square-integrable ในช่วง [0, b] สำหรับค่าบวกของ b ใด ๆ ก็ได้ สำหรับค่า ν ที่ตรึง, สมการเชิงอนุพันธ์

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + r\frac{du}{dr} + (k^2r^2 - \nu^2)u = 0 \tag{5.8}$$

สามารถแปลงไปสู่สมการเบสเซล

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (x^2 - \nu^2)u = 0 \tag{5.9}$$

โดยให้ $kr = x$ ผลเฉลยของสมการซึ่งเป็นปรกติที่ $r = 0$ และสมนัยกับค่าเจาะจง k^2 สามารถเขียนได้เป็น

$$u_k(r) \equiv J_\nu(kr)$$

ดังนั้น สำหรับค่าเจาะจง k^2 และ k'^2 ที่แตกต่างกันสองค่า, ฟังก์ชันเจาะจงจะตั้งฉากกัน ถ้า

$$r\left[J_\nu(kr)J'_\nu(k'r) - J_\nu(k'r)J'_\nu(kr)\right] \Big|_0^b = 0$$

ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ

$$J_\nu(kb)J'_\nu(k'b) - J_\nu(k'b)J'_\nu(kb) = 0$$

เท่านั้น การเลือกโดยทั่วไปมักเลือกให้

$$J_\nu(kb) = J_\nu(k'b) = 0$$

นั่นคือให้ทั้ง kb และ $k'b$ เป็นรากของฟังก์ชันเบสเซลอันดับ ν ที่แตกต่างกัน เราจึงได้

$$\int_0^b rJ_\nu(k_i r)J_\nu(k_j r)dr = 0 \qquad (5.10)$$

ถ้า k_i และ k_j เป็นรากที่แตกต่างกันของ $J_\nu(kb) = 0$

สมการเลอจองด์;

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^2\frac{du}{dx}\right] + \lambda u = 0, \quad -1 < x < 1 \qquad (5.11)$$

มีลักษณะผูกพันในตัวอยู่แล้ว ดังนั้น $w(x) = 1$ และ $p(x) = (1-x)^2$ ฟังก์ชันเจาะจงของปัญหาเอกฐานนี้ (เอกฐานเพราะ $p(1) = p(-1) = 0$) เป็นปรกติที่จุดปลาย $x = \pm 1$ และเป็นพหุนามเลอจองด์ $P_n(x)$ ที่สมนัยกับ $\lambda = n(n+1)$ เทอมของขอบเป็นศูนย์ที่ $a = -1$ และ $b = +1$ เนื่องจาก $P_n(x)$ สามารถ square-integrable ในช่วง $[-1, +1)$ เราจึงได้

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad m \neq n \tag{5.12}$$

สมการแอร์มิต;

$$u'' - 2xu' + \lambda u = 0 \tag{5.13}$$

สามารถแปลงไปสู่ระบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์ได้ ถ้าเราคูณด้วย

$$w(x) = \exp\left[\int^{x}(-2t)dt\right] = e^{-x^2}$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{du}{dx}\right] + \lambda e^{-x^2}u = 0 \tag{5.14}$$

เงื่อนไขขอบที่สมนัยกับฟังก์ชันเจาะจง $u_1(x)$ และ $u_2(x)$ ที่มีค่าเจาะจง λ_1 และ $\lambda_2 \neq \lambda_1$ ตามลำดับคือ

$$\left\{e^{-x^2}\left[u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)\right]\right\}_a^b = 0$$

เมื่อ $a = -\infty$ และ $b = +\infty$ ทั้งนี้เพราะ u_1 และ u_2 เป็นพหุนาม

ฟังก์ชัน u เป็นฟังก์ชันเจาะจงของสมการที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ ก็ต่อเมื่อเป็นผลเฉลยของสมการแอร์มิตสมการแรก ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นี้สมนัยกับ $\lambda = 2n$ เป็นพหุนามแอร์มิต $H_n(x)$ ซึ่งเคยกล่าวไว้บ้างแล้วในบทที่ผ่าน ๆ มา ดังนั้นเราจึงเขียน

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx = 0 \quad , \quad m \neq n \tag{5.15}$$

ซึ่งเป็นความสัมพันธ์เชิงตั้งฉากสำหรับพหุนามแอร์มิต

5.2 สมบัติของระบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์

สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ก่อให้เกิดฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ใช้มากใน **ปริภูมิฮิลแบร์ต** (Hilbert space) ในที่นี้เราจะพิจารณาบางทฤษฎีและการนำไปใช้ประโยชน์โดยปราศจากการพิสูจน์ ซึ่งอาจอ่านประกอบได้จากตำราทั่วไป เราจะเริ่มจากทฤษฎีบท 5.2

ทฤษฎีบท 5.2 ระบบปรกติสตูร์ม-ลีอูวิลล์ใดๆ มีลำดับจำนวนอนันต์ของค่าเจาะจงที่เป็นจริงที่สามารถเรียงได้เป็น $\lambda_o < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ ฟังก์ชันเจาะจง $u_n(x)$ ที่สมนัยกับค่าเจาะจง λ_n มีค่าเป็นศูนย์ n ค่าในช่วง $a<x<b$

ตัวอย่างเช่น ระบบสมการปรกติ

$$u'' + \lambda u = 0 \qquad 0 < x < \pi$$

$$u(0) = u(\pi) = 0$$

มีฟังก์ชันเจาะจง $u_n(x)$ และค่าเจาะจง $\lambda_n = n^2, n = 1, 2, \ldots$ เราสามารถเขียนค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงเสียใหม่เป็น

$$\lambda_n = (n+1)^2 \qquad , n = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$u_n(x) = \sin(n+1)x \quad , n = 0, 1, 2, \ldots.$$

ตามที่ทฤษฎีบท 5.2 กล่าวไว้

จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ และค่าเป็นศูนย์ของ $u_n(x)$ หาได้โดย

$$\sin(n+1)x = 0 \Rightarrow (n+1)x = m\pi, m = 1, 2, \ldots, n$$

หรือ $$x_m = \frac{m}{n+1}\pi, m = 1, 2, \ldots, n$$

ซึ่งแสดงว่าในช่วงเปิด $0 < x < \pi$, ซึ่งไม่รวม 0 และ π, เรามีค่าเป็นศูนย์ n ค่า

5.2.1 พฤติกรรมเชิงเส้นกำกับสำหรับค่าเจาะจงค่ามากๆ

ในกลศาสตร์ควอนตัมเรามักเจอข้อปัญหาสตูร์ม-ลีฮูวิลล์ในหลายกรณีเช่น ค่าเจาะจง λ ที่สมนัยกับโมเมนตัมเชิงมุมออร์บิทัลของอิเล็กตรอนในอะตอมหรือที่สมนัยกับระดับพลังงานของอนุภาคในสนามของพลังงานศักย์ ในหลายๆ กรณีที่จำเป็นต้องทราบพฤติกรรมของระบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์ในลิมิตของ λ ที่มีค่ามากๆ เช่น ค่าโมเมนตัมเชิงมุมมากๆ หรือพลังงานสูง

เพื่อความสะดวกเราอาจแปลงสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ให้ดูง่ายขึ้นและรูปแบบที่จัดการได้ง่ายขึ้นโดยการแทนค่าที่เรียกว่า **Liouville substitution** **ซึ่งประกอบด้วยการเปลี่ยนทั้งตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม** ดังนี้

$$u(x) = v(t)\left[p(x)w(x)\right]^{-1/4}$$

และ
$$t = \int_a^x \sqrt{\frac{w(s)}{p(s)}}\,ds \qquad (5.16)$$

ด้วยการแทนค่าเหล่านี้ ทำให้ให้สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ เปลี่ยนไปเป็น

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left[\lambda - \hat{q}(t)\right]v = 0 \qquad (5.17)$$

โดยที่
$$\hat{q}(t) = \frac{q(x(t))}{w(x(t))} + \left[p(x(t))w(x(t))\right]^{-1/4}\frac{d^2}{dt^2}\left[(pw)^{1/4}\right]$$

ตัวอย่างเช่น **สมการเบสเซล**

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{du}{dx}\right] + \left(k^2x - \frac{\nu^2}{x}\right)u = 0$$

เรามี $p(x) = w(x) = x$ และ $q(x) = \frac{\nu^2}{x}$

ดังนั้น สมการ (5.16) จะให้

$$v(t) = u(x(t))[x(t)x(t)]^{1/4} = \sqrt{x}u(x)$$

$$t = \int^{x}\sqrt{\frac{w(s)}{p(s)}}ds = t = \int^{x}\sqrt{\frac{s}{s}}ds = x \qquad (5.18)$$

และสมการ (5.17)

$$\hat{q}(t) = \frac{\nu^2/t}{t} + \left[t^2\right]^{-1/4}\frac{d^2}{dt^2}\left[t^{1/2}\right] = \frac{\nu^2 - 1/4}{t^2}$$

และ
$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left[k^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{t^2}\right]v = 0$$

ในกรณีที่น่าสนใจคือเมื่อ $\nu = 1/2$ จะได้

$$\frac{d^2v}{dt^2} + k^2v = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ coskt และ sinkt สมการ (5.18) จะให้

$$J_{1/2}(kt) = A\frac{\sin kt}{\sqrt{t}} \quad \text{หรือ} \quad J_{1/2}(kt) = B\frac{\cos kt}{\sqrt{t}}$$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจาก $J_\nu(x)$ มีค่าวิเคราะห์หรือ analytic ที่ x = 0 เราต้องได้

$$J_{1/2}(kx) = A\frac{\sin kx}{\sqrt{x}}$$

สมการเบสเซลในหัวข้อที่แล้วใช้ความจริงที่ว่าผลเฉลยที่สมนัยกับค่าเจาะจง k เขียนเป็น $Z_\nu(kx)$

เนื่องจากสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ใดๆ สามารถแปลงไปเป็นรูปแบบสมการ (5.17) เราพิจารณาสมการที่มีรูปแบบต่อไปนี้เท่านั้นคือ

$$u'' + [\lambda - q[x]]u \equiv u'' + Q(x)u = 0, \; Q = \lambda - q \tag{5.19}$$

ด้วยเงื่อนไขแยก

$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \qquad \text{และ} \qquad \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0 \tag{5.20}$$

สมมติว่า $Q(x) > 0$ สำหรับทุกค่าของ x ในช่วง $[a, b]$ นั่นคือ $\lambda > q(x)$ ซึ่งมีเหตุผลเพราะเรากำลังสนใจกรณี λ มีค่ามากๆ

สมการ (5.19) อาจจะง่ายขึ้นไปอีกถ้าเราแทนค่าที่เรียกว่า **Prüfer substitution** ซึ่งประกอบด้วย

$$u = RQ^{-1/4}\sin\phi \qquad \text{และ} \qquad u' = RQ^{1/4}\cos\phi \tag{5.21}$$

โดยที่ $R(x, \lambda)$ และ $\phi(x, \lambda)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับ λ และ x การแทนค่าเช่นนี้จะแปลงสมการ (5.19) ให้เป็นคู่ของสมการ

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{\lambda - q(x)} - \frac{q'}{4[\lambda - q(x)]}\sin 2\phi \tag{5.22}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{Rq'}{4(\lambda - q)}\cos 2\phi \tag{5.23}$$

ฟังก์ชัน $R(x, \lambda)$ สมมติให้เป็นบวกเพราะค่าลบใดๆ ของ u สามารถถ่ายโอนไปสู่เฟส $\phi(x, \lambda)$ นอกจากนี้ R ไม่อาจเป็นศูนย์ได้ภายในช่วง $a \le x \le b$ เพราะทั้ง u และ u' จะเป็นศูนย์ที่จุดเหล่านั้น

สมการ (5.22) และ (5.23) มีประโยชน์มากในการศึกษาพฤติกรรม **เชิงเส้นกำกับ** (asymptotic) **ของผลเฉลยของข้อปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ทั้งกรณี $\lambda \to \infty$ และ $x \to \infty$ ในขั้นแรกเราจะพิจารณาสิ่ง**ที่เราใช้บ่อยๆ ในการวิเคราะห์

บ่อยครั้งที่เราพบว่าการใช้สัญกรณ์สำหรับพฤติกรรมของฟังก์ชัน $f(x, \lambda)$ สำหรับ λ ค่ามากๆ และทุกค่าของ x จะมีประโยชน์มาก ถ้าฟังก์ชันยังคงมีขอบเขต (bounded) สำหรับทุกค่าของ x เมื่อ $\lambda \to \infty$ เราจะเขียน

$$f(x, \lambda) = 0(1)$$

ซึ่งหมายความว่า เมื่อ λ มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ, ขนาดของฟังก์ชัน $f(x, \lambda)$ ยังคงอยู่ในอันดับ 1 **หรืออีกนัยหนึ่งไม่มีค่า x ที่ทำให้** $\lim_{\lambda\to\infty} f(x, \lambda)$ **เป็นอนันต์** ถ้าฟังก์ชัน $g(x, \lambda) \equiv \lambda^n f(x, \lambda)$ มีอันดับ 1 นั่นคือ ถ้า

$$g(x, \lambda) \equiv \lambda^n f(x, \lambda) = 0(1)$$

ดังนั้น เราสามารถเขียน

$$f(x, \lambda) = \frac{0(1)}{\lambda^n}$$

ซึ่งหมายความว่า เมื่อ λ **เข้าสู่ค่าอนันต์,** $f(x, \lambda)$ **เข้าสู่ศูนย์เร็วขึ้นเป็น** $1/\lambda^n$ ในบางครั้งอาจเขียนเป็น $f(x, \lambda) = O(\lambda^{-n})$

สมบัติบางประการของ 0(1) มีดังนี้ ;

(1) $0(1) + 0(1) = 0(1)$ และ $0(1)0(1) = 0(1)$

(2) สำหรับ a และ b ที่เป็นอันตะ, $\int_a^b 0(1)dx = 0(1)$

(3) ถ้า r และ s เป็นจำนวนจริงโดยที่ $r \le s$, ดังนั้น

$$\frac{0(1)}{\lambda^r} + \frac{0(1)}{\lambda^s} = \frac{0(1)}{\lambda^r}$$

(4) ถ้า g(x) เป็นฟังก์ชันของ x ที่มีขอบเขตใดๆ ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์กระจายออกได้เป็น

$$[\lambda + g(x)]^r = \lambda^r\left[1+\frac{g(x)}{\lambda}\right]^r$$

$$= \lambda^r\left[1 + r\frac{g(x)}{\lambda} + \frac{r(r-1)}{2}\left(\frac{g(x)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{0(1)}{\lambda^3}\right)\right]^r$$

$$= \lambda^r + rg(x)\lambda^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2}(g(x))^2\lambda^{r-2} + 0(1)\lambda^{r-3}$$

$$= \lambda^r + rg(x)\lambda^{r-1} + 0(1)\lambda^{r-2}$$

$$= \lambda^r + 0(1)\lambda^{r-1}$$

$$= 0(1)\lambda^r \quad \text{หรือ} \quad 0(\lambda^r)$$

เมื่อกระจายเทอมทางขวามือของสมการ (5.22) และ (5.23) โดยใช้สมบัติข้อ (4) จะได้

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{\lambda} + \frac{0(1)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{0(1)}{\lambda} = \sqrt{\lambda} + \frac{0(1)}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{0(1)}{\lambda}$$

การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของ $\phi(x, \lambda)$ และ $R(x, \lambda)$ รอบๆ $x = 0$ จะให้

$$\phi(x, \lambda) = \phi(a, \lambda) + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)(x - a) + \ldots$$

$$R(x, \lambda) = R(a, \lambda) + \left(\frac{dR}{dx}\right)(x - a) + \ldots$$

ในลิมิต $\lambda \to \infty$ การกระจายนี้จะกลายเป็น

$$\phi(x, \lambda) = \phi(a, \lambda) + \sqrt{\lambda}(x - a) + \frac{0(1)}{\sqrt{\lambda}} \tag{5.24}$$

$$R(x, \lambda) = R(a, \lambda) + \frac{0(1)}{\lambda} \tag{5.25}$$

ผลที่ได้นี้มีประโยชน์ในการกำหนดพฤติกรรมของ λ_n สำหรับค่า n มากๆ โดยเราจะใช้สมการ (5.20) และ (5.21) เพื่อเขียน

$$-\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{u'(a)}{u(a)} = \frac{R(a, \lambda)Q^{1/4}(a, \lambda)\cos[\phi(a, \lambda)]}{R(a,\lambda)Q^{-1/4}(a, \lambda)\sin[\phi(a, \lambda)]}$$

โดยเราสมมติว่า $\alpha' \neq 0$ และถ้าหาก $\alpha' = 0$ เราอาจใช้อัตราวส่วน α'/α ซึ่งนิยามเพราะอย่างน้อยที่สุดหนึ่งในค่าของ α ต้องไม่เป็นศูนย์ สมมติให้ $A = -\alpha/\alpha'$ และเขียน

$$\cot[\phi(a, \lambda)] = \frac{A}{\sqrt{Q}} = \frac{A}{\sqrt{\lambda - q(a)}}$$

และในทำนองเดียวกัน ถ้า $B = -\beta/\beta'$ จะให้

$$\cot[\phi(b, \lambda)] = \frac{B}{\sqrt{\lambda - q(b)}}$$

เราจะสนใจที่ค่าเจาะจงที่ n และเขียนสมการแรกเป็น

$$\phi(a, \lambda_n) = \cot^{-1}\frac{A}{\sqrt{\lambda_n - q(a)}}$$

สำหรับ λ_n ค่ามากๆ, อาร์กิวเมนต์ของ $\cot^{-1}$ มีค่าน้อย ดังนั้น เราสามารถกระจายเทอมทางขวามือในอนุกรมเทย์เลอร์รอบๆ จุดศูนย์ และเก็บอันดับต่ำสุดไว้เท่านั้นจะได้

$$\cot^{-1}\frac{A}{\sqrt{\lambda_n - q(a)}} = \cot^{-1}(0)\frac{A}{\sqrt{\lambda_n - q(a)+\ldots}} + \ldots$$

$$= \cot^{-1}(0) + \frac{0(1)}{\sqrt{\lambda_n}}$$

หรือ $$\phi(a, \lambda_n) = \frac{\pi}{2} + \frac{0(1)}{\sqrt{\lambda_n}} \tag{5.26}$$

ทำนองเดียวกัน

$$\phi(b, \lambda_n) = \frac{\pi}{2} + n\pi + \frac{0(1)}{\sqrt{\lambda_n}} \tag{5.27}$$

เทอม $n\pi$ ปรากฏในสมการ (5.27) เพราะจากทฤษฎีบท 5.2, ฟังก์ชันเจาะจงที่ n มีค่าที่ศูนย์ระหว่าง a และ b เนื่องจาก $u = RQ^{-1/4}\sin\phi$ ซึ่งหมายความว่า $\sin\phi$ ต้องผ่านค่าที่ศูนย์เมื่อ x อยู่ระหว่าง a และ b ดังนั้น ที่ $x = b$, เฟส ϕ ต้องเป็น $n\pi$ มากกว่าที่ค่า $x = a$

แทนค่า $x = b$ ลงในสมการ (5.24) และให้ $\lambda \to \lambda_n$ แล้วใช้สมการ (5.27) จะได้

$$\frac{\pi}{2} + n\pi + \frac{0(1)}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{\pi}{2} + \frac{0(1)}{\sqrt{\lambda_n}} + \sqrt{\lambda_n}(b - a) + \frac{0(1)}{\sqrt{\lambda_n}}$$

หรือ $$\sqrt{\lambda_n}(b - a) = n\pi + \frac{0(1)}{\sqrt{\lambda_n}} \tag{5.28}$$

ผลที่ตามมาอย่างหนึ่งก็คือสำหรับ λ_n ค่ามากๆ

$$\lim_{n\to\infty} n\lambda_n^{-1/2} = \frac{b - a}{\pi}$$

ดังนั้น $\sqrt{\lambda_n} = C_n n$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \pi/(b-a)$ และสมการ (5.28) กลายเป็น

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{b-a} + \frac{0(1)}{C_n n} = \frac{n\pi}{b-a} + \frac{0(1)}{n} \tag{5.29}$$

สมการ (5.29) อธิบายพฤติกรรมเชิงเส้นกำกับของค่าเจาะจง ทฤษฎีบท 5.3 จะอธิบายพฤติกรรมเชิงเส้นกำกับของฟังก์ชันเจาะจง

ทฤษฎีบท 5.3 ให้ $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นฟังก์ชันเฉพาะจงที่ทำให้เป็นบรรทัดฐาน (normalized) ได้ของสมการปรกติ (5.19) ด้วย $\alpha'\beta' \neq 0$ ดังนั้นเมื่อ $n \to \infty$,

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \left[\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right] + \frac{0(1)}{n} \tag{5.30}$$

เราลองหาสูตรเชิงเส้นกำกับของพหุนามเลอจองด์ $P_n(x)$ โดยเริ่มจากการแทนค่าลีฮูวิลล์ตามสมการ (5.16) เพื่อการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n + 1)P_n = 0$$

ไปสู่
$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left[\lambda_n - \hat{q}(t)\right] v = 0 , \ \lambda_n \equiv n(n + 1)$$

ในที่นี้ $p(x) = 1 - x^2$ และ $w(x) = 1$ ดังนั้น

$$t = \int^{x} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \cos^{-1} x \quad \therefore \ x(t) = \cos t$$

และ
$$P_n(x(t)) = v(t)\left[1 - x^2(t)\right]^{-1/4} = v(t)(\sin t)^{-1/2}$$

$\hat{q}(t)$ ในสมการจะกลายเป็น

$$\hat{q}(t) = \left(1-x^2\right)^{-1/4} \frac{d^2}{dt^2}\left[\left(1-x^2\right)^{1/4}\right]$$

$$= (\sin t)^{-1/2} \frac{d^2}{dt^2}\left[(\sin t)^{1/2}\right] = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sin^2 t}\right)$$

สำหรับ n ค่ามากๆ เราอาจตัด $\hat{q}(t)$ ได้ และใช้การประมาณ $\lambda_n = n^2 + n \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)^2$ และเขียน

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 v=0$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $v(t)=A\cos[(n+1/2)t+\alpha]$

โดยที่ A และ α เป็นค่าคงตัวใดๆ ที่ยังไม่ได้หาค่า เมื่อแทนค่า v(t) นี้ลงใน P_n จะได้

$$P_n(\cos t) = \frac{A}{\sqrt{\sin t}}\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t + \alpha\right]$$

ในการหาค่า α ให้สังเกตว่า $P_n(0) = 0$ ถ้า n เป็นเลขคี่ ดังนั้น ถ้าให้ $t = \pi/2$, เทอมของโคไซน์จะกลายเป็น

$$\cos\left[n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \alpha\right]$$

ซึ่งเป็นศูนย์สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่ก็ต่อเมื่อ $\alpha = -\pi/4$ ดังนั้นสูตรสำหรับพหุนามเลอจองด์เชิงเส้นกำกับจึงเป็น

$$P_n(\cos t) = \frac{A}{(\sin t)^{1/2}}\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t - \frac{\pi}{4}\right]$$

5.2.2 พฤติกรรเชิงเส้นกำกับสำหรับ X ค่ามากๆ

การแทนค่าทั้งลีอูวิลล์และ Prüfer มีประโยชน์มากในการศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยของระบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์ เมื่อค่า X มากๆ ลองศึกษาจากสมการเบสเซล

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \left(k^2x - \frac{v^2}{x}\right)u = 0$$

ให้ $Z_v(kx)$ เป็นผลเฉลยของสมการเบสเซล จากตัวอย่างในหัวข้อที่แล้ว, ถ้าเราแทนค่าลีอูวิลล์ $v(x)=\sqrt{x}Z_v(kx)$ สามารถแปลงสมการเบสเซลไปเป็น

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(k^2 - \frac{v^2 - 1/4}{x^2}\right)v = 0 \tag{5.31}$$

เราต้องการทราบพฤติกรรมของ v(x) เมื่อ x มีค่ามากๆ

การแทนค่า Prüfer สำหรับสมการเบสเซลจะได้

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{k^2 - \frac{a}{x^2}} + \frac{a\sin 2\phi}{2\left(k^2x^3 - ax\right)}$$

$$\frac{dR}{dx} = -\frac{Ra\cos 2\phi}{2\left(k^2x^3 - ax\right)}$$

โดยที่ $a \equiv v^2 - 1/4$ สำหรับ x ค่ามากๆ, สามารถเหล่านี้จะลดลงเป็น

$$\phi' = k\left(1 - \frac{a}{2k^2x^2}\right) + \frac{0(1)}{x^3}$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{0(1)}{x^3}$$

อินทิเกรตสมการแรกระหว่าง x และ $b > x$ จะได้

$$\phi(b) - \phi(x) = kb - kx - \frac{a}{2kx} + \frac{a}{2kb} + \frac{0(1)}{x^3}$$

เมื่อตรึงค่า x ไว้แล้ว ให้ $b \to \infty$, จะเห็นว่า $\phi(b) - kb$ จะเป็นค่าอันตะซึ่งสามารถแทนได้เป็น ϕ_∞ ดังนั้นสำหรับ $b \to \infty$, เราจะได้

$$\phi(x) = \phi_\infty + kx + \frac{a}{2kx} + \frac{0(1)}{x^2} \tag{5.32}$$

อินทิเกรตสำหรับ R'/R จะให้

$$R(x) = R_\infty + \frac{0(1)}{x^2} \tag{5.33}$$

โดยที่ $R_\infty = \lim_{b\to\infty} R(b)$

แทนค่าสมการ (5.32) และ (5.33) และ

$$Q^{-1/4} = \left(k^2 - \frac{a}{x^2}\right)^{-1/4} = k^{-1/2} + \frac{0(1)}{x^2}$$

ลงในสมการ (5.21) จะได้

$$v(x) = \left[R_\infty + \frac{0(1)}{x^2}\right]\left[k^{-1/2} + \frac{0(1)}{x^2}\right]\sin\left[\phi_\infty + kx + \frac{a}{2kx} + \frac{0(1)}{x^2}\right]$$

เอกลักษณ์ $\sin\left[\alpha + \frac{0(1)}{x^2}\right] = \sin\alpha + \frac{0(1)}{x^2}$

สามารถหาได้ง่ายโดยการกระจายเทอมทางซ้ายมือ รวมทั้ง $kx_\infty \equiv \pi/2 - \phi_\infty$ จะได้

$$Z_\nu(kx) \equiv \frac{v(x)}{\sqrt{x}} = \frac{R_\infty}{\sqrt{kx}}\cos\left(kx - kx_\infty + \frac{\nu^2 - 1/4}{2kx}\right) + \frac{0(1)}{x^{5/2}} \quad (5.34)$$

ค่าคงตัว R_∞ และ x_∞ เป็นตัวกำหนด $Z_\nu(kx)$

สำหรับฟังก์ชันเบสเซล $J_\nu(x)$, เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$kx_\infty = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \qquad \text{และ} \qquad R_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

และสำหรับฟังก์ชันนอยมันน์ $Y_\nu(x)$, จะได้

$$kx_\infty = \left(\nu + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2} \qquad \text{และ} \qquad R_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

ดังนั้น เราจึงสามารถเขียนฟังก์ชันทั้งสองได้เป็น

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + \frac{\nu^2 - 1/4}{2x}\right) + \frac{0(1)}{x^{5/2}}$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + \frac{\nu^2 - 1/4}{2x}\right) + \frac{0(1)}{x^{5/2}}$$

ทั้งสองฟังก์ชันนี้ทำให้เกิดสมการเชิงเส้นกำกับสำหรับฟังก์ชันฮันเกล

$$H_\nu^{(1)}(x) \equiv J_\nu(x) + iY_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left\{i\left[x - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)(\pi/2) + \left(\nu^2 - 1/4\right)/2x\right]\right\} + \frac{0(1)}{x^{5/2}}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \equiv J_\nu(x) - iY_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left\{-i\left[x - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)(\pi/2) + \left(\nu^2 - 1/4\right)/2x\right]\right\} + \frac{0(1)}{x^{5/2}}$$

ถ้าเทอมสุดท้ายในเอกซ์โพเนนเชียล, ซึ่งเป็นศูนย์เมื่อ $x \to \infty$ ตัดออกไปได้ สมการเชิงเส้นกำกับสำหรับ $H_\nu^{(1)}(x)$ จะสอดคล้องกับที่เราหาโดยวิธี steepest descent

ขั้นตอนการหาโดยวิธีเดียวกันนี้สามารถใช้ ได้กับสมการเชิงอนุพันธ์อื่นๆ ด้วย ก่อนอื่นเราแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบสมการ (5.17) โดยการแทนค่าลีอูวิลล์ ต่อจากนั้นใช้การแทนค่า Prüfer ในสมการ (5.21) เพื่อให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์สองสมการตามรูปแบบสมการ (5.22) และ (5.23) เมื่อแก้สมการทั้งสองโดยให้ $x \to \infty$ ก็จะสามารถกำหนดพฤติกรรมของ ϕ และ R และตามมาด้วย u ในที่สุด

5.3 การกระจายในเทอมของฟังก์ชันเจาะจง

ในการอุปมากับการกระจายอนุกรมฟูเรียร์ ฟังก์ชัน u(x)ใด ๆ ที่มีค่าต่อเนื่องเป็นช่วง (piecewise continuous) ระหว่าง a และ b สามารถกระจายในเทอมของฟังก์ชันเจาะจง

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(x)$$

สัมประสิทธิ์ c_i สามารถหาได้จากผลคูณภายใน

$$< u_i|u > = \int_a^b w(x)u_i^*(x)u(x)dx = c_i h_i$$

ความจริงแล้วความคล้ายกันกับการกระจายอนุกรมฟูเรียร์สามารถอธิบายได้ในเชิงตัวอักษร กล่าวคือ ถ้า u_i เป็นฟังก์ชันที่จัดอันดับค่าเจาะจงที่เพิ่มขึ้น นั่นคือ $\lambda_{i+1} > \lambda_i$ ความแตกต่างระหว่างอนุกรมฟังก์ชันเจาะจงและอนุกรมฟูเรียร์สำหรับฟังก์ชันเดียวกันทั่วช่วงเดียวกัน และจำนวนเทอม n เดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่าลู่เข้าเอกรูป (uniformly convergent) เมื่อ $n \to \infty$ ซึ่งแสดงให้เห็นในหนังสือของ Morse and Feshbach หน้า 743.

พิจารณาการกระจายของฟังก์ชัน u(x) ในช่วง [a, b] ในเทอมของเซตของฟังก์ชัน u_n ใน [a, b] คือ

$$u(x) = \sum_n c_n u_n(x)$$

$u_n(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เชิงตั้งฉาก

$$\int_a^b u_m^*(x)u_n(x)w(x)dx = h_n\delta_{mn} \tag{5.35}$$

สัมประสิทธิ์การกระจาย c_n หาได้จากการอินทิเกรตธรรมดา คือ

$$c_n = \frac{1}{h_n}\int_a^b u_n^*(x)u(x)w(x)dx \tag{5.36}$$

การแยก w(x) ออกจาก $u_n(x)$ ก็เพื่อความสะดวกแต่อาจมีนัยในบางกรณี เช่น อาจให้ค่าถ่วงน้ำหนักบนเชือกที่มีน้ำหนักถ่วงไว้เพื่อแสดงความแตกต่างของรูปร่างการสั่นของเชือก ฟังก์ชัน $u_n(x)$ ที่ง่ายที่สุดคือ กำลังของ x หรือ x^n แต่อินทิกรัล

$$\int_a^b x^m x^n dx = \frac{1}{m+n+1}(b^{m+n+1} - a^{m+n+1})$$

ไม่เชิงตั้งฉาก และอาจไม่เป็นอันตะถ้า |a| หรือ |b| เป็นอนันต์ ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก w(x) อาจช่วยแก้ปัญหานี้ได้โดยอาจเลือกให้มีค่าลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อ |x| เพิ่มขึ้นทำให้อินทิกรัลมีค่าเป็นอันตะได้

ฟังก์ชันที่เป็นรูปกำลังจะต้องเป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก วิธีการหนึ่งที่จะช่วยให้เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากได้ เรียกว่า **Schmidt orthogonalization** วิธีการนี้เป็นการทำให้เซตของฟังก์ชันที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันแต่ไม่เชิงตั้งฉากให้เป็นเชิงตั้งฉากภายในช่วงใด ๆ เมื่อเทียบกับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก เพื่อความสะดวกเราจะสมมติว่าฟังก์ชันเป็นค่าจริง และพิจารณาเซตของฟังก์ชัน 3 เซตคือ u_n, ψ_n และ $\phi_n, n = 0,1,2,\ldots$ โดยที่

- $u_n(x)$ เป็นเซตของฟังก์ชันที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน แต่ไม่เชิงตั้งฉาก และไม่เป็นบรรทัดฐาน (unnormalized)
- $\psi_n(x)$ เป็นเซตของฟังก์ชันที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน และเชิงตั้งฉาก แต่ไม่เป็นบรรทัดฐาน
- $\phi_n(x)$ เป็นเซตของฟังก์ชันที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันและเชิงตั้งฉากรวมทั้งเป็นบรรทัดฐานด้วย (orthonormal)

ถ้าฟังก์ชัน ϕ ยังไม่มีการระบุความเป็นบรรทัดฐาน กล่าวคือ

$$\int_a^b \phi_i^2 w dx = N_i^2$$

ยังไม่มีการระบุค่าของ N_i เนื่องจากสมการสตูร์ม - ลีอูวิลสเป็นสมการเชิงเส้นและเป็นเอกพันธุ์ เราอาจคูณผลเฉลยด้วยค่าคงตัวใด ๆ แล้วยังทำให้ผลคูณยังคงเป็น **ผลเฉลยเช่นเดิม** ดังนั้น ถ้าแต่ละฟังก์ชัน ϕ_i คูณด้วย N_i^{-1} จะทำให้ฟังก์ชัน ϕ_i ตัวใหม่เป็นบรรทัดฐาน คือ

$$\int_a^b \phi_i^2(x) w(x) dx = 1$$

หรือ

$$\boxed{\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x) w(x) dx = \delta_{ij}} \tag{5.37}$$

สมการ (5.37) จึงเป็นบรรทัดฐานและเชิงตั้งฉากด้วย ฟังก์ชันที่มีสมบัติทั้งสองนี้ เรียกว่า เชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal) ขั้นตอนของชมิดต์ คือ การทำให้เซตของฟังก์ชัน $u_n(x)$ กลายเป็น $\phi_n(x)$ ที่เชิงตั้งฉากปรกติ

ขั้นตอนของชมิดต์เป็นการทำให้ $\psi_n(x)$ เป็นผลบวกของ $u_n(x)$ กับผลรวมเชิงเส้นของ ϕ ที่ไม่ทราบค่ามาก่อน ฟังก์ชัน $u_n(x)$ ตัวใหม่ประกันความเป็นอิสระเชิงเส้น การที่เราต้องการให้ $\psi_n(x)$ เชิงตั้งฉากกับ ϕ ค่าก่อน ๆ นี้เพียงพอที่จะเป็นเงื่อนไขบังคับเพื่อกำหนดค่าของสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า a_{ij} เมื่อ ψ_n เป็นบรรทัดฐานด้วยสมการ (5.37) เราจะได้ฟังก์ชัน $\phi_n(x)$ ตามต้องการ

เราจึงเริ่มจาก $n=0$ นั่นคือให้ $\psi_0(x) = u_0(x)$ โดยที่ไม่มี ϕ มาเกี่ยวข้อง เมื่อทำ $\psi_0(x)$ ให้เป็นบรรทัดฐานจะได้

$$\phi_0(x) = \frac{\psi_0(x)}{\left[\int \psi_0^2 w dx\right]^{1/2}}$$

สำหรับ $n = 1$, ให้ $\psi_1(x) = u_1(x) + a_{10}\phi_0(x)$

เราต้องการให้ $\psi_1(x)$ เชิงตั้งฉากกับ $\phi_0(x)$ โดยยังไม่สนใจความเป็นบรรทัดฐาน ดังนั้น

$$\int \psi_1 \phi_0 w dx = \int u_1 w dx + a_{10} \int \phi_0^2 w dx = 0$$

เนื่องจาก ϕ_0 เป็นบรรทัดฐาน เราจึงได้

$$a_{10} = -\int u_1 \phi_0 w dx$$

เมื่อทำ $\psi_1(x)$ ให้เป็นบรรทัดฐานจะได้

$$\phi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\left[\int \psi_1^2 w dx\right]^{1/2}}$$

ดังนั้นเราจึงเขียนเป็นรูปวางนัยทั่วไปได้เป็น

$$\boxed{\phi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\left[\int \psi_i^2(x) w(x) dx\right]^{1/2}}} \qquad (5.38)$$

โดยที่

$$\psi_i(x) = u_i + a_{i0}\phi_0 + a_{i,1}\phi_1 + \ldots + a_{i,i-1}\phi_{i-1} \qquad (5.39)$$

และ
$$a_{ij} = -\int u_i \phi_j w dx \tag{5.40}$$

เราจึงได้เซตของ $\phi_i(x)$ ที่เป็นเชิงตั้งฉากปรกติตามต้องการ แต่ไม่เป็นเซตที่เป็นได้อย่างเดียวโดยอาจมีเซตเชิงตั้งฉากปรกติอื่นจำนวนอนันต์สำหรับช่วงและฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่กำหนดให้

ลองพิจารณาเซตของฟังก์ชัน $u_n(x) = x^n, n = 0,1,2,.....$ ภายในช่วง $-1 \le x \le 1$ และฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $w(x) = 1$ ขั้นตอนของชมิดต์เป็นดังนี้:

$$u_0 = 1 \text{ และ } \phi_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \psi_1(x) = x + a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

และ $$a_{10} = -\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{2}}dx = 0 \text{ (ด้วยลักษณะของสมมาตร)}$$

เมื่อทำ $\psi_1(x)$ ให้เป็นบรรทัดฐานจะได้ $\phi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$

ต่อไปนิยาม $\psi_2(x)$ เป็น

$$\psi_2(x) = x^2 + a_{20}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + a_{21}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

โดยที่ $$a_{20} = -\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{2}}dx = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$a_{21} = -\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}x^3\,dx = 0 \qquad \text{(โดยสมมาตร)}$$

$$\therefore \quad \psi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

เมื่อทำ $\psi_2(x)$ ให้เป็นบรรทัดฐานจะได้ $\phi_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$

เมื่อทำในลักษณะนี้ต่อไปจะให้ $\phi_3(x) = \sqrt{\frac{7}{2}}\cdot\frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x)$$

โดยที่ $P_n(x)$ เป็นพหุนามเลอจองค์อันดับ n

อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชันเริ่มต้น $u_n(x) = x^n$ เป็นฟังก์ชันเจาะจงที่ไม่มีสภาพซ้อนสถานะ และไม่ได้เป็นผลเฉลยของสมการเลอจองค์ แต่เป็นเพียงเซตธรรมดาที่สามารถปรับไปสู่เซตเชิงตั้งฉากปรกติสำหรับช่วงและฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่กำหนดให้เท่านั้น หากฟังก์ชันเริ่มต้นเดิมคือ $u_n(x) = x^n$ แต่ด้วยช่วง $[a, b]$ และฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $w(x)$ ที่แตกต่างกันไปก็จะให้เซตเชิงตั้งฉากอื่น ๆ ดังแสดงในตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 พหุนามเชิงตั้งฉากที่เกิดจากฟังก์ชันเริ่มต้น $u_n(x) = x^n, n = 0,1,2.......$

$\phi_n(x)$	ชื่อ	a	b	w(x)	N_i^2
$P_n(x)$	Legendre	-1	1	1	2/(2n+1)
$L_n(x)$	Laguerre	0	∞	e^{-x}	1
$H_n(x)$	Hermite	$-\infty$	∞	e^{-x^2}	$\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!$
$T_n(x)$	Chebysbev of the first kind	-1	1	$(1-x^2)^{-1/2}$	$\begin{cases} \pi/2, & n \neq 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$

ขอให้สังเกตุว่าเราไม่จำเป็นต้องทำให้ฟังก์ชันเป็นบรรทัดฐานด้วยค่าเป็นหนึ่ง จากกรณีของพหุนามเลอจองค์จะเห็นว่า

$$\int_{-1}^{1} \phi_n(x)\, \phi_m(x) w(x) dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$$

นั่นคือ $N_i^2 = 2/(2n+1)$ ตัวอย่างของบางพหุนามแสดงในตารางที่ 5.2

ตารางที่ 5.2 พหุนามเชิงตั้งฉากบางอันดับ

ϕ_n	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
$P_n(x)$	1	x	$(3x^2 - 1)/2$	$(5x^3 - 3x)/2$
$L_n(x)$	1	$-x + 1$	$(x^2 - 4x + 2)/2!$	$(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)/3!$
$H_n(x)$	1	2x	$4x^2 - 2$	$8x^3 - 12x$
$T_n(x)$	1	x	$2x^2 - 1$	$4x^3 - 3x$

สังเกตุว่าพหุนาม $T_n(x)$ นิยามในช่วงเดียวกับพหุนามเลอจองด์ $P_n(x)$ คือ ในช่วง [-1, 1] แต่ด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก w(x) ที่ต่างกันคือ $\left(1-x^2\right)^{-1/2}$ ไม่ใช่ 1 ค่า w(x) ที่ต่างกันนี้อาจเห็นได้ชัดเจนขึ้นเมื่อ $x = \cos\theta$ ซึ่งทำให้

$$\frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} = -d\theta$$

เมื่อ w(x) เปลี่ยนไป ความหมายของการเป็นเชิงตั้งฉากจะเปลี่ยนไปด้วย พหุนาม

$$P_0(x) = T_0(x) = 1 \text{ และ } P_1(x) = T_1(x) = x$$

โดยทั่วไปจะเชิงตั้งฉากเพราะภาวะคู่หรือคี่แตกต่างกัน อย่างไรก็ตามส่วน $\left[\frac{2}{3}P_2(x)\right]$ ของ x^2 เชิงตั้งฉากกับ $P_0(x) = 1$ จะไม่เหมือนกับส่วน $\left[\frac{1}{2}T_2(x)\right]$ ของ x^2 เดียวกันที่เชิงตั้งฉากกับ $T_0(x) = 1$ ในที่นี้ทุกอย่างจะเหมือนกันยกเว้นความหมายของการเป็นเชิงตั้งฉาก ซึ่งเป็นการเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก w(x)

วงศ์ (family) หนึ่งของพหุนามเชิงตั้งฉากนิยามในช่วงเดียวกันแต่ w(x) ต่างกันอาจจะดีกว่าวงศ์อื่นของการกระจายฟังก์ชันหนึ่ง ความจริงแล้วในการกระจายฟังก์ชันมักพบว่า w(x) เองสามารถเลือกแล้วทำให้การกระจายได้ดียิ่งขึ้นได้

ดังได้กล่าวในตอนต้นแล้วว่าตัวดำเนินการของสมการสตูร์ม - ลีอูวิลล์ เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มิเทียนหรือผูกผันในตัว ตัวดำเนินการเช่นนี้มีคุณสมบัติ 3 ประการ ที่มีความสำคัญในฟิสิกส์ทั้งแผนเดิมและกลศาสตร์ควอนตัม คือ

1. ค่าเจาะจงเป็นจริง
2. ฟังก์ชันเจาะจงมีลักษณะเชิงตั้งฉาก

3. **ฟังก์ชันเจาะจงก่อให้เกิด เซตบริบูรณ์** (complete set)

คุณสมบัติข้อ 1. และ 2. ได้กล่าวมาแล้ว ต่อไปเราจะพิจารณาคุณสมบัติข้อ 3 ซึ่งไม่เป็นสากลแต่ใช้ได้สำหรับกรณีตัวดำเนินการเชิงเส้นอันดับสองในรูปแบบของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ที่เรากำลังพิจารณา ความหมายของคุณสมบัติข้อ 3. คือ ฟังก์ชัน $\psi(x)$ ใด ๆ สามารถกระจายในอนุกรมอนันต์ด้วยรูปแบบ

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) \tag{5.41}$$

สัมประสิทธิ์การกระจาย a_n กำหนดโดยการคูณสมการ (5.41) ด้วย $w(x)\phi_n(x)$ แล้วอินทิเกรต ทีละเทอมรวมทั้งใช้ความสัมพันธ์เชิงตั้งฉากจากสมการ (5.37) จะได้

$$a_n = \frac{\int_a^b w(x)\phi_n(x)\psi(x)dx}{\int_a^b w(x)[\phi_n(x)]^2 dx} \tag{5.42}$$

การศึกษาเชิงวิเคราะห์ของความบริบูรณ์ของฟังก์ชันเจาะจง $\phi_n(x)$ และความสมเหตุสมผลของการกระจายตามสมการ (5.41) จะไม่พิจารณาในที่นี้ แต่เราจะพิจารณาในบางประเด็น กล่าวคือ ความเป็นบรรทัดฐานของฟังก์ชันเจาะจงตามสมการ (5.37) ทำให้การกระจายตามสมการ (5.41) และ (5.42) อยู่ในรูปแบบ

$$\psi(x) = \sum_n c_n \phi_n(x) \tag{5.43}$$

$$c_n = \int_a^b w(x)\phi_n(x)\psi(x)dx \tag{5.44}$$

ลองพิจารณาการกระจายฟังก์ชันในเทอมของพหุนามเชิงตั้งฉากที่เรารู้จักกันดี สมมติเราจะกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} +1 & 0 < x < 1 \quad \text{ถ้า} \\ -1 & -1 < x < 0 \quad \text{ถ้า} \end{cases}$$

ในเทอมของพหุนามเลอจองด์ จากสมการ (5.41) เราได้ว่า

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

และจากสมการ (5.42)

$$a_n = \frac{\int_{-1}^{1} P_n(x)f(x)dx}{\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx} = \frac{\int_{-1}^{1} P_n(x)f(x)dx}{h_n} = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} P_n(x)f(x)dx$$

เมื่อแทนค่า f(x) ที่กำหนดให้และเขียน

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\left[\int_{-1}^{0} P_n(x)(-1)dx + \int_{0}^{1} P_n(x)(+1)dx\right] = \frac{2n+1}{2}\left[\int_{0}^{1} P_n(x)dx - \int_{-1}^{0} P_n(x)dx\right]$$

อินทิกรัลที่สองเขียนได้ใหม่เป็น

$$\int_{-1}^{0} P_n(x)dx = \int_{+1}^{0} P_n(-y)d(-y) = -\int_{1}^{0} P_n(-y)dy = \int_{0}^{1} P_n(-x)dx = (-1)^n\int_{0}^{1} P_n(x)dx$$

โดยที่เราเปลี่ยนตัวแปร x เป็น -y ในขั้นที่สอง, เขียน x แทน y ในขั้นที่สี่ แล้วใช้สมบัติคู่หรือคี่ของ $P_n(x)$ ในขั้นสุดท้าย ดังนั้น

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\left[1-(-1)^n\right]\int_{0}^{1} P_n(x)dx$$

จะเห็นได้ว่า $a_n = 0$ ถ้า n เป็นเลขคู่ ดังนั้น พหุนามเลขคี่เท่านั้นที่มีผลต่อการกระจายและเรา สามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\int_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{(n-1)!}{2^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)!\left(\dfrac{n-1}{2}\right)!} & ,n = \text{เลขคี่} \\ 0 & ,n \ \text{เป็นเลขคู่และมากกว่าหรือเท่ากับ 2} \\ 1 & ,n = 0 \end{cases}$$

ดังนั้นเราจึงได้ว่า

$$a_n = \frac{(2n+1)(n-1)!}{2^n\left(\frac{n+1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}(-1)^{(n-1)/2}$$

เทอมต้น ๆ ของการกระจายที่เราต้องการจึงเป็น

$$f(x) = \frac{3}{2}P_1(x) - \frac{7}{8}P_3(x) + \frac{11}{16}P_5(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

สังเกตุว่า f(x) เป็นฟังก์ชันคี่ นั่นคือ f(-x) = -f(x) ตามที่กำหนดให้เบื้องต้นดังนั้น พหุนามเลขคี่เท่านั้นจึงปรากฏในการกระจาย f(x)

อาร์กิวเมนต์ของ $P_n(x)$ ถูกจำกัดในช่วง [-1, + 1] ซึ่งดูเหมือนว่า x อาจเป็นฟังก์ชันไซน์หรือโคไซน์ ความจริงแล้ว ***พหุนามเลอจองค์เป็นผลเฉลยของ PDE ที่เกี่ยวข้องกับลาปลาเซียนที่เขียนในพิกัดเชิงทรงกลม*** หลังจากที่ PDE ถูกแปลงไปเป็น ODE จำนวน 3 สมการโดยใช้วิธีการแยกตัวแปรซึ่งเคยกล่าวไว้แล้วในบทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์ที่สมนัยกับมุมเชิงขั้ว θ จะให้ผลเฉลยโดยมีพหุนามเลอจองค์เป็นกรณีพิเศษ สมการจะดูง่ายขึ้นถ้าเราให้ x = cosθ ดังนั้นผลเฉลยจะเป็นพหุนามเลอจองค์ใน x หรือ cosθ ซึ่งเป็นเหตุผลที่ว่าการใช้ประโยชน์ของพหุนามเลอจองค์จึงมีอาร์กิวเมนต์ในช่วง [-1, + 1]

ต่อไปเราจะพิจารณาการกระจาย |x| ในเทอมของพหุนามเลอจองค์ในช่วง [-1, +1] เราเขียน

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

โดยที่ $a_n = \dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}|x|\,P_n(x)dx = \dfrac{2n+1}{2}\left[\int_{-1}^{0}(-x)P_n(x)dx + \int_0^1 xP_n(x)dx\right]$

$$= \frac{2n+1}{2}\left[\int_{+1}^{0}(+x)P_n(-x)d(-x) + \int_{0}^{1}xP_n(x)dx\right]$$

$$= \frac{2n+1}{2}\left[(-1)^n + 1\right]\int_{0}^{1}xP_n(x)dx$$

จะเห็นว่า $a_n = 0$ สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่ ซึ่งเป็นไปตามที่เราคาดไว้เพราะ $|x|$ เป็นฟังก์ชั่นคู่ของ x จึงปรากฏพหุนามเลขคู่เท่านั้นในการกระจาย

เนื่องจากความสัมพันธ์เวียนเกิดของพหุนามเลอจองค์คือ

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

ดังนั้นเราจึงเขียนอินทิกรัลที่ปรากฏใน a_n เป็น

$$\int_{0}^{1}xP_n(x)dx = \int_{0}^{1}\left[\frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)\right]dx \quad , n \geq 2$$

สังเกตุว่าเนื่องจาก n เป็นเลขคู่เท่านั้น, ทั้ง n + 1 และ n - 1 จึงเป็นเลขคี่ เราสามารถใช้ผลของ อินทิกรัล $\int_{0}^{1}P_n(x)dx$ จากตัวอย่างที่แล้ว โดยแทน n ด้วย $n+1$ และ $n-1$ ตามลำดับดังนั้น

$$\int_{0}^{1}xP_n(x)dx$$

$$= \frac{n+1}{2n+1}(-1)^{n/2}\frac{n!}{2^{n+1}\left(\frac{n+2}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!} + \frac{n}{2n+1}(-1)^{(n-2)/2}\frac{(n-2)!}{2^{n-1}\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n-2}{2}\right)!}$$

$$= (-1)^{n/2}\frac{(n-2)!}{(2n+1)\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n-2}{2}\right)!\,2^{n-1}}\left[\frac{(n+1)(n-1)n}{4\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2}} - n\right]$$

$$= (-1)^{n/2-1}\frac{(n-2)!}{2^n\left(\frac{n}{2}+1\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \quad \text{สำหรับ } n \geq 2$$

ค่าของ a_n จึงกลายเป็น

$$a_n = (-1)^{n/2-1} \frac{(2n+1)(n-2)!}{2^n\left(\frac{n}{2}+1\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \quad , n \geq 2$$

สำหรับ $n = 0$, เราใช้นิยามของ a_n โดยตรงแล้วเขียน

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\,P_0(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|\,dx = \frac{1}{2}$$

ถ้าให้ $n = 2k$ สำหรับ $k = 1,2,3,.....$ เราจะได้

$$|x| = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(4k+1)(2k-2)!}{4^k(k+1)!(k-1)!}P_{2k}(x)$$

ตัวอย่างการกระจายเทอมต้น ๆ คือ

$$|x| = \frac{1}{2}+\frac{5}{8}P_2(x)-\frac{3}{16}P_4(x)+\frac{13}{128}P_6(x)- ....$$

เราสามารถกระจาย Dirac delta function, $\delta(x)$, ในเทอมของพหุนามเลอจองด์ได้ดังนี้ เราเขียน

$$\delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x)$$

โดยที่ $$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\delta(x)\,P_n(x)dx = \frac{2n+1}{2}P_n(0)$$

สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่จะให้ค่านี้เป็นศูนย์เพราะ $P_n(x)$ จะเป็นพหุนามเลขคี่ ดังนั้น เราต้องหาค่า $P_n(0)$ สำหรับ n ที่เป็นเลขคู่เท่านั้น เราใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับ $P_n(x)$ ที่ $x = 0$ คือ

$$(n+1)P_{n+1}(0) = -nP_{n-1}(0)$$

แทน n ด้วย n-1 จะให้ $nP_n(0) = -(n-1)P_{n-2}(0)$

หรือ $$P_n(0) = -\frac{n-1}{n}P_{n-2}(0)$$

$$= -\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(-\frac{n-3}{n-2}\right)P_{n-4}(0) = \ldots$$

$$= \left(-\frac{n-1}{n}\right)\left(-\frac{n-3}{n-2}\right)\ldots\left(-\frac{n-2m+1}{n-2m+2}\right)P_{n-2m}(0)$$

$$= (-1)^m \frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2m+1)}{n(n-2)(n-4)\ldots(n-2m+2)}P_{n-2m}(0)$$

ดังนั้นถ้า n = 2m, เราสามารถเขียน

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots(3)(1)}{2m(2m-2)\ldots(4)(2)}P_0(0)$$

ถ้าเราเติมเต็มช่องว่างในตัวเศษโดยการคูณและตัวส่วนโดย 2m(2m - 2)(2m-4)....(4)(2) จะให้

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{2m(2m-1)(2m-2)....(3)(2)(1)}{\left[(2m)2(m-1)\ \ 2(m-2).....2(2)2(1)\right]^2}$$

$$= (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \qquad \left(P_0(x) = 1\right)$$

ดังนั้นเราสามารถเขียน

$$\delta(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{4m+1}{2}(-1)^m\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}P_{2m}(x)$$

เราสามารถหาการกระจายนี้ได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้ :

$$\delta(x-x') = w(x)<x|x'> = <x|\ \ |x'>

$$= \langle x|\left(\sum_{n=0}^{\infty}|f_n\rangle\langle f_n|\right)|x'\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(x')f_n(x)$$

โดยที่ $|f_n\rangle$ ก่อให้เกิดเซตบริบูรณ์เชิงตั้งฉากปรกติใด ๆ ของเวกเตอร์ เราให้ $P_n(x)$ มีลักษณะเชิงตั้งฉากปรกติโดยการหารด้วย

$$h_n^{1/2} \equiv \left\{\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2 dx\right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

เราจึงได้

$$\delta(x-x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x')}{\sqrt{2/(2n+1)}} \cdot \frac{P_n(x)}{\sqrt{2/(2n+1)}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x')P_n(x)$$

สำหรับ $x' = 0$, เราได้

$$\delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(0)P_n(x)$$

ซึ่งสอดคล้องกับผลที่ได้ในตอนแรก

ต่อไปเราจะพิจารณาความหมายของการเป็นบริบูรณ์ของฟังก์ชันเพิ่มเติมอีกเล็กน้อยระบบของฟังก์ชันเจาะจง $\phi_n(x)$ เป็นบริบูรณ์ในความหมายดังนี้ สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง $\psi(x)$ ใด ๆ และค่า ε ที่เป็นบวกและเล็กมาก ๆ ใด ๆ , เราสามารถหาการรวมเชิงเส้นที่อันตะ

$$\alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \ldots + \alpha_N\phi_N(x) = S_N$$

ของฟังก์ชันเจาะจงในลักษณะที่

$$\int_a^b w(x)\left[\psi(x) - S_N\right]^2 dx < \varepsilon \tag{5.45}$$

เราได้การประมาณที่ดีที่สุดสำหรับค่า N ที่กำหนด นั่นคือ ค่าน้อยที่สุดสำหรับซ้ายมือของสมการ (5.45) ด้วยสัมประสิทธิ์

$$\alpha_n = c_n = \int_a^b w(x)\phi_n(x)\psi(x)dx$$

สัมประสิทธิ์นี้ทำให้เราได้

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b w(x)\left[\psi(x) - S_N\right]^2 dx = \int_a^b w(x)\left[\psi(x)\right]^2 dx - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = 0 \tag{5.46}$$

สมการ (5.46) อธิบายได้ว่า $\sum_n c_n\phi_n(x)$ ลู่เข้า (converge) สู่ค่า $\psi(x)$ ในกรณีหนึ่งมิติที่กำลังกล่าวถึงอยู่นี้ เราอาจกล่าวให้ชัดเจนได้ว่า เซต $\phi_n(x)$ จะเรียกว่า **บริบูรณ์** ถ้าลิมิตของ **ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย** (mean square error) เป็นศูนย์เราจะสรุปเป็นทฤษฎีบท 5.4 ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.4 ทุกๆ ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง (piecewise continuous function) ซึ่งนิยามในโดเมนด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ square-integrable สามารถกระจายในอนุกรมฟังก์ชันเจาะจงซึ่งลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และเอกรูป (uniform) ในทุกโดเมนย่อยที่เป็นอิสระต่อจุดแห่งภาวะไม่ต่อเนื่อง ที่จุดแห่งภาวะไม่ต่อเนื่องจะเป็นมัชฌิมเลขคณิต (arithmetic mean) ของลิมิตขวามือและซ้ายมือ

สังเกตุว่าทฤษฎีบท 5.4 ไม่ได้ต้องการหรือจำกัดว่าฟังก์ชันที่จะกระจายต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบด้วย

ผลของเซตบริบูรณ์ก่อให้เกิดสิ่งที่มีความสำคัญในฟิสิกส์ทฤษฎีที่เรียกว่า **ความสัมพันธ์บริบูรณ์** (completeness relation) สมมติฟังก์ชันเจาะจงเป็นบรรทัดฐานตามสมการ (5.37) เมื่อแทนค่าสมการ (5.44) ลงในสมการ (5.43) จะได้

$$\psi(x) = \int_a^b \left\{ w(x')\sum_n \phi_n(x)\phi_n(x') \right\} \psi(x')dx' \tag{5.47}$$

เนื่องจาก $\psi(x)$ เป็นฟังก์ชันที่เลือกค่าได้ใด ๆ ซึ่งหมายถึง

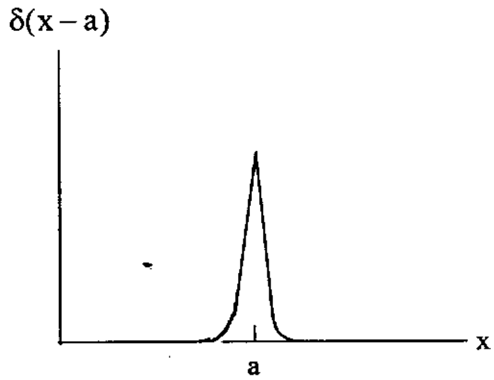
$$w(x')\sum_n \phi_n(x)\phi_n(x') = \delta(x-x') \tag{5.48}$$

โดยที่ δ คือ Dirac delta function,

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ \infty, & x = a \end{cases}$$

และ

$$\int \delta(x-a)dx = 1$$



สมการ (5.48) ก็คือ ความสัมพันธ์บริบูรณ์ นั่นเอง สมการ (5.48) อาจหาได้อีกแบบโดยการใช้ทฤษฎีบทการกระจายตามสมการ (5.43) และ (5.44) กับฟังก์ชันพิเศษ $\delta(x-x')$ แล้วใช้สมการทั่วไป

$$\int \delta(x-x')f(x)dx = f(x') \tag{5.49}$$

สำหรับอินทิกรัลในสมการ (5.44) ก็จะได้สมการ (5.48)

หากฟังก์ชัน $\phi_n(x)$ ไม่ก่อให้เกิดเซตบริบูรณ์เช่นเนื่องจากเราไม่รวมจำนวนอนันต์ของสมาชิกของเซตทั้งหมด โดยรวมเฉพาะบางค่าเท่านั้น เราจะได้ อสมการเบสเซล (Bessel's inequality) สมมติให้ A เป็นเวกเตอร์ส่วนประกอบ n ส่วนของเวกเตอร์ **A** คือ

$$\mathbf{A} = a_1\hat{\mathbf{e}}_1 + a_2\hat{\mathbf{e}}_2 + \ldots + a_n\hat{\mathbf{e}}_n$$

โดยที่ $\hat{\mathbf{e}}_i$ เป็นเวกเตอร์หน่วยและ a_i เป็นองค์ประกอบของเวกเตอร์ **A** นั่นคือ $a_i = \mathbf{A}.\hat{\mathbf{e}}_i$ ดังนั้น

$$\left(\mathbf{A} - \sum_i a_i\hat{\mathbf{e}}_i\right)^2 \geq 0$$

หากเราบวกทุก n องค์ประกอบก็จะให้เครื่องหมายเท่ากับได้ แต่ถ้าหากเราบวกเฉพาะบางองค์ประกอบซึ่งไม่ครบจำนวน n องค์ประกอบก็จะให้เครื่องหมายอสมการคือ เครื่องหมายมากกว่า เนื่องจากเวกเตอร์หน่วยสอดคล้องกับความสัมพันธ์เชิงตั้งฉาก คือ $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$ ดังนั้นเมื่อกระจายสมการข้างต้นจะได้

$$A^2 \geq \sum_i a_i^2 \tag{5.50}$$

ซึ่งเป็นอสมการเบสเซลนั่นเอง

ถ้าเราเปลี่ยนเวกเตอร์ A ข้างต้นเป็นฟังก์ชัน f(x) ใด ๆ เครื่องหมายรวมยอด Σ จะต้องเปลี่ยนไปเป็นการอินทิเกรต รวมทั้งให้ $n \to \infty$ ดังนั้น

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_i a_i \phi_i(x) \right]^2 w(x)dx \geq 0$$

หรือ $$\int_a^b [f(x)]^2 w(x)dx - 2\sum_i a_i \int_a^b f(x)\phi_i(x)w(x)dx + \sum_i a_i^2 \geq 0$$

เมื่อใช้สมการ (5.44) เราจึงได้

$$\int_a^b [f(x)]^2 w(x)dx \geq \sum_i a_i^2$$

ซึ่งก็คืออสมการเบสเซลเช่นกัน โดยที่เครื่องหมายเท่ากับใช้กับกรณีฟังชัน $\phi_n(x)$ เป็นเซตบริบูรณ์เท่านั้น อสมการเบสเซลมีประโยชน์และใช้กับในหลาย ๆ กรณี เช่น การพิสูจน์การลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์เป็นต้น

อสมการอีกชนิดหนึ่งที่ใช้กันบ่อยและคล้ายกับอสมการเบสเซลก็คือ **อสมการชวาร์ซ** (Schwarz's inequality) พิจารณาสมการกำลังสอง

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 (x + b_i / a_i)^2 = 0$$

ถ้า $b_i/a_i = c$ ซึ่งเป็นค่าคงตัว, ผลเฉลยจะเป็น $x = -c$ แต่ถ้าหาก b_i/a_i ไม่เป็นค่าคงตัว, ทุกเทอมจึงไม่เท่ากับศูนย์สำหรับค่า x ที่เป็นจริง ดังนั้นผลเฉลยจึงต้องเป็นเชิงซ้อน เมื่อกระจายเทอมออกไปจะได้

$$x^2\sum a_i^2 + 2x\sum a_i b_i + \sum b_i^2 = 0$$

และเนื่องจาก x เป็นเลขเชิงซ้อนหรือเท่ากับ $-b_i/a_i$ จะได้

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$$

โดยที่เครื่องหมายเท่ากับใช้กับกรณี b_i/a_i เท่ากับค่าคงตัว
ในเทอมของเวกเตอร์จะได้

$$(\mathbf{a}\,.\mathbf{b})^2 = a^2b^2\cos^2\theta \le a^2b^2$$

สำหรับฟังก์ชันใด ๆ อสมการชวาร์ซจะมีรูปแบบ

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b [f(x)]^2 dx \int_a^b [g(x)]^2 dx \tag{5.52}$$

โดยที่เครื่องหมายเท่ากับใช้กับกรณี $g(x) = \alpha f(x)$ โดยที่ α เป็นค่าคงตัว
เนื่องจาก $\int f(x)g(x)dx = \langle f|g \rangle$ ซึ่งเป็นผลคูณภายใน ดังนั้นสมการ (5.52) อาจเขียนได้เป็น

$$\langle f|g\rangle^2 \le \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle$$

ถ้า g(x) เป็นฟังก์ชันเจาะจง $\phi_i(x)$ ที่เป็นบรรทัดฐาน และให้ $w(x) = 1$, สมการ (5.52) จะกลายเป็น

$$a_i^2 \le \int_a^b [f(x)]^2 dx \tag{5.53}$$

ซึ่งคล้ายกับสมการ (5.51) นั่นเอง

5.4 การแยกตัวแปรในสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์

ในบทที่ 1 เราได้กล่าวถึงการแยกตัวแปรในสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไป และในบทที่ 4 ได้กล่าวถึงการแยกตัวแปรด้วยเงื่อนไขขอบมาบ้างแล้ว ในบทนี้เราจะกล่าวถึงการแยกตัวแปรในสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ โดยเราจะแยกข้อปัญหาออกเป็น 3 กรณีคือ การแยกในพิกัดคาร์ทีเซียน การแยกในพิกัดทรงกระบอกและการแยกในพิกัดทรงกลม

5.4.1 การแยกในพิกัดคาร์ทีเซียน

ข้อปัญหาที่กำหนดในพิกัดคาร์ทีเซียนโดยทั่วไปมักเป็นข้อปัญหาซึ่งมีขอบเป็นกล่องสี่เหลี่ยมหรือระนาบ

ตัวอย่างที่ 5.4.1 การแพร่ที่สถานะคงตัว

เมื่อความร้อนมีการแพร่ด้วยอุณหภูมิที่**เป็นอิสระต่อเวลา** กระบวนการนี้เรียกว่าการถ่ายโอนความร้อนที่สถานะคงตัว สมการการแพร่, $\partial T/\partial t = a^2\nabla^2 T$, จะกลายเป็นสมการลาปลาซ, $\nabla^2 T = 0$ จะเห็นได้โดยง่ายว่าสมการการแพร่ยอมให้เราแปลงเชิงเส้นใด ๆ ได้กับอุณหภูมิ T เช่น เราอาจแปลง $T \to aT + b$ แล้วยังทำให้สอดคล้องกับสมการลาปลาซเช่นเดิม แสดงว่า T สามารถวัดในหน่วยใดก็ได้ เช่น เคลวิน (K), เซลเซียส (C) และฟาเรนไฮต์ (F)

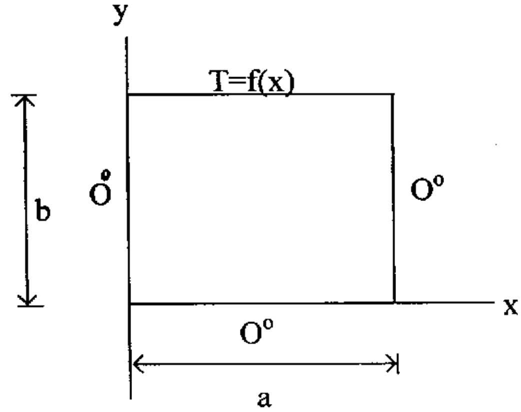
พิจารณาแผ่นตัวนำความร้อนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีด้านยาว a และ b, 3 ด้านมีปลายที่อุณหภูมิ $T = 0$ ในขณะที่ด้านที่ 4 มีอุณหภูมิแปรผันเป็น $T = f(x)$ ผิวด้านแบนกั้นด้วยฉนวนความร้อน จึงไม่มีการสูญเสียความร้อนให้แก่สิ่งแวดล้อม สมมติเป็นการถ่ายโอนความร้อนที่มีสถานะคงตัว เราจะหาการแปรผันอุณหภูมิ T ทั่วแผ่นนี้

ปัญหานี้เป็นปัญหาสองมิติ การแยกตัวแปรจะให้

$$T(x,y) = X(x)Y(y)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda_1 X = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda_2 Y = 0 \qquad (2)$$



$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

สมการ (1) และเงื่อนไขขอบ T(0,y) = T(a, y) =0 ก่อให้เกิดระบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ซึ่งมีฟังก์ชันเจาะจงและค่าเจาะจงเป็น

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad , \quad \lambda_{1n} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

ดังนั้น X(x) สามารถเขียนได้ตามสมการ (5.43) เป็น

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

สมการ (2) ไม่ก่อให้เกิดระบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์ อย่างไรก็ตาม เราสามารถแก้สมการ

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y = 0 \qquad (\because \ \lambda_1 + \lambda_2 = 0)$$

ซึ่งให้ผลเฉลยทั่วไปเป็น

$$Y = Ae^{(n\pi/a)y} + Be^{-(n\pi/a)y}$$

เนื่องจาก T(x,0) = 0, เราต้องได้ Y(0) = 0 ซึ่งแสดงว่า A + B = 0 แล้วทำให้ผลเฉลยกลายเป็น

$$Y = C \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบทั้ง 3 คือ T(0,y) = T(a,y) = T(x,0) = 0 จึงเป็น

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

เงื่อนไขขอบที่ 4 จะให้อนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

โดยที่สัมประสิทธิ์กำหนดจาก

$$C_n \equiv B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

ในกรณีที่ด้านที่ 4 มีอุณหภูมิคงตัวที่ T_o ดังนั้น

$$C_n = \frac{2T_0}{a}\left(\frac{a}{n\pi}\right)\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \frac{4To}{n\pi} & , n = \text{เลขคี่} \\ 0 & , n = \text{เลขคู่} \end{cases}$$

ทำให้

$$T(x,y) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\frac{\sinh[(2k+1)\pi y/a}{\sinh[(2k+1)\pi b/a}\sin[(2k+1)\,\pi x/a] \qquad (3)$$

แต่ถ้าหากด้านที่ 4 การแปรผันอุณหภูมิอยู่ในรูปแบบ $f(x) = T_0 \sin(\pi x/a)$ ดังนั้น

$$C_n = \frac{2T_0}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx = \frac{2T_0}{a}\left(\frac{a}{2}\right)\delta_{n,1} = T_0\delta_{n,1}$$

และ $$B_n = \frac{C_n}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} = \frac{T_0}{\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)}\delta_{n,1}$$

เราจึงได้ $$T(x,y) = T_0\frac{\sinh(\pi y/a)}{\sinh(\pi b/a)}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \qquad (4)$$

ซึ่งมีเพียงเทอมเดียวเท่านั้น เพราะการแปรผันบทด้านที่ 4 เป็นฮาร์มอนิกเดียวของการกระจาย

สังเกตุว่าการแปรผันอุณหภูมิตามสมการ (3) และ (4) เป็นอิสระต่อวัสดุของแผ่นโลหะเพราะเรากำลังพิจารณาสถานะคงตัวเท่านั้น สภาพนำของสารเป็นแฟกเตอร์ในกระบวนการถ่ายโอนความร้อนในขณะเข้าสู่สถานะคงตัว เมื่อถึงจุดสมดุล, การกระจายอุณหภูมิจะเหมือนกันหมดทั่วแผ่น

ต่อไปเราลองพิจารณากรณีที่ด้านทั้ง 4 มีอุณหภูมิ $T = 0$ และสมมติว่าที่เวลา $t = 0$ อุณหภูมิกระจายด้วยฟังก์ชัน $f(x,y)$ เราจะหาการแปรผันอุณหภูมิสำหรับทุกจุด (x,y) ที่เวลา $t > 0$

สมการการแพร่ในกรณีนี้คือ

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

โดยที่ k ใช้แทน a ซึ่งเป็นความยาวของด้านหนึ่ง การแยกตัวแปร $T(x,y,t) = X(x)Y(y)g(t)$ ทำให้เราได้ 3 สมการย่อยคือ

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda_1 X = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda_2 Y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{dg}{dt} + k^2(\lambda_1 + \lambda_2)g = 0 \qquad (3)$$

เงื่อนไขขอบ, $T(0,y,t) = T(a,y,t) = T(x,0,t) = T(x,b,t) = 0$ รวมทั้งสมการ (1) และ (2) ก่อให้เกิดระบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad , \quad \lambda_1 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad , \quad \lambda_2 = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

และทำให้ผลเฉลยที่เป็นผลรวมของการกระจายคือ

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$Y(y) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

ด้วยค่า $\gamma_{mn} \equiv k^2\pi^2(n^2/a^2 + m^2/b^2)$, ผลเฉลยของสมการ (3) เขียนได้เป็น

$$g(t) = Ce^{-\gamma_{mn}t}$$

ดังนั้น
$$T_{(x,y,t)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}e^{-\gamma_{mn}t}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

โดยที่ $A_{mn} = CA_nB_m$ เป็นค่าคงตัว ซึ่งหาค่าได้โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $T(x,y,o) = f(x,y)$ ทำให้ได้

$$f(x,y) = \sum_{m,n} A_{mn}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

และ
$$A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a dx\int_0^b dy\ f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\ \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

ตัวอย่างที่ 5.4.2 อนุภาคในกล่อง

พฤติกรรมของอนุภาคระดับอะตอมมวล μ ที่ถูกกำจัดอยู่ในกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด a, b และ c กำหนดในรูปของสมการชเรอดิงเงอร์สำหรับอนุภาคเสรีคือ

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$$

ด้วยเงื่อนไขขอบคือ $\varphi(x,y,z,t)$ เป็นศูนย์ที่ทุกด้านของกล่องตลอดเวลา

การแยกตัวแปร $\varphi(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ ทำให้เราได้ ODE ดังนี้:

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda_1 X = 0$$
$$\frac{d^2Y}{dy^2}+\lambda_2 Y = 0$$
$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\lambda_3 Z = 0$$
$$\frac{dT}{dt}+i\omega T = 0$$

โดยที่ $\omega \equiv \frac{\hbar}{2\mu}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$

สมการเหล่านี้เมื่อรวมกับเงื่อนไขขอบ

$$\varphi(o,y,z,t)=\varphi(a,y,z,t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(o)=0=X(a)$$

$$\varphi(x,o,z,t)=\varphi(x,b,z,t)=0 \quad \Rightarrow \quad Y(o)=0=Y(b)$$

$$\varphi(x,y,o,t)=\varphi(x,y,c,t)=0 \quad \Rightarrow \quad Z(o)=0=Z(c)$$

จะนำไปสู่ระบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ซึ่งมีผลเฉลยที่หาได้ง่ายคือ

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad , \quad \lambda_1=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad , \quad n=1,2,\ldots$$
$$Y_m(x)=\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad , \quad \lambda_2=\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad , \quad m=1,2,\ldots$$
$$Z_\ell(x)=\sin\left(\frac{\ell\pi}{c}z\right) \quad , \quad \lambda_3=\left(\frac{\ell\pi}{c}\right)^2 \quad , \quad \ell=1,2,\ldots$$

สมการสำหรับเวลามีผลเฉลยในรูปแบบ $T=Ce^{-i\omega_{\ell mn}t}$

โดยที่ $\omega_{\ell mn} \equiv \frac{\hbar}{2\mu}\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{\ell\pi}{c}\right)^2\right]$

ผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเช่นนี้คือ

$$\varphi(x,y,z,t)=\sum_{\ell,m,n=1}^{\infty}A_{\ell mn}e^{-i\omega_{lmn}t}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{\ell\pi}{c}z\right)$$

ค่าคงตัว $A_{\ell mn}$ กำหนดจากรูปร่างเริ่มต้นของฟังก์ชันคลื่น $\varphi(x,y,z,o)$

พลังงานของอนุภาคคือ

$$E=\hbar\omega_{\ell mn}=\frac{\hbar^2}{2\mu}k^2$$

โดยที่ $$k^2\equiv\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{\ell^2}{c^2}\right)$$

เป็นเลขคลื่น (wave number) ดังนั้นพลังงานจึงมีค่าเป็นควอนตัม

แต่ละเซตของจำนวนเต็มค่าบวก n, m และ ℓ แสดงสถานะของอนุภาค ในกรณีที่เป็นกล่องลูกบาศก์, $a=b=c\equiv L$, พลังงานของอนุภาคคือ

$$E=\frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu L^2}(n^2+m^2+\ell^2)=\frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu V^{2/3}}(n^2+m^2+\ell^2)$$

โดยที่ $V\equiv L^3$ เป็นปริมาตรของกล่อง สถานะพื้นคือ (1, 1, 1) และด้วยพลังงาน $E=3\hbar^2\pi^2/2\mu V^{2/3}$ โดยไม่มีสภาพซ้อนสถานะนั่นคือ สถานะหนึ่งสมนัยกับพลังงานนี้เท่านั้น อย่างไรก็ตามสถานะที่ระดับสูงกว่านี้จะมีสภาพซ้อนสถานะเช่น สถานะ (1, 1, 2), (1, 2, 1), และ (2, 1, 1) ต่างก็สมนัยกับพลังงาน $E=6\hbar^2\pi^2/2\mu V^{2/3}$ สถานะที่สมนัยกับค่า n, m, ℓ ที่มากกว่านี้จะยิ่งมีสภาพซ้อนสถานะมากขึ้น

ถ้าเราให้ $$n^2+m^2+\ell^2=R^2\equiv\frac{2\mu V^{2/3}E}{\hbar^2\pi^2}$$

ซึ่งมีลักษณะคล้ายสมการของทรงกลมในปริภูมิ $n\ell m$ หาก R มีค่ามาก, จำนวนสถานะที่บรรจุภายในทรงกลมรัศมี R จะเป็นปริมาตรของอัฐภาค (octant) ที่หนึ่งของทรงกลม ถ้า N เป็นจำนวนสถานะดังกล่าว ดังนั้น

$$N \equiv \frac{1}{8}\left(\frac{4\pi}{3}\right)R^3 = \frac{\pi}{6}\left(\frac{2\mu E V^{2/3}}{\pi^2\hbar^2}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\frac{2\mu E}{\pi^2\hbar^2}\right)^{3/2} V$$

ความหนาแน่นสถานะ (density of states) ซึ่งเป็นจำนวนสถานะต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรจึงเป็น

$$n \equiv \frac{N}{V} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{2\mu}{\pi^2\hbar^2}\right)^{3/2} E^{3/2}$$

ซึ่งเป็นสมการสำคัญในฟิสิกส์สถานะของแข็งเพราะพลังงาน E จะเป็น **พลังงานเฟร์มี**, $E_F = \alpha n^{2/3}$ โดยที่ α เป็นค่าคงตัว อย่างไรก็ตาม เราต้องนำผลของสปินเข้ามาพิจารณาด้วย แต่เราไม่กล่าวถึงในที่นี้

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าการเปลี่ยนแปลงตามเวลากำหนดโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ดังนั้นตราบใดที่มีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้อง เราจะมีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งหรือ FODE การระบุปริมาณที่เราสนใจ เช่น อุณหภูมิ T หรือ ฟังก์ชันคลื่น φ จึงเพียงพอที่จะกำหนดผลเฉลยได้อย่างเดียว

ในกรณีของสมการคลื่นซึ่งเกี่ยวข้องกับอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับเวลา ซึ่งเราเคยได้กล่าวไว้แล้วในหัวข้อที่ 4.5 ของบทที่ 4 ดังนั้นจึงมีพารามิเตอร์ 2 ตัวในผลเฉลยทั่วไป การกำหนดพารามิเตอร์ทั้งสองนี้เราต้องใช้เงื่อนไขเริ่มต้น 2 เงื่อนไข

คลื่นในเส้นเชือกอธิบายได้ด้วยสมการ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

โดยที่ c เป็นอัตราเร็วของการกระจายคลื่นซึ่งสัมพันธ์กับแรงดึง τ และความหนาแน่น ρ โดย $c = \sqrt{\tau/\rho}$ ถ้าลวดยาว a และตรึงที่ปลายทั้งสอง ผลเฉลยของสมการคือ

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

โดยที่ $\omega_n \equiv cn\pi/a, A_n$ และ B_n เป็นค่าคงตัว และ $n = 1, 2, \ldots$

หากเราระบุรูปร่างของเชือกตอนเริ่มต้นเป็น $\varphi(x,o) = f(x)$ จะได้อนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

เราก็สามารถหา A_n ได้ สิ่งที่เราต้องการทราบต่อไปคือ B_n เนื่องจากรูปร่างของคลื่นไม่เพียงพอที่จะแก้ปัญหาได้อย่างเดียว ในกรณีของเชือกเราต้องทราบรูปร่างของความเร็ว หรือ $\partial\varphi/\partial t$ ที่ $t = 0$ ด้วย สมมติให้

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x)$$

ดังนั้น
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

ทำให้เรากำหนดค่าของ B_n ได้ เราจึงสรุปว่าการกำหนด φ ให้เป็นได้อย่างเดียว จำเป็นต้องทราบรูปร่างของคลื่นตอนเริ่มต้น รวมทั้งรูปร่างของความเร็วเริ่มต้นด้วย

ความถี่ค่าต่าง ๆ ω_n โดยที่ $n = 1, 2, \ldots$ มักกำหนดเป็นแบบแผนหรือโมด (mode) ของการแกว่งกวัด ดังนั้น โดยทั่วไปผลเฉลยจึงเป็นการซ้อนทับเชิงเส้นของหลาย ๆ โมดจนถึงอนันต์ ในทางปฏิบัติเราอาจกระตุ้นโมดเดียวหรือโมดจำนวนหนึ่งด้วยนัยสำคัญระดับหนึ่งก็ได้

สำหรับคลื่นที่มีการแผ่กระจายที่ไม่ใช่คลื่นนิ่ง (เช่น คลื่นในเส้นเชือก) การระบุรูปร่างของคลื่นและความเร็วไม่สำคัญเท่ากับการระบุโมดของการแผ่กระจาย เช่น ในกรณีของ**ท่อนำคลื่น** (waveguide), หลังจากที่เราแยกการแปรผันตามเวลาออกมาแล้ว การแปรผันเฉพาะตามเวลาเช่น $e^{i\omega t}$ และทิศทางเฉพาะของการแผ่กระจายคลื่น ซึ่งมักกำหนดให้อยู่ในแนวแกน Z, จะมีการคัดสรรอีกต่อไป

ถ้า u เป็นองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าหรือสนามแม่เหล็ก, เราสามารถเขียน

$$u(x,y,z,t) = \varphi(x,y)e^{i(\omega t \pm kz)}$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัวเรียกว่า เลขคลื่น สมการคลื่นจะกลายเป็น

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\varphi = 0$$

ถ้าให้ $\gamma^2 \equiv \omega^2 / c^2 - k^2$ และ $\nabla_t \equiv (\partial / \partial x, \partial / \partial y)$ และเขียนสมการข้างต้นนี้ในเทอมของเวกเตอร์ จะได้

$$\left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0 \qquad (5.54)$$

โดยที่
$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}(x,y) \\ \mathbf{B}(x,y) \end{Bmatrix} e^{i(\omega t \pm kz)} \qquad (5.55)$$

ซึ่งเป็นสมการหลักที่ใช้ศึกษาท่อนำคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและโพรงการสั่นพ้อง (resonant cavities)

ตัวอย่างที่ 5.4.3 ท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมมุมฉาก

สมการแมกซ์เวลล์และสมการ (5.55) ให้องค์ประกอบตามขวาง ซึ่งตั้งฉากกับทิศการแผ่กระจายคลื่นคือ $\mathbf{E}_t$ และ $\mathbf{B}_t$ ในเทอมขององค์ประกอบตามยาว E_z และ B_z ดังนี้

$$\gamma^2 \mathbf{E}_t = \nabla_t\left(\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z}\right) - i\frac{\omega}{c}\hat{e}_z \times \left(\nabla_t B_z\right)$$

$$\gamma^2 \mathbf{B}_t = \nabla_t\left(\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z}\right) + i\frac{\omega}{c}\hat{e}_z \times \left(\nabla_t E_z\right)$$

โดยที่ $\gamma^2 = \omega^2 / c^2 - k^2$ และ ∇_t เป็นเกรเดียนต์สองมิติซึ่งเป็นตัวดำเนินการในระนาบตามขวาง โดยทั่วไปเรามักศึกษาท่อนำคลื่น 3 ชนิดคือ

1. คลื่นแม่เหล็กตามขวาง (TM) ซึ่งมี $B_z = 0$ ในทุก ๆ แห่ง เงื่อนไขขอบเกี่ยวกับ $\mathbf{E}$ ต้องการให้ E_z เป็นศูนย์ที่ผนังของท่อ

2. คลื่นไฟฟ้าตามขวาง (TE) ซึ่งมี $E_z = 0$ ในทุก ๆ แห่ง เงื่อนไขขอบเกี่ยวกับ B_z ต้องการให้ $\partial B_z / \partial n$ เป็นศูนย์ผนังของท่อ โดยที่ $\partial / \partial n$ เป็นอนุพันธ์ระบุทิศทาง (directional derivative) E ที่ตั้งฉากกับผนัง

3. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตามขวาง (TEM) ซึ่งมี $\mathbf{B}_z = 0 = \mathbf{E}_z$ สำหรับผลเฉลยที่ไม่ชัดของสมการทั้งสองต้องการให้ $\gamma^2 = 0$ ซึ่งดูคล้ายกับคลื่นเสรีที่ไม่มีขอบ

เราจะพิจารณาโมด TM อย่างสั้น ๆ สมการหลักในโมดนี้คือ

$$\left(\nabla_t^2 + \gamma^2\right)E_z = 0$$

$$B_z = 0$$

$$\gamma^2 \mathbf{E}_t = \nabla_t\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$\gamma^2 \mathbf{B}_t = i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{e}}_z x\left(\nabla_t E_z\right)$$

สำหรับท่อนำคลื่นที่มีภาคตัดขวางเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้าน a และ b อยู่ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ เราจึงได้

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \gamma^2 E_z = 0$$

การแยกตัวแปร $E_z(x,y) \equiv X(x)Y(y)$ ทำให้ได้ระบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์ 2 ระบบคือ

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda_1 X = 0 \quad , \quad X(o) = X(a) = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda_2 Y = 0 \quad , \quad Y(o) = Y(b) = 0$$

โดยที่ $\gamma^2 = \lambda_1 + \lambda_2$ ทั้งสองสมการมีผลเฉลยเป็น

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad , \quad \lambda_{1n} \equiv \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad , \quad \lambda_{2m} \equiv \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad , \quad m = 1, 2\ldots$$

เลขคลื่นกำหนดโดย $\quad k_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$

ซึ่งเป็นค่าจริง ถ้าคลื่นแผ่กระจาย (ค่า k ที่เป็นจินตภาพแสดงการสลายตัวแบบเอกซ์โพเนนเชียลหรือเพิ่มขึ้นไปตามแกน z) **ดังนั้น จะมีความถี่ตัด** (cut-off frequency)

$$\omega_{mn} \equiv c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \qquad m, n \geq 1$$

โดยที่ความถี่ต่ำกว่านี้ คลื่นไม่สามารถแผ่กระจายไปตามท่อนำคลื่นได้ ดังนั้นสำหรับคลื่น TM, ความถี่ต่ำสุดที่สามารถแผ่กระจายไปตามท่อนำคลื่นสี่เหลี่ยมมุมฉากคือ

$$\omega_{11} = \frac{\pi c\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

ผลเฉลยทั่วไปของ E_Z จึงเป็น

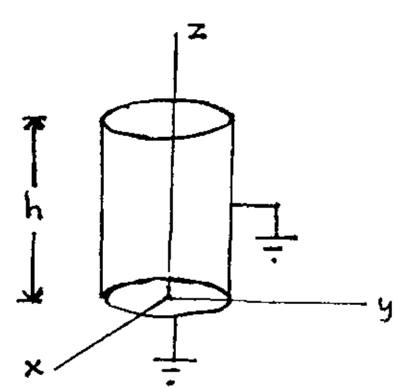
$$E_z = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)e^{i(\omega t \pm k_{mn} z)}$$

ค่าคงตัว A_{mn} เลือกค่าได้และสามารถกำหนดจากรูปร่างตอนเริ่มต้นของคลื่น แต่มักไม่กระทำกัน เมื่อเราทราบ E_z, องค์ประกอบอื่น ๆ ก็สามารถหาโดยใช้ 2 สมการที่กำหนดให้นี้ได้เช่นกัน

5.4.2 การแยกในพิกัดทรงกระบอก

ตัวอย่างที่ 5.4.4 กระป๋องตัวนำรูปทรงกระบอก

พิจารณากระป๋องตัวนำรูปทรงกระบอกรัศมี a สูง h ศักย์ V (ρ,φ) แปรผันที่ผิวบนในขณะที่ผิวด้านข้างและที่ก้นจะต่อลงดิน (grounded) เราจะหาศักย์ไฟฟ้าสถิตที่ทุกจุดภายในกระป๋อง



การแยกตัวแปร $\psi(\rho,\phi,z) = R(\rho)\,\Phi(\phi)\,Z(z)$

จะแปลงสมการลาปลาซ, $\nabla^2 \psi = 0$ ไปเป็น ODE คือ

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + (k^2 - \frac{m^2}{\rho^2})\,R = 0$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2\ Z = 0$$

สมการแรกเป็นสมการเบสเซล ซึ่งมีผลเฉลยเป็น

$$R(\rho) = AJ_m\ (k\rho) + BY_m(k\rho)$$

สมการที่สองมีผลเฉลยเป็น

$$\Phi(\phi) = C\cos m\phi + D\sin m\phi$$

ความเป็นคาบของ ψ หรือ Φ ตาม ϕ แสดงว่า m เป็นจำนวนเต็ม และสมการที่สามมีผลเฉลยอยู่ในรูปแบบ

$$Z(z) = Ee^{kz} + Fe^{-kz}$$

สังเกตว่าทั้ง 3 สมการข้างต้นไม่เป็นระบบสตูร์ม-ลิอูวิลล์เพราะเงื่อนไขขอบที่เกี่ยวข้องไม่สอดคล้องกับที่เคยได้กล่าวมาแล้ว อย่างไรก็ตามเราก็ยังสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยเงื่อนไขที่กำหนดให้นี้

เนื่องจากศักย์จะต้องเป็นอันตะทุกแห่งภายในกระป๋องรวมทั้งที่ $\rho = 0$ ด้วย จึงทำให้ B เป็นศูนย์เพราะฟังก์ชันนอยมันน์ $Y_m(k\rho)$ ไม่นิยามที่ $\rho = 0$ เราต้องการให้ ψ เป็นศูนย์ที่ $\rho = a$ ดังนั้น $J_m(ka) = 0$ ซึ่งต้องให้ ka เป็นรากของฟังก์ชันเบสเซลอันดับ m ให้ x_{mn} เป็นค่าศูนย์ที่ n ของฟังก์ชันเบสเซลอันดับ m นี้ ดังนั้น

$$ka = x_{mn} \Rightarrow k \equiv \frac{x_{mn}}{a}\ , n = 1,2,\ldots$$

ในทำนองเดียวกัน, ψ เป็นศูนย์ที่ $z = 0$ ทำให้เราได้

$$E = -F \qquad \text{และ} \qquad Z = E\sinh\left(\frac{x_{mn}z}{a}\right)$$

ผลคูณของ R,Φ และ Z แล้วรวมกันตลอดทุกค่าของ m และ n ที่เป็นไปได้จะให้

$$\psi(\rho,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \sinh\left(\frac{x_{mn}}{a}z\right) (A_{mn}\cos m\phi + B_{mn}\sin m\phi) \quad (1)$$

โดยที่ A_{mn} และ B_{mn} เป็นค่าคงตัวที่จะต้องหาต่อไป เราไม่นับค่าเป็นลบของ m เพราะเราให้เทอมที่ขึ้นกับค่าเป็นบวกอีกทีหนึ่ง

เราใช้ความเป็นเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันเบสเซลเพื่อหาค่าคงตัว A_{mn} และ B_{mn} ถ้าให้ $z = h$ ดังนั้นสมการ (1) จะลดลงเหลือ

$$V(\rho,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \sinh\left(\frac{x_{mn}}{a}h\right) (A_{mn}\cos m\phi + B_{mn}\sin m\phi)$$

ทำให้

$$A_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})\sinh(x_{mn}\frac{h}{a})} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho V(\rho,\phi)\, J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \cos m\phi\, d\rho$$

และ

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(x_{mn})\sinh(x_{mn}\frac{h}{a})} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho V(\rho,\phi) J_m\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) \sin m\phi\, d\rho$$

เนื่องจาก

$$\int_0^a \rho J_m^2\left(\frac{x_{mn}}{a}\rho\right) d\rho = \frac{a^2}{2} J_{m+1}^2(x_{mn})$$

ในกรณีพิเศษซึ่งมีความสำคัญคือสมมาตรเชิงขั้ว ซึ่ง $V(\rho,\phi)$ เป็นอิสระต่อ ϕ ทำให้

$$A_{mn} = \frac{4\delta_{m,0}}{a^2 J_1^2(x_{on})\sinh(x_{on}\frac{h}{a})} \int_0^a \rho V(\rho) J_0\left(\frac{x_{on}}{a}\rho\right) d\rho$$

$$B_{mn} = 0$$

ตัวอย่างที่ 5.4.4 นี้ แสดงข้อปัญหาซึ่งมีผลเฉลยเขียนในเทอมของอนุกรมที่เรียกว่า **อนุกรมฟูเรียร์-เบสเซล** คือ

$$\psi(\rho,\phi,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{mn}\rho)\sinh(k_{mn}z)(A_{mn}\cos m\phi + B_{mn}\sin m\phi) \qquad (5.56)$$

โดยที่ $k_{mn} \equiv x_{mn}/a$ และ x_{mn} เป็นค่าศูนย์ที่ n ของฟังก์ชันเบสเซลอันดับ m ค่าของ k ที่เป็นภินทนะหรือเป็นช่วง ๆ เพราะเรากำหนดให้ ψ เป็นศูนย์ที่ $\rho = a$ ถ้าเราให้ $a \to \infty$, ค่า k จะเป็นตัวแปรที่ต่อเนื่องและเราต้องเปลี่ยนจากการบวกทุกค่าของ k ไปเป็นอินทิกรัล ซึ่งอุปมากับการเปลี่ยนจากอนุกรมฟูเรียร์ไปเป็นการแปลงฟูเรียร์ ซึ่งจะได้กล่าวในบทต่อไป

ตัวอย่างที่ 5.4.5 การสั่นของเนื้อเยื่อ

สมการคลื่นสำหรับระบบสองมิติที่มีการสั่นเช่น กลอง คือ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

โดยที่ c เป็นอัตราเร็วของการกระจายคลื่น กำหนดโดย $c = \sqrt{\tau/\sigma}$ เมื่อ τ เป็นแรงดึงต่อหนึ่งหน่วยความยาว และ σ เป็นความหนาแน่นผิวของเนื้อเยื่อ

สำหรับกลองทรงกระบอกเรากำหนดสมการในพิกัดเชิงขั้วเป็น

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

การแยกตัวแปรจะทำให้ได้

$$\Phi(\phi) = A\cos m\phi + B\sin m\phi \qquad m = 0,1,2,...$$

$$T(t) = A'\cos\omega t + B'\sin\omega t$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + (\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{\rho^2})\, R = 0$$

ผลเฉลยของสมการสุดท้ายนี้ซึ่งนิยมที่ $\rho = 0$ และเป็นศูนย์ที่ $\rho = a$ คือ

$$R = CJ_m(\frac{x_{mn}}{a}\rho)\,, \frac{\omega}{c} = \frac{x_{mn}}{a}\,, n = 1,2,\ldots$$

และความถี่ที่มีการแผ่กระจายออกไปคือ $\omega_{mn} \equiv \frac{c}{a}x_{mn}$

ถ้ารูปร่างตอนเริ่มต้นกำหนดโดย $f(\rho, \phi)$ และความเร็วเริ่มต้นเป็นศูนย์ดังนั้น $B' = 0$ ทำให้ผลเฉลยกลายเป็น

$$\psi(\rho,\phi,t) = \sum_{\substack{m=0\\n=1}}^{\infty} J_m(\frac{x_{mn}}{a}\rho)\cos(\frac{cx_{mn}}{a}t)\,(A_{mn}\cos m\phi + B_{mn}\sin m\phi)$$

โดยที่ $$A_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J^2_{m+1}(x_{mn})}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho f(\rho,\phi) J_m(\frac{x_{mn}}{a}\rho)\cos m\phi\, d\rho$$

$$B_{mn} = \frac{2}{\pi a^2 J^2_{m+1}(x_{mn})}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho f(\rho,\phi) J_m(\frac{x_{mn}}{a}\rho)\sin m\phi\, d\rho$$

ในกรณีที่การกระจัดเริ่มต้นของเนื้อเยื่อเป็นอิสระต่อ ϕ, จึงมีเทอมที่ $m = 0$ เท่านั้นที่เกี่ยวข้อง ทำให้

$$\psi(\rho,\phi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\,(\frac{x_{on}}{a}\rho)\cos(\frac{c\,x_{on}}{a}t)$$

และ $$A_n = \frac{4}{a^2 J_1^2(x_{on})}\int_0^a \rho f(\rho) J_0(\frac{x_{on}}{a}\rho)$$

โดยที่ไม่มีการสร้างคลื่นที่ขึ้นกับค่า ϕ ในเวลาต่อมาอีกเลย

ตัวอย่างที่ 5.4.6 อนุภาคในกระป๋องรูปทรงกระบอก

ตัวอย่างที่ 5.4.2 แสดงพฤติกรรมของอนุภาคภายในกล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าหากภาชนะที่บรรจุอนุภาคเปลี่ยนไปเป็นกระป๋องรูปทรงกระบอกยาว L รัศมี a สมการชเรอดิงเงอร์สำหรับอนุภาคมวล μ จะกลายเป็น

$$i\frac{\partial\psi}{at} = -\frac{\hbar}{2\mu}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]$$

โดยมีเงื่อนไขขอบคือ $\psi(\rho,\phi,z,t)$ เป็นศูนย์ที่ด้านข้างของกระป๋อง

การแยกตัวแปร $\psi(\rho,\phi,z,t) = R(\rho)\,\Phi(\phi)Z(z)T(t)$ ทำให้เราได้ ODE ดังนี้

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \lambda_1\,\Phi = 0$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \lambda_2 Z = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left[\frac{2\mu}{\hbar}\omega - \lambda_2 - \frac{\lambda_1}{\rho^2}\right]R = 0 \qquad (2)$$

ความเป็นคาบของ ψ ใน ϕ ทำให้ $\lambda_1 = m^2$ สมการ (1) ควบกับเงื่อนไขขอบที่เป็นคาบบน Z ก่อให้เกิดระบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์ด้วยผลเฉลย

$$Z(z) = \sin(\frac{k\pi}{L}z)\,,\ \lambda_2 = (\frac{k\pi}{L})^2\ ,\ k = 1,2,\ldots$$

ถ้าให้ $2\frac{\mu}{\hbar}\omega - (\frac{k\pi}{L})^2 \equiv b^2$, ดังนั้นสมการ (2) จะกลายเป็น

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + (b^2 - \frac{m^2}{\rho^2})R = 0$$

และผลเฉลยมีพฤติกรรมที่ดีที่ $\rho = 0$ คือ J_m $(b\rho)$ เนื่องจาก $R(a) = 0$ เราจึงได้เงื่อนไขความเป็นควอนตัม

$$ba = x_{mn} \Rightarrow b = \frac{x_{mn}}{a}, \; n = 1,2,3,\ldots$$

ดังนั้นพลังงานค่าเจาะจงจะเป็น

$$E_{kmn} \equiv \hbar\omega_{kmn} = \frac{\hbar^2}{2\mu}\left[(\frac{k\pi}{L})^2 + \frac{x_{mn}^2}{a^2}\right]$$

และผลเฉลยทั่วไปสามารถเขียนได้เป็น

$$\psi(\rho,\phi,z,t) = \sum_{\substack{k,n=1 \\ m=0}}^{\infty} e^{-i\omega_{kmn}t} J_m(\frac{x_{mn}}{a}\rho)\sin(\frac{k\pi}{L}z)(A_{kmn}\cos m\phi + B_{kmn}\sin m\phi)$$

ตัวอย่างที่ 5.4.7 ท่อนำคลื่นรูปทรงกระบอก

สำหรับคลื่น TM ที่กระจายไปตามแกน z ในตัวนำรูปทรงกระบอกกลวง เราจะได้ (ดูตัวอย่างที่ 5.4.3 ประกอบ)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial E_z}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\phi^2} + \gamma^2 E_z = 0$$

การแยกตัวแปร $E_z = R(\rho)\Phi(\phi)$ ทำให้เราได้ผลเฉลย

$$\Phi(\phi) = A\cos m\phi + B\sin m\phi$$

และสมการ

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + (\gamma^2 - \frac{m^2}{\rho^2})R = 0$$

ผลเฉลยซึ่งเป็นปรกติที่ $\rho = 0$ และเป็นศูนย์ที่ $\rho = a$ คือ

$$R = CJ_m(\frac{x_{mn}}{a}\rho) \quad \text{และ} \quad \gamma = \frac{x_{mn}}{a}$$

จากนิยามของ γ ทำให้

$$\gamma^2 = \frac{x^2{}_{mn}}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{x_{mn}^2}{a^2}}$$

และความถี่ตัดคือ $\omega_{mn} = \frac{c}{a} x_{mn}$

ผลเฉลยกรณี $m = 0$ ซึ่งเป็นสมมาตรเชิงขั้ว (azimuthally symmetric) คือ

$$E_z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_o\,(\frac{x_{on}}{a}\rho)e^{i(\omega t \pm k_n z)}\ , B_z = 0$$

โดยที่ $$k_n \equiv \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{x_{on}^2}{a^2}}$$

ตัวอย่างที่ 5.4.8 กระแสในลวดวงกลม

พิจารณาการไหลของประจุในลวดยาวพื้นที่หน้าตัดวงกลมรัศมี a จากสมการแมกซ์เวลล์

$$\nabla.\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla.\mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{1}$$

เคิร์ลของสมการที่สามจะให้

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right] \tag{2}$$

สำหรับความถี่สามัญ คือ $|\, 4\pi\mathbf{j}\,| >> |\, \partial\mathbf{E}/\partial t\,|$ ดังนั้นเราจึงตัดเทอมที่สองทางขวามือออกไป ส่วนซ้ายมือของสมการอาจแยกออกเป็น

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla.\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E} \tag{3}$$

เมื่อใช้กฎของโอห์มคือ $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ ในสมการ (3) แล้วแทนค่าลงในสมการ (2) จะได้

$$\nabla^2 \mathbf{j} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j} = 0$$

สมมติให้ลวดอยู่ในแนวแกน z และไม่มีความปั่นป่วน (turbulence) ดังนั้น j จึงอยู่ในแนวแกน z ด้วย เราสมมติต่อไปอีกว่า **j** เป็นอิสระต่อ ϕ และ z ในระบบพิกัดทรงกระบอกและขึ้นกับเวลาด้วยเทอม $e^{-i\omega t}$ ดังนั้นเราจึงได้

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\frac{dj}{d\rho}) + \tau^2\ j = 0 \qquad (4)$$

โดยที่ $\tau^2 = i\,\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} \equiv \frac{2i}{\delta^2}$

และ $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$ เรียกว่า **skin depth**

สมการเคลวิน (Kelvin equation) กำหนดโดย

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} - ik^2w = 0 \qquad (5)$$

ถ้าเราให้ $x = \sqrt{i}\ t/k$ ดังนั้น

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dw}{dt} + w = 0$$

ซึ่งเป็นสมการเบสเซลอันดับศูนย์ ถ้าผลเฉลยเป็นปรกติที่ x = 0, ดังนั้นทางเลือกหนึ่งคือ

$$w(t) = J_0(t) = J_0(e^{-i\pi/4}\ kx)$$

ซึ่งเป็น**ฟังก์ชันเคลวิน** (Kelvin function) โดยทั่วไปเรามักเขียน

$$J_o\ (e^{-i\pi/4}\ kx) \equiv \text{ber}\ (kx) + i\ [\text{bei}\ (kx)]$$

โดยที่ ber หมายถึง Bessel real และ bei หมายถึง Bessel imaginary ถ้าเราแทนค่า $z = e^{-i\pi/4}kx$ สำหรับการกระจาย $J_0(z)$ และแยกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของการกระจายออกจากกัน จะได้

$$\text{ber}\,(x) = 1 - \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(x/2)^8}{(4!)^2} - \cdots$$

$$\text{bei}\,(x) = \frac{(x/2)^2}{(1!)^2} - \frac{(x/2)^6}{(3!)^2} + \frac{(x/2)^{10}}{(5!)^2} - \cdots$$

สมการ (4) เขียนในรูปแบบ

$$\frac{d^2 j}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dj}{d\rho} + i\frac{2}{\delta^2}\,j = 0$$

ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนของสมการ (5) ด้วยค่า $k^2 \equiv 2/\delta^2$ ดังนั้น ผลเฉลยจึงเป็น

$$j(\rho) = AJ_0(e^{i\pi/4}k\rho) \equiv A\{\text{ber}\,(\frac{\sqrt{2}}{\delta}\rho) - i\,[\text{bei}\,(\frac{\sqrt{2}}{\delta}\rho)\,]\}$$

เราสามารถเปรียบเทียบค่าของความหนาแน่นกระแสที่ ρ และที่ผิว $\rho = a$ ได้เป็น

$$\left|\frac{j(\rho)}{j(a)}\right| = \left[\frac{\text{ber}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\delta}\rho\right) + \text{bei}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\delta}\rho\right)}{\text{ber}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\delta}a\right) + \text{bei}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{\delta}a\right)}\right]^{1/2}$$

สำหรับความถี่ต่ำ, δ จะมาก ซึ่งแสดงว่า $\sqrt{2}\,\rho/\delta$ มีค่าน้อย ดังนั้น $\text{ber}\left(\sqrt{2}\,\rho/\delta\right) \approx 1$ และ $\text{bei}\left(\sqrt{2}\,\rho/\delta\right) \approx 0$ ดังนั้น $|\,j(\rho)/j(a)\,| \approx 1$ หมายความว่าความหนาแน่นกระแสเกือบจะเอกรูป (uniform) สำหรับความถี่สูง, อัตราส่วนของความหนาแน่นกระแสจะเริ่มจากค่าน้อยกว่า 1 ที่ $\rho = 0$ แล้วค่อย ๆ เพิ่มขึ้นเป็น 1 ที่ $\rho = a$ ค่าเริ่มต้นขึ้นกับความถี่ สำหรับความถี่สูงมาก ๆ , ค่าเริ่มต้นเกือบจะเป็นศูนย์

5.4.3 การแยกในพิกัดทรงกลม

ในหัวข้อที่ 1.5.1 ของบทที่ 1 เราได้แยกลาปลาเซียนออกเป็นส่วนของมุมและรัศมีตามสมการ (1.54) และ (1.55) เป็น

$$L^2\, Y(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)\, Y(\theta,\phi) \tag{5.57}$$

และ

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\, f(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] R = 0 \tag{5.58}$$

ทั้งสองสมการนี้เราจะพบในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์เสมอ ในกรณีเฉพาะเราสร้าง $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ ในลักษณะที่ทำให้เกิดลำดับเชิงตั้งฉากปรกติ แต่การสร้างดังกล่าวมักเป็นเชิงพีชคณิตเท่านั้นโดยไม่กล่าวถึงความเป็นบริบูรณ์ของ $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ แต่อย่างใด

เราอาจแยกฟังก์ชันดังกล่าวออกเป็น $Y_{\ell m}(\theta,\phi) = P_{\ell m}(\theta)\, Q_m(\phi)$ ทำให้สมการ (5.57) แยกออกเป็น ODE จำนวน 2 สมการ คือ

$$\frac{d^2Q_m}{d\phi^2} + m^2\, Q_m = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\,(1-x^2)\,\frac{dP_{\ell m}}{dx}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_{\ell m} = 0$$

โดยที่ $x = \cos\theta$ ทั้งสองสมกานี้จัดเป็นระบบสตูร์ม - ลีอูวิลล์ ดังนั้น Q_m จึงตั้งฉากกันเองและก่อให้เกิดเซตบริบูรณ์ในช่วง $[0,2\pi]$ ในทำนองเดียวกัน สำหรับค่า m ที่ตรึงใด ๆ $P_{\ell m}(x)$ ก่อให้เกิดเซตเชิงตั้งฉากบริบูรณ์ในช่วง $[-1,+1]$ ดังนั้น ผลคูณ $Y_{\ell m}(x,\phi) = P_{\ell m}(x)Q_m(\phi)$ จะก่อให้เกิดลำดับเชิงตั้งฉากบริบูรณ์ (complete orthogonal sequence) ในทรงกลมหน่วย $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$

ตัวอย่างที่ 5.4.9 ไฟฟ้าสถิต

สมการลาปลาซ $\nabla^2\,\Phi = 0$ สำหรับไฟฟ้าสถิตที่เกิดจากประจุเสรี ทำให้สมการ (5.58) ด้วยค่า $f(r) = 0$ กลายเป็น

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} R = 0$$

เมื่อคูณตลอดด้วย r^2 จะทำให้สมการนี้กลายเป็นสมการออยเลอร์ ซึ่งนำไปสู่ SOLDE ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวหลังจากที่แทน $r = e^t$ แล้วใช้กฎลูกโซ่รวมทั้งค่า $dt/dr = 1/r$ จะได้

$$\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{dR}{dt} - \ell(\ell+1)\, R = 0$$

ซึ่งมีพหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) เป็น

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - \ell(\ell+1)$$

ด้วยราก $\lambda_1 = \ell$ และ $\lambda_2 = -(\ell+1)$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปจึงมีรูปแบบ

$$R(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = A(e^t)^{\ell} + B(e^t)^{-\ell-1}$$

หรือเขียนในเทอมของ r ได้เป็น

$$R(r) = Ar^{\ell} + Br^{-\ell-1}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการลาปลาซ จึงเป็น

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (A_{\ell m} r^{\ell} + B_{\ell m} r^{-\ell-1})\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

สำหรับบริเวณที่รวมจุดกำเนิด, ความเป็นอันตะของ Φ แสดงว่า $B_{\ell m} = 0$ ดังนั้น

$$\Phi_{in}(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m}\, r^{\ell}\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

ในทำนองเดียวกัน, สำหรับบริเวณที่รวม $r \to \infty$ จะได้

$$\Phi_{out}(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell m} r^{-\ell-1}\, Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

ในการหาค่า $A_{\ell m}$ และ $B_{\ell m}$ เราต้องใช้เงื่อนไขขอบที่กำหนดให้ เช่น ถ้าเป็นทรงกลมรัศมี a ซึ่งมีศักย์ $V(\theta,\phi)$ กำหนดโดย

$$V(\theta,\phi) \equiv \Phi_{in}\ (a,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m}\ a^{\ell}\ Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

เมื่อคูณด้วย $Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi)$ แล้วอินทิเกรตทั่วมุมตัน $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ จะได้

$$A_{\ell m} = \frac{1}{a^{\ell}} \iint V(\theta,\phi)\ Y^*_{\ell m}\ (\theta,\phi)\ d\Omega$$

ในทำนองเดียวกัน,

$$B_{\ell m} = a^{\ell+1} \iint V(\theta,\phi)\ Y^*_{\ell m}\ (\theta,\phi)\ d\Omega$$

ในกรณีที่ $V(\theta,\phi)$ เป็นอิสระต่อ ϕ , องค์ประกอบ $m = 0$ เท่านั้นที่ไม่เป็นศูนย์ดังนั้น เราจึงได้

$$A_{\ell o} = \frac{2\pi}{a^{\ell}} \int_0^{\pi} \sin\theta\ V(\theta)\ Y^*_{\ell 0}\ (\theta)\ d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{a^{\ell}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \int_0^{\pi} \sin\theta\ V\ (\theta)\ P_{\ell}\ (\cos\theta)\ d\theta$$

และ
$$\Phi_{in}\ (r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\frac{2\ell+1}{2})\ A_{\ell}\ (\frac{r}{a})^{\ell}\ P_{\ell}\ (\cos\theta)$$

โดยที่
$$A_{\ell} = \int_0^{\pi} \sin\theta\ V\ (\theta)\ P_{\ell}\ (\cos\theta)\ d\theta$$

ในทำนองเดียวกัน,

$$\Phi_{out}\ (r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (\frac{2\ell+1}{2})\ A_{\ell}\ (\frac{a}{r})^{\ell+1}\ P_{\ell}\ (\cos\theta)$$

สังเกตุว่าข้อปัญหาของไฟฟ้าสถิตมีลักษณะเช่นเดียวกับข้อปัญหาการแพร่ที่สถานะคงตัว ที่เป็นเช่นนี้เพราะทั้งสองกรณีเป็นไปตามสมการลาปลาซ

ต่อไปลองพิจารณากรณีที่ยากขึ้นกว่าเดิมคือ f(r) เป็นค่าคงตัว สมการการแพร่,สมการคลื่น, และสมการชเรอดิงเงอร์สำหรับอนุภาคเสรีจะก่อให้เกิดกรณีดังกล่าวหลังจากที่เราแยกเวลาออกจากตัวแปรที่เหลืออื่น ๆ

สมการเฮล์มโฮลตซ์ คือ

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \tag{5.59}$$

และส่วนของรัศมีคือ

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + [k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}]\,R = 0 \tag{5.60}$$

ซึ่งมีผลเฉลยที่เรียกว่า **ฟังก์ชันเบสเซลเชิงทรงกลม** (spherical Bessel functions) และมักแทนด้วย $z_\ell(x)$ กำหนดโดย

$$z_\ell\,(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\frac{Z_{\ell+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}} \tag{5.61}$$

โดยที่ $Z_\upsilon(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการเบสเซลอันดับ υ

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (5.60) จึงสามารถเขียนได้เป็น

$$R_\ell(r) = Aj_\ell\,(kr) + By_\ell\,(kr)$$

ถ้าบริเวณดังกล่าวรวมจุดกำเนิดด้วย เราต้องให้ B = 0 ทำให้ผลเฉลยของสมการเฮล์มโฮลตซ์กลายเป็น

$$\psi_k(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m}\; j_\ell\,(kr)\; Y_{\ell m}\,(\theta,\phi) \tag{5.62}$$

ดรรชนีล่าง k แสดงว่า ψ เป็นผลเฉลยของสมการ (5.59) ที่มี k^2 เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 5.4.10 อนุภาคในบ่อศักย์สามมิติขนาดอนันต์

สมการชเรอดิงเลอร์ที่เป็นอิสระต่อเวลาสำหรับอนุภาคในบ่อศักย์ขนาดอนันต์ (infinite potential well) รัศมี a คือ

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\ \psi = E\psi$$

ด้วยเงื่อนไขขอบ $\psi(a,\theta,\phi) = 0$ E เป็นพลังงานของอนุภาคมวล μ สมการดังกล่าวอาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$\nabla^2\ \psi + 2\frac{\mu E}{\hbar^2}\ \psi = 0$$

ให้ $k^2 \equiv 2\mu E/\hbar^2$ ดังนั้นผลเฉลยเชิงรัศมีจึงเขียนเป็น

$$R_\ell(r) = Aj_\ell\ (kr) = Aj_\ell\ (\sqrt{2\mu E}\ r/\hbar)$$

ψ เป็นศูนย์ที่ a จะทำให้ $j_\ell(\sqrt{2\mu E}\ a/\hbar) = 0$ หรือ

$$\frac{\sqrt{2\mu E}\ a}{\hbar} = X_{\ell n}\ ,\ n = 1,2,\ldots$$

โดยที่ $X_{\ell n}$ คือค่าที่ศูนย์อันดับที่ n ของ $j_\ell(x)$ ดังนั้น พลังงานจึงเป็นควอนตัมด้วยค่า

$$E_{\ell n} = \frac{\hbar^2 X_{\ell n}^2}{2\mu a^2}\quad,\quad \ell = 0,1,\ldots;\ n = 1,2,\ldots$$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการชเรอดิงเงอร์ คือ

$$\psi\,(r,\theta,\phi) = \sum_{\substack{n=1\\ \ell=0}}^{\infty}\ \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{n\ell m}\ j_\ell\ (X_{\ell n}\ \frac{r}{a})\ Y_{\ell m}\ (\theta,\phi)$$

ประโยชน์ที่สำคัญของสมการ (5.62) คือการกระจายคลื่นระนาบในเทอมของฟังก์ชันเบสเซลเชิงทรงกลม เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่าถ้า k เป็นเวกเตอร์โดยที่ k.k เท่ากับ k^2 ในสมการ (5.59) ดังนั้น $e^{ik.r}$ จะเป็นผลเฉลยของ (5.59) ทำให้ $e^{ik.r}$ สามารถกระจายดังเช่นสมการ (5.62)

สมมติว่า **k** อยู่ในแนวนอนแกน z, เราได้ **k.r** = kr cos θ ที่เป็นอิสระต่อ φ เทอมที่มี m = 0 เท่านั้นในสมการ (5.62) ที่ใช้ได้ในกรณีนี้ ดังนั้นเราอาจเขียน

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell \ j_\ell\ (kr)\ P_\ell\ (\cos\theta)$$

เนื่องจาก $A_\ell = i^\ell\ (2\ell+1)$ ดังนั้นเราจึงได้

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\ i^\ell\ \ j_\ell(kr)\ P_\ell\ (\cos\theta) \tag{5.63}$$

สำหรับเวกเตอร์ **k** ในทิศทางใด ๆ , **k.r** = krcos γ โดยที่ γ เป็นมุมระหว่าง **k** และ **r**, เราอาจเขียน

$$e^{i\mathbf{k.r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\ i^\ell\ \ j_\ell\ (kr),\ P_\ell\ (\cos\gamma)$$

เมื่อใช้ทฤษฎีการบวกสำหรับ spherical harmonics คือ สมการ (1.81) หรือ

$$P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}\ (\theta',\phi')\ Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

เราจึงได้

$$e^{i\mathbf{k.r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty}\ \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell j_\ell(kr)\ Y^*_{\ell m}\ (\theta',\phi')\ Y_{\ell m}(\theta,\phi) \tag{5.64}$$

โดยที่ θ' และ φ' เป็นมุมของ **k** และ θ และ φ เป็นมุมของ **r**

การแยกคลื่นระนาบออกเป็นองค์ประกอบด้วยโมเมนตัมเชิงมุมออร์บิทัลที่จำกัดเขตนี้มีประโยชน์มากเมื่อเราศึกษาทฤษฎีการกระเจิงสำหรับคลื่นและอนุภาค

แบบฝึกหัดบทที่ 5

1. ผิวด้านข้างของโลหะรูปทรงกระบอกยาวมากรัศมี 10 cm จะมีอุณหภูมิตรึงที่ 100°C เมื่อตอนเริ่มต้นทรงกระบอกมีอุณหภูมิสม่ำเสมอที่ 500°C จงคำนวณค่าอุณหภูมิที่ศูนย์กลางของทรงกระบอกและอัตราการสูญเสียความร้อนในหน่วย cal/cm.sec (ต่อหน่วยความยาว) ที่เวลา t = 4 min.

2. คลื่นเสียงเกิดขึ้นภายในโพรงทรงกลม (spherical cavity) รัศมี a จงหารูปแบบของคลื่นนิ่งภายในโพรงและความถี่ของคลื่นนิ่งนั้น

3. ทรงกลมตันรัศมี b มีอุณหภูมิเริ่มต้นที่ $u = u_0(r)$ และอุณหภูมิลดลงที่ผิวซึ่งเป็นไปตามกฎการเย็นตัวของนิวตันคือ $\frac{\partial u}{\partial r} + h(u - u_1)\big|_{r=b} = 0$ โดยที่ h เป็นค่าคงตัวและ u_1 เป็นอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม จงหาค่าอุณหภูมิภายในทรงกลมนี้
(ตอบ : $u(r,t) = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin k_n r}{k_n r} e^{-a^2 k_n^2 t}$ $\quad , n = 1,3,5,\ldots$

$$A_n = 4k_n^3 \int_o^b [u_0(r) - u_1] r^2 j_o(k_n r) dr \,/\, (2k_n b - \sin 2k_n b))$$

4. ทรงกระบอกแข็งรัศมี b ยาว L ที่ฐานของกระบอกมีอุณหภูมิตรึงที่ศูนย์องศา ในขณะที่ผิวด้านข้างมีอุณหภูมิตรึงที่ u_1 จงหาการกระจายอุณหภูมิภายในทรงกระบอกนี้
(ตอบ : $u(r,\theta,z) = \frac{4u_1}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n} \frac{I_o(n\pi r/L)\sin(n\pi z/L)}{I_o(n\pi b/L)}$)

5. จงคำนวณหาศักย์ความโน้มถ่วง (*gravitational potential*) ที่ตำแหน่งใด ๆ ในปริภูมิ อันเนื่องจากวงแหวนของสสาร (uniform ring of matter) รัศมี a และมวล M .

6. แผ่นเยื่อบางรูปสี่เหลี่ยมขนาด a และ b ถูกขึงตึงที่ปลายขอบทั้งสี่ด้าน จงหาการเคลื่อนที่ $u = u(x,y,t)$ ในเทอมของโมดต่าง ๆ ของการสั่น
(ตอบ : $u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn}\cos w_{mn}t + B_{mn}\sin w_{mn}t)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_o^a \int_o^b u_o(x,y)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dxdy$$

$$B_{mn} = \frac{4}{abw_{mn}} \int_o^a \int_o^b v_o(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dxdy$$

$$u_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right))$$

7. จงหาอุณหภูมิสถานะคงที่ภายในทรงกลมรัศมีเท่ากับ 1 เมื่อผิวด้านบนถูกตรึงที่อุณหภูมิ 100° และผิวด้านล่างถูกตรึงที่ 0°

(ตอบ :

$$u = 100\left[\frac{1}{2} P_o(\cos\theta) + \frac{3}{4} r P_1(\cos\theta) - \frac{7}{16} r^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{32} r^5 P_5(\cos\theta) + \cdots\right])$$

บทที่ 6
รูปแบบของสมการและผลเฉลยที่สำคัญ

6.1 สมการเลอจองด์

สมการเลอจองด์ (Legendre's equation) มีรูปแบบ

$$(1-z^2)\,y''-2zy'+\ell(\ell+1)y=0 \tag{6.1}$$

ซึ่งมักปรากฏในฟิสิกส์สาขาต่าง ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในปัญหาเกี่ยวกับสมมาตรรอบแกน (axial symmetry) เมื่อเราพิจารณาในพิกัดทรงกลม โดยปรกติตัวแปร z ในสมการเลอจองด์คือ cosine ของมุมเชิงขั้ว θ ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง $-1\le z\le 1$. พารามิเตอร์ ℓ เป็นเลขจริง และผลเฉลยของสมการ (6.1) เรียกว่า ฟังก์ชันเลอจองด์ (Legendre function)

เราคาดว่าผลเฉลยของสมการ (6.1) มีรูปแบบ $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ และเมื่อแทนค่าลงไปในสมการจะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n-1)a_n z^{n-2}-n(n-1)a_n z^n-2na_n z^n+\ell(\ell+1)a_n z^n\right]=0$$

หรือ $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)a_{n+2}-\left[n(n+1)-\ell(\ell+1)\right]a_n\right\}z^n=0$

ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) จึงเป็น

$$a_{n+2}=\frac{\left[n(n+1)-\ell(\ell+1)\right]}{(n+1)(n+2)}a_n \tag{6.2}$$

โดยที่ $n=0,1,2,\ldots$ ถ้าเราเลือก $a_0=1$ และ $a_1=0$ เราจะได้ผลเฉลยเป็น

$$y_1(z)=1-\ell(\ell+1)\frac{z^2}{2!}+(\ell-2)\ell(\ell+1)(\ell+3)\frac{z^4}{4!}-\ldots \tag{6.3}$$

แต่ถ้าเราเลือก $a_0=0$ และ $a_1=1$ เราจะได้ผลเฉลยในรูปแบบที่สองเป็น

$$y_2(z) = z - (\ell-1)(\ell+2)\frac{z^3}{3!} + (\ell-3)(\ell-1)(\ell+2)(\ell+4)\frac{z^5}{5!} - \dots \qquad (6.4)$$

เมื่อเราใช้การทดสอบด้วยอัตราส่วน *(ratio test)* กับอนุกรมเหล่านี้ จะพบว่าทั้งสองอนุกรมลู่เข้า (converge) สำหรับ $|z|<1$ ดังนี้ รัศมีของการลู่เข้าจึงเป็น 1, ซึ่งเป็นระยะไปยังจุดเอกฐานที่ใกล้ที่สุดของสมการ เนื่องจากสมการ (6.3) มีแต่ค่า z ที่ยกกำลังเป็นเลขคู่เท่านั้น และสมการ (6.4) มีแต่ค่า z ที่ยกกำลังเป็นเลขคี่เท่านั้น, **ผลเฉลยทั้งสองจึงไม่อาจเป็นสัดส่วนระหว่างกันได้แต่เป็นอิสระต่อกัน** ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (6.1) จึงมีรูปแบบ $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ สำหรับ $|z|<1$.

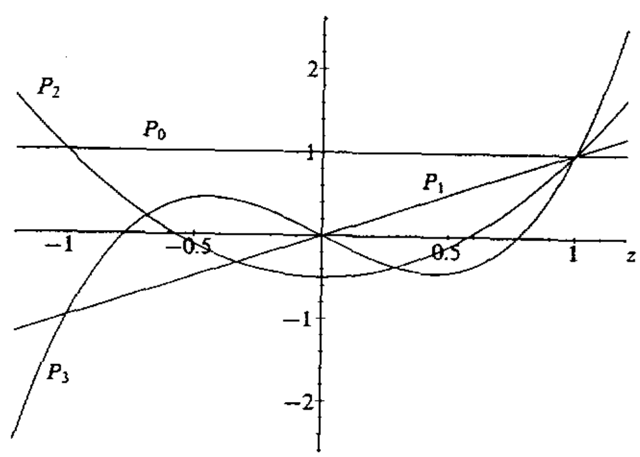
6.1.1 ผลเฉลยทั่วไปสำหรับเลขจำนวนเต็ม ℓ

ถ้า ℓ ในสมการ (6.1) เป็นเลขจำนวนเต็ม หรือ $\ell = 0,1,2,\dots$ ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิดตามสมการ (6.2) จะกลายเป็น

$$a_{\ell+2} = \frac{\left[\ell(\ell+1) - \ell(\ell+1)\right]}{(\ell+1)(\ell+2)} a_\ell = 0$$

ซึ่งทำให้อนุกรมมีจุดสิ้นสุด (terminates) และเราได้ผลเฉลยพหุนามอันดับ ℓ. ผลเฉลยนี้มีลักษณะปรกติ *(normalized)* และเรียกว่า พหุนามเลอจองด์ *(Legendre polynomial)* อันดับ ℓ, ซึ่งแทนด้วย $P_\ell(z)$ และใช้ได้สำหรับทุกค่าของ z. ความเป็นปรกติของ $P_\ell(z)$ ทำให้ $P_\ell(1)=1$ และผลก็คือ $P_\ell(-1) = (-1)^\ell$. พหุนามเลอจองด์ค่าต้น ๆ คือ

$P_0(z) = 1$	$P_1(z) = z$
$P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$	$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$
$P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3)$	$P_5(z) = \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z)$



พหุนามเลอจองด์ 4 ค่าแรกแสดงได้ด้วยรูปข้างต้น

ไม่ว่าเลขจำนวนเต็ม ℓ จะเป็นเลขคู่หรือคี่, ทั้ง y_1 หรือ y_2 จะมีการสิ้นสุดและให้พหุคูณของพหุนามเลอจองด์ $P_\ell(z)$ ที่สมนัยกัน ในทั้งสองกรณี, อนุกรมอื่น ๆ จะไม่มีการสิ้นสุดและลู่เข้าสำหรับ $|z|<1$ เท่านั้น ไม่ว่า ℓ จะเป็นเลขคู่หรือคี่, เรานิยาม **ฟังก์ชันเลอจองด์ชนิดที่สอง** (Legendre function of the second kind), $Q_\ell(z)=\alpha_\ell y_2(z)$ หรือ $Q_\ell(z)=\beta_\ell y_1(z)$ ตามลำดับ, โดยที่ค่าคงตัว α_ℓ และ β_ℓ มีค่า

$$\alpha_\ell=\frac{(-1)^{\ell/2}2^\ell\left[(\ell/2)!\right]^2}{\ell!} \qquad \text{สำหรับ } \ell \text{ เป็นเลขคู่} \tag{6.5}$$

$$\beta_\ell=\frac{(-1)^{(\ell+1)/2}2^{\ell-1}\left\{\left[(\ell-1)/2\right]!\right\}^2}{\ell!} \qquad \text{สำหรับ } \ell \text{ เป็นเลขคี่} \tag{6.6}$$

แฟกเตอร์ความเป็นปรกติเหล่านี้ จะถูกเลือกโดยให้ $Q_\ell(z)$ เป็นไปตามความสัมพันธ์เวียนเกิดเช่นเดียวกับ $P_\ell(z)$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเลอจองด์สำหรับเลขจำนวนเต็ม ℓ จึงเป็น

$$y(z)=c_1P_\ell(z)+c_2Q_\ell(z) \tag{6.7}$$

โดยที่ $P_\ell(z)$ เป็นพหุนามอันดับ ℓ ซึ่งลู่เข้าสำหรับทุกค่าของ z, และ $Q_\ell(z)$ เป็นอนุกรมอนันต์ซึ่งลู่เข้าสำหรับ $|z|<1$ เท่านั้น (ความจริงจะมีความเป็นไปได้ที่จะหาผลเฉลยที่สองในเทอมของอนุกรมอนันต์ด้วยกำลังค่าลบ ซึ่งจะมีขนาดจำกัดสำหรับ $|z|>1$) $Q_\ell(z)$ สองค่าแรกคือ

$$Q_0(z)=\tfrac{1}{2}\ell n\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad , \qquad Q_1(z)=\tfrac{1}{2}z\ell n\left(\frac{1+z}{1-z}\right)-1$$

รูปแบบปิดสำหรับ $Q_\ell(z)$ อันดับอื่น ๆ อาจหาได้โดยใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิด ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป

6.1.2 สมบัติของพหุนามเลอจองด์

ดังได้กล่าวแล้วว่าเมื่อเราเกี่ยวข้องกับปัญหาทางฟิสิกส์, ตัวแปร z ในสมการเลอจองด์มักเป็นโคไซน์ของมุมเชิงขั้ว θ ในพิกัดเชิงทรงกลม และเราต้องการผลเฉลย $y(z)$ เป็นปรกติ (regular) ที่ $z=\pm 1$ ซึ่งสมนัยกับ $\theta=0$ หรือ $\theta=\pi$ เพื่อให้เป็นไปตามที่เราต้องการเราต้องให้สมการมีผลเฉลยเป็นพหุนามและ ℓ ต้องเป็นเลขจำนวนเต็ม นอกจากนี้ เราต้องให้สัมประสิทธิ์ c_2

ของฟังก์ชัน $Q_\ell(z)$ ในสมการ (6.7) เท่ากับศูนย์ เพราะ $Q_\ell(z)$ เอกฐานที่ $z=\pm 1$, และผลเฉลย เป็นพหุคูณของพหุนามเลอจองด์ $P_\ell(z)$. ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาสมบัติของ $P_\ell(z)$ สักเล็กน้อย

สูตรโรดริกส์

เพื่อที่จะศึกษาสมบัติของพหุนามเลอจองด์ เราจะใช้สูตรโรดริกส์ (Rodrigues' formula) สำหรับ $P_\ell(z)$ คือ

$$P_\ell(z)=\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dz^\ell}(z^2-1)^\ell \tag{6.8}$$

เพื่อที่จะพิสูจน์สมการ (6.8) เราให้ $u=(z^2-1)^\ell$ ดังนั้น $u'=2\ell z(z^2-1)^{\ell-1}$ และ

$$(z^2-1)u'-2\ell zu=0$$

อนุพันธ์ของสมการนี้ $(\ell+1)$ ครั้ง แล้วใช้ทฤษฎีบทไลบ์นิตซ์ (Leibnitz's theorem) ได้

$$[(z^2-1)u^{(\ell+2)}+2z(\ell+1)u^{(\ell+1)}+\ell(\ell+1)u^{(\ell)}]-2\ell[zu^{(\ell+1)}+(\ell+1)u^{(\ell)}]=0$$

หรือ $(z^2-1)u^{(\ell+2)}+2zu^{(\ell+1)}-\ell(\ell+1)u^{(\ell)}=0$

เมื่อเปลี่ยนเครื่องหมายโดยตลอดแล้วเปรียบเทียบกับสมการเลอจองด์ (6.1) จะเห็นได้ว่า $u^{(\ell)}$ สอดคล้องกับสมการเดียวกันของ $P_\ell(z)$ ดังนั้น

$$u^{(\ell)}(z)=c_\ell P_\ell(z)$$

สำหรับค่าคงตัว c_ℓ ซึ่งขึ้นกับ ℓ. เพื่อที่จะหาค่า c_ℓ ให้สังเกตว่าเทอมในสมการสำหรับอนุพันธ์อันดับ ℓ ของ $(z^2-1)^\ell$ เท่านั้นที่ไม่มีแฟกเตอร์ z^2-1, ดังนั้นจึงไม่เป็นศูนย์ที่ $z=1$, คือ $(2z)^\ell \ell!(z^2-1)^0$. ให้ $z=1$ ในสมการของ $u^{(\ell)}$ ทำให้ $c_\ell=2^\ell \ell!$, ดังนั้นจึงเป็นการพิสูจน์สมการ (6.8)

เราสามารถใช้สูตรโรดริกส์หาค่าอินทิเกรตของพหุนามเลอจองด์ ในกรณี $\ell=0$ อาจมีความซับซ้อน แต่เราจะพิจารณากรณี $\ell\ge 1$. อินทิเกรตของพหุนามเลอจองด์อันดับเดียวกันคือ

$$I_\ell=\int_{-1}^{1}P_\ell(z)P_\ell(z)dz$$

$$=\frac{1}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^\ell(z^2-1)^\ell}{dz^\ell}\right]\left[\frac{d^\ell(z^2-1)^\ell}{dz^\ell}\right]dz$$

การหาปริพันธ์โดยแยกส่วนโดยเทอมค่าขอบทุกเทอมเป็นศูนย์จะได้

$$I_\ell = \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}(z^2-1)^\ell \frac{d^{2\ell}}{dz^{2\ell}}(z^2-1)^\ell dz$$

$$= \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell!)^2}\int_{-1}^{1}(1-z^2)^\ell dz$$

ถ้าให้ $K_\ell = \int_{-1}^{1}(1-z^2)^\ell dz$

แล้วอินทิเกรตแยกส่วน โดยให้แฟกเตอร์ 1 เป็นส่วนที่สองจะได้

$$K_\ell = \int_{-1}^{1}2\ell z^2(1-z^2)^{\ell-1}dz \qquad \text{ให้ } 2\ell z^2 = 2\ell - 2\ell(1-z^2)$$

$$= 2\ell\int_{-1}^{1}(1-z^2)^{\ell-1}dz - 2\ell\int_{-1}^{1}(1-z^2)^\ell dz$$

$$= 2\ell K_{\ell-1} - 2\ell K_\ell$$

$\therefore$ จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด $(2\ell+1)K_\ell = 2\ell K_{\ell-1}$

และ $K_\ell = \frac{2\ell}{2\ell+1}\frac{2\ell-2}{2\ell-1}\dots\frac{2}{3}K_0 \quad = 2^\ell \ell!\frac{2^\ell \ell!}{(2\ell+1)!}2$

$$= \frac{2^{2\ell+1}(\ell!)^2}{(2\ell+1)!}$$

แทนค่า K_ℓ ลงในสมการของ I_ℓ จะได้

$$I_\ell = \int_{-1}^{1}P_\ell(z)P_\ell(z)dz = \frac{2}{2\ell+1} \qquad (6.9)$$

ซึ่งเป็นสมบัติเชิงความเป็นปรกติของ $P_\ell(z)$

สมบัติเชิงตั้งฉากร่วมกันของพหุนามเลอจองด์

สมบัติเชิงตั้งฉากร่วมกัน (mutual orthogonality) ของ $P_\ell(z)$ คือ

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(z) P_k(z) dz = 0 \qquad \ell \neq k \tag{6.10}$$

หรือกล่าวว่าพหุนามเลอจองด์ form a complete orthogonal set on (-1,1) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้ เนื่องจาก $P_\ell(z)$ สอดคล้องกับสมการเลอจองด์ เราอาจเขียน

$$[(1-z^2)P_\ell']' + \ell(\ell+1)P_\ell = 0 \qquad , \qquad P_\ell' = \frac{dP_\ell}{dz}$$

คูณตลอดด้วย P_k แล้วอินทิเกรตจาก $z=-1$ ถึง $z=1$ จะได้

$$\int_{-1}^{1} P_k [(1-z^2)P_\ell']' dz + \int_{-1}^{1} P_k \ell(\ell+1) P_\ell dz = 0$$

อินทิเกรตแยกส่วนสำหรับเทอมแรก และเนื่องจากที่ลิมิตทั้งสองทำให้เทอมทุกเทอมเป็นศูนย์เพราะแฟกเตอร์ $1-z^2$ ดังนั้น

$$-\int_{-1}^{1} P_k'(1-z^2)P_\ell' dz + \int_{-1}^{1} P_k \ell(\ell+1) P_\ell dz = 0$$

เมื่อสลับที่ ℓ และ k แล้วนำเทอมเหล่านั้นมาลบกัน จะให้

$$[k(k+1) - \ell(\ell+1)] \int_{-1}^{1} P_k P_\ell dz = 0$$

เนื่องจาก $k \neq \ell$ ดังนั้นเราจึงได้สมการ (6.10)
ในกรณีพิเศษ, ถ้าให้ $k = 0$

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1} P_\ell(z) dz = 0 \qquad \ell \neq 0 \tag{6.11}$$

สมบัติเชิงตั้งฉากกันเองของ $P_\ell(z)$ หมายถึง ฟังก์ชัน $f(z)$ ใด ๆ สามารถกระจายในช่วง $|z|<1$ ในเทอมของผลรวมถึงอนันต์ของพหุนามเลอจองด์

$$f(z)=\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell P_\ell(z) \tag{6.12}$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ a_ℓ กำหนดโดย

$$a_\ell=\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1} f(z)P_\ell(z)dz \tag{6.13}$$

ซึ่งอาจพิสูจน์ได้โดยง่ายโดยคูณสมการ (6.12) ด้วย $P_m(z)$ แล้วอินทิเกรตจาก $z=-1$ ถึง $z=1$ จะได้

$$\int_{-1}^{1} P_m(z)f(z)dz=\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \int_{-1}^{1} P_m(z)P_\ell(z)dz$$

$$=a_m\int_{-1}^{1} P_m(z)P_m(z)dz=\frac{2a_m}{2m+1}$$

ซึ่งจะให้สมการ (6.13) โดยให้ $m=\ell$.

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับพหุนามเลอจองด์

ฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function) สำหรับอนุกรมของฟังก์ชัน $f_n(z)$ โดยที่ $n=0,1,2,\ldots$ เป็นฟังก์ชัน $G(z,h)$ ซึ่งมีตัวแปร h เช่นเดียวกับตัวแปร z โดยที่

$$G(z,h)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)h^n$$

นั่นคือ $f_n(z)$ เป็นสัมประสิทธิ์ของ h^n ในการกระจาย G ในรูปกำลังของ h

สำหรับการศึกษาพหุนามเลอจองด์ เราลองพิจารณาฟังก์ชัน $P_n(z)$ ซึ่งนิยามโดยสมการ

$$G(z,h)=(1-2zh+h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)h^n \tag{6.14}$$

ฟังก์ชันที่นิยามแบบนี้จะเหมือนกันทุกประการกับพหุนามเลอจองด์ และฟังก์ชัน $(1-2zh+h^2)^{-1/2}$ ก็คือฟังก์ชันก่อกำเนิดของมัน

ให้ $P_n' = \dfrac{dP_n(z)}{dz}$, อนุพันธ์ของสมการ (6.14) เทียบกับ z คือ

$$h(1-2zh+h^2)^{-3/2} \;=\; \sum P_n' h^n \tag{6.15}$$

และอนุพันธ์ของสมการ (6.14) เทียบกับ h คือ

$$(z-h)(1-2zh+h^2)^{-3/2} \;=\; \sum nP_n h^{n-1} \tag{6.16}$$

สมการ (6.15ป สามารถเขียนโดยใช้สมการ (6.14) เป็น

$$h\sum P_n h^n \;=\; (1-2zh+h^2)\sum P_n' h^n$$

และเมื่อเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของ h^{n+1} เราจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$P_n \;=\; P_{n+1}' - 2zP_n' + P_{N-1}' \tag{6.17}$$

สมการ (6.15) และ (6.16) สามารถรวมเข้าด้วยกันเป็น

$$(z-h)\sum P_n' h^n \;=\; h\sum nP_n h^{n-1}$$

และสัมประสิทธิ์ของ h^n จะให้ความสัมพันธ์เวียนเกิดชนิดที่สองคือ

$$zP_n' - P_{n-1}' \;=\; nP_n \tag{6.18}$$

เมื่อกำจัด P_{n-1}' ระหว่าง (6.17) และ (6.18) จะให้ผลคือ

$$(n+1)P_n \;=\; P_{n+1}' - zP_n' \tag{6.19}$$

แทน n ด้วย $n-1$ ในสมการ (6.19) แล้วบวก z คูณ (6.18) เข้าไปจะได้

$$(1-z^2)P_n' = n(P_{n-1} - zP_n)$$

แล้วหาอนุพันธ์ของทั้งสองข้างเทียบกับ z แล้วใช้สมการ (6.18) อีกครั้งจะได้

$$\begin{aligned}(1-z^2)P_n'' - 2zP_n' &= n[(P_{n-1}' - zP_n') - P_n] \\ &= n(-nP_n - P_n) \\ &= -n(n+1)P_n\end{aligned}$$

ดังนั้น P_n ที่นิยามโดยสมการ (6.14) จึงสอดคล้องกับสมการเลอจองด์ แต่เราต้องพิสูจน์ความเป็นปรกติด้วย ซึ่งทำได้ง่ายที่ $z=1$ เมื่อ G กลายเป็น

$$G(1,h) = [(1-h)^2]^{-1/2} = 1 + h + h^2 + \dots$$

ดังนั้นทุก P_n จะมี $P_n(1) = 1$ ตามต้องการ ความสัมพันธ์เวียนเกิดอื่น ๆ ก็สามารถหาได้จากที่หาได้ข้างต้น เช่น ถ้าแทนค่าสมการ (6.14) ลงใน (6.16) จะได้

$$(z-h)\sum P_n h^n = (1-2zh+h^2)\sum nP_n h^{n-1}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของ h^n จะได้

$$zP_n - P_{n-1} = (n+1)P_{n+1} - 2znP_n + (n-1)P_{n-1}$$

และเมื่อเขียนใหม่จะได้

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)zP_n + nP_{n-1} = 0 \tag{6.20}$$

อีกประโยชน์หนึ่งของฟังก์ชันก่อกำเนิด (6.14) คือ การแทนส่วนกลับของระยะระหว่างสองจุดในปริภูมิ 3 มิติในเทอมของพหุนามเลอจองด์ ถ้าทั้งสองจุด $\bar{r}$ และ $\bar{r}'$ คือ ระยะ r และ r' จากจุดกำเนิดตามลำดับ โดย $r' < r$ ดังนั้น

$$\frac{1}{|\bar{r} - \bar{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{r\left[1-2(\frac{r'}{r})\cos\theta + (\frac{r'}{r})^2\right]^{1/2}} \qquad \begin{array}{l} z=\cos\theta \\ h=\frac{r'}{r} \end{array}$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}(\tfrac{r'}{r})^{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) \tag{6.21}$$

โดยที่ θ คือมุมระหว่างจุด $\bar{r}$ *and* $\bar{r}'$ ถ้า $r' > r$ ดังนั้น r และ r' จะต้องสลับที่กันใน (6.21) หรืออนุกรมจะไม่ลู่เข้า

6.2 สมการเลอจองด์สมทบ

สมการเลอจองด์สมทบ (associated Legendre equation) มีรูปแบบ

$$[(1-z^2)y']' + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right]y = 0 \tag{6.22}$$

ซึ่งจะกลายเป็นสมการเลอจองด์เมื่อ $m=0$ การใช้ประโยชน์ในทางฟิสิกส์ $-\ell \le m \le \ell$ และ m ถูกจำกัดเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ถ้า $y(z)$ เป็นผลเฉลยของสมการเลอจองด์ ดังนั้น

$$w(z) = (1-z^2)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}y}{dz^{|m|}}$$

จะเป็นผลเฉลยของสมการเลอจองด์สมทบ ผลเฉลยของสมการเลอจองด์สมทบที่เป็นปรกติสำหรับทุกค่าของ x เรียกว่า **ฟังก์ชันเลอจองด์สมทบ** (associated Legendre functions) ซึ่งเขียนเป็น

$$P_{\ell}^{m}(z) = (1-z^2)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}P_{\ell}}{dz^{|m|}}$$

โดยที่ $P_{\ell}^{m}(x)=0$ สำหรับ $m>\ell$. $P_{\ell}^{m}(x)$ จะตั้งฉากร่วมกันในช่วง $-1\le x\le 1$ และมีสมบัติความเป็นปรกติด้วย จึงมักรวมกันเป็นสมการเดียวคือ

$$\int_{-1}^{1}P_{\ell}^{m}(z)P_{k}^{m}(z)dz = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell k}$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ $P_{\ell}^{m}(x)$ คือ

$$G(z,h) \;=\; \frac{(2m)!\,(1-z^2)^{m/2}}{2^m\, m!\,(1-2hz+h^2)^{m+1/2}} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+m}^{m}(z)h^n$$

สมการเลอจองด์สมทบเกิดขึ้นในปัญหาทางฟิสิกส์ ซึ่งมีการขึ้นกับมุมภาคทิศ (azimuthal angle), ϕ, ในรูปแบบ $e^{im\phi}$ หรือ $\cos m\phi$

6.3 สมการเบสเซล

สมการเบสเซล (Bessel's equation) เกิดจากปัญหาเชิงฟิสิกส์ที่คล้ายกับกรณีสมการเลอจองด์ แต่มักเกิดกับการใช้พิกัดทรงกระบอกแทนที่จะเป็นพิกัดเชิงทรงกลม สมการเบสเซลมีรูปแบบ

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - \upsilon^2)y \;=\; 0 \tag{6.23}$$

โดยที่พารามิเตอร์ υ เป็นตัวเลขที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์, z มักเป็นพหุคูณของระยะเชิงรัศมี ซึ่งมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง ∞

สมการ (6.23) อาจเขียนในรูปแบบมาตรฐานได้เป็น

$$y'' + \frac{1}{z}y' + (1-\frac{\upsilon^2}{z^2})y \;=\; 0 \tag{6.24}$$

ตำแหน่งที่ $z=0$ เป็นจุดเอกฐาน ดังนั้น เราจึงลองให้ผลเฉลยมีรูปแบบเป็น $y = z^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, เมื่อแทนค่าลงในสมการ (6.24) แล้วคูณสมการที่ได้ด้วย z^{2-m} จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(m+n)(m+n-1)+(m+n)-\upsilon^2]a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+2} \;=\; 0$$

หรือ $$\sum_{n=0}^{\infty}[(m+n)^2-\upsilon^2]a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+2} \;=\; 0$$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ของ z^0 เราจะได้ **indicial equation**

$$m^2 - \upsilon^2 \;=\; 0 \qquad \text{หรือ} \qquad m \;=\; \pm\upsilon$$

สำหรับสัมประสิทธิ์ของกำลังอื่น ๆ ของ z คือ

$$[(m+1)^2 - \upsilon^2]a_1 \;=\; 0 \qquad (6.25)$$

$$[(m+n)^2 - \upsilon^2]a_n + a_{n-2} \;=\; 0 \qquad ,n \geq 2 \qquad (6.26)$$

แทนค่า $m = \pm\upsilon$ ลงใน (6.25) และ (6.26) เราจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$(1 \pm 2\upsilon)a_1 \;=\; 0$$

$$n(n \pm 2\upsilon)a_n + a_{n-2} \;=\; 0 \qquad ,n \geq 2$$

เราจะแยกพิจารณาผลเฉลยของสมการเบสเซล (6.23) ออกเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่ υ เป็นเลขจำนวนเต็ม (ซึ่งรวมศูนย์ด้วย) และกรณีไม่ใช่เลขจำนวนเต็ม

6.3.1 ผลเฉลยทั่วไปสำหรับ υ ที่ไม่เป็นเลขจำนวนเต็ม

ถ้า υ ไม่ใช่เลขจำนวนเต็ม ดังนั้นโดยทั่วไปรากทั้งสองของ indicial equation คือ $m_1 = \upsilon$ และ $m_2 = -\upsilon$ จะไม่แตกต่างกันเป็นเลขจำนวนเต็มและเราจะได้ผลเฉลย 2 ค่าที่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกันในรูปแบบของ**อนุกรมโฟรเบนิอุส** (Frobenius series) กรณีพิเศษเกิดขึ้นเมื่อ $\upsilon = \dfrac{\ell}{2}$ สำหรับ $\ell = 1,3,5,\ldots$ และ $m_1 - m_2 = 2\upsilon = \ell$ เป็นเลขจำนวนเต็มเลขคี่ค่าบวก ในกรณีเช่นนี้ เราจะได้ผลเฉลยในรูปแบบของอนุกรมโฟรเบนิอุสที่สมนัยกับรากที่มากกว่า $m_1 = \upsilon = \dfrac{\ell}{2}$ สำหรับรากที่น้อยกว่า $m_2 = -\upsilon = -\dfrac{\ell}{2}$ เราต้องกำหนดว่าผลเฉลยอนุกรมโฟรเบนิอุสเป็นไปได้หรือไม่ โดยตรวจสอบจากความสัมพันธ์เวียนเกิด (6.26) คือ

$$n(n-\ell)a_n + a_{n-2} \;=\; 0 \qquad ,n \geq 2$$

เนื่องจาก ℓ เป็นเลขคี่จำนวนเต็มค่าบวก เราใช้ความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้โดยเริ่มจาก $a_0 \neq 0$ คำนวณหา $a_2, a_4, a_6, \ldots$ โดยเทอมเหล่านี้ต้องมีค่าจำกัด ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่เราจะได้ผลเฉลยที่สองในรูปแบบของอนุกรมโฟรเบนิอุสที่สมนัยกับรากที่น้อยกว่า m_2

โดยทั่วไป υ ซึ่งไม่ใช่เลขจำนวนเต็ม, เราได้จากสมการ (6.25) และ (6.26) ว่า

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{n(n \pm 2\upsilon)} a_{n-2} \qquad , \qquad n = 2,4,6,\ldots \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; , \qquad n = 1,3,5,\ldots \end{aligned}$$

ให้ $a_0 = 1$ ในแต่ละกรณี เราได้ผลเฉลย 2 ค่าเป็น

$$y_{\pm\upsilon}(z) = z^{\pm\upsilon}\left[1 - \frac{z^2}{2(2\pm 2\upsilon)} + \frac{z^4}{2\times 4(2\pm 2\upsilon)(4\pm 2\upsilon)} - \cdots\right]$$

ให้ $$a_0 = \frac{1}{2^{\pm\upsilon}\Gamma(1\pm\upsilon)}$$

โดยที่ $\Gamma(x)$ คือ gamma function ผลเฉลยของ (6.23) จึงเขียนเป็น $J_\upsilon(z)$ และ $J_{-\upsilon}(z)$ โดยที่

$$J_\upsilon(z) = \frac{1}{\Gamma(\upsilon+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon}\left[1 - \frac{1}{\upsilon+1}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{(\upsilon+1)(\upsilon+2)}\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^4 - \cdots\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\upsilon+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon+2n} \qquad (6.27)$$

และแทน υ ด้วย $-\upsilon$ จะให้ $J_{-\upsilon}(z)$. ฟังก์ชัน $J_\upsilon(z)$ และ $J_{-\upsilon}(z)$ เรียกว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง, อันดับ** υ (Bessel function of the first kind, of order υ) เนื่องจากเทอมแรกของแต่ละอนุกรมเป็นพหุคูณของ z^{υ} และ $z^{-\upsilon}$ ตามลำดับ, ถ้า υ ไม่ใช่เลขจำนวนเต็ม $J_\upsilon(z)$ และ $J_{-\upsilon}(z)$ จึงเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ดังนั้น สำหรับ υ ที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม, ผลเฉลยทั่วไปของสมการเบสเซล คือ

$$y(z) = c_1 J_\upsilon(z) + c_2 J_{-\upsilon}(z) \qquad (6.28)$$

เช่น เราจะหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเบสเซล

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - \tfrac{1}{4})y = 0$$

ด้วยค่า $\upsilon = \frac{1}{2}$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y(z) = c_1 J_{1/2}(z) + c_2 J_{-1/2}(z)$$

แต่ฟังก์ชันเบสเซลด้วยอันดับที่เป็นเลขกึ่งจำนวนเต็มสามารถเขียนในเทอมของฟังก์'
ดังนี้ จากสมการ (6.27)

$$J_{\pm\frac{1}{2}}(z) = z^{\pm\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n\pm\frac{1}{2}}\ n!\Gamma(1+n\pm\frac{1}{2})}$$

เนื่องจาก $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ และ $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$\therefore\ J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{(z/2)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \frac{(z/2)^{\frac{5}{2}}}{1!\Gamma(\frac{5}{2})} + \frac{(z/2)^{\frac{9}{2}}}{2!\Gamma(\frac{7}{2})} - \cdots$$

$$= \frac{(z/2)^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} - \frac{(z/2)^{\frac{5}{2}}}{1!(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} + \frac{(z/2)^{\frac{9}{2}}}{2!(\frac{5}{2})(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} - \cdots$$

$$= \frac{(z/2)^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \frac{(z/2)^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sin z}{z}$$

$$\therefore\ J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi z}}\sin z.$$

และสำหรับ $\upsilon = -\frac{1}{2}$ เราได้

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \frac{(z/2)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{(z/2)^{\frac{3}{2}}}{1!\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{(z/2)^{\frac{7}{2}}}{2!\Gamma(\frac{5}{2})} - \cdots$$

$$= \frac{(z/2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right)$$

$$\therefore\ J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi z}}\cos z$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเบสเซลนี้คือ

$$y(z) = c_1\sqrt{\tfrac{2}{\pi z}}\sin z + c_2\sqrt{\tfrac{2}{\pi z}}\cos z$$

เนื่องจาก z ในสมการเบสเซลมักเป็นพหุคูณของรัศมีซึ่งมีค่าในช่วง $0 \le z \le \infty$ เราจึงคิดว่าผลเฉลยเป็นปรกติที่ $z = 0$ แต่จากสมการ (6.27) จะเห็นว่า $J_{-\upsilon}(z)$ เป็นเอกฐานที่จุดกำเนิด (υ ต้องไม่เป็นลบ) ในกรณีเช่นนี้ สัมประสิทธิ์ c_2 ใน (6.28) ต้องให้เป็นศูนย์ และผลเฉลยจึงเป็นพหุคูณของ $J_\upsilon(z)$

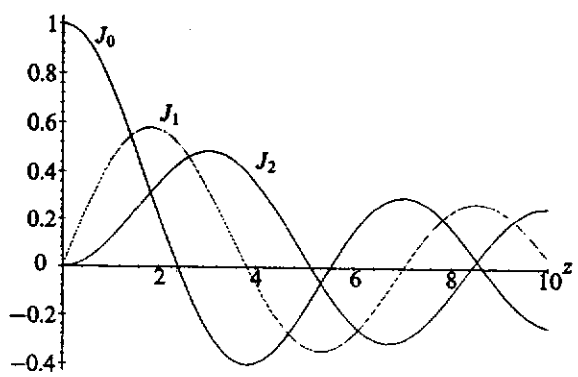
6.3.2 ผลเฉลยทั่วไปสำหรับ υ ที่เป็นเลขจำนวนเต็ม

ในกรณีที่ υ เป็นเลขจำนวนเต็ม เราไม่อาจใช้ผลเฉลยในรูปแบบ (6.28) ได้ พิจารณากรณี $\upsilon = 0$, ผลเฉลยทั้งสองของ indicial equation จะเท่ากัน จึงมีเพียงผลเฉลยเดียวในรูปแบบของอนุกรมโฟรเบนิอุส จากสมการ (6.27),

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^{2n} n! \Gamma(1+n)}$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots$$

โดยทั่วไป ถ้า υ เป็นเลขจำนวนเต็มค่าบวก, ผลเฉลยของ indicial equation จะแตกต่างกันเป็นเลขจำนวนเต็ม สำหรับรากที่มากกว่า, $m_1 = \upsilon$, เราได้ผลเฉลย $J_\upsilon(z)$ สำหรับ $\upsilon = 1,2,3,\ldots$ ในรูปแบบของอนุกรมโฟรเบนิอุสตามสมการ (6.27) กราฟของ $J_0(z)$, $J_1(z)$ และ $J_2(z)$ แสดงในรูปข้างล่างนี้สำหรับ z ค่าจริง



สำหรับรากที่น้อยกว่า, $m_2 = -\upsilon$, ความสัมพันธ์เวียนเกิดจะกลายเป็น

$$n(n-\ell)a_n + a_{n-2} = 0 \qquad , \qquad n \ge 2$$

โดยที่ $\ell = 2\upsilon$ เป็นเลขจำนวนเต็มบวกที่เป็นเลขคู่ หรือ $\ell = 2,4,6,\ldots$ เริ่มต้นจาก $a_0 \neq 0$ เราสามารถคำนวณหา $a_2, a_4, a_6, \ldots$ แต่จะเห็นว่า เมื่อ $n = \ell$, สัมประสิทธิ์ a_n จะเป็นอนันต์และไม่อาจได้ผลเฉลยที่สองในรูปแบบของอนุกรมโฟรเบนิอุสได้

ถ้าแทน υ ด้วย $-\upsilon$ ตามนิยามของ $J_\upsilon(z)$ ใน (6.27) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า สำหรับ υ ที่เป็นจำนวนเต็ม, $J_{-\upsilon}(z) = (-1)^\upsilon J_\upsilon(z)$ ดังนั้น $J_\upsilon(z)$ และ $J_{-\upsilon}(z)$ จึงขึ้นแก่กันแบบเชิงเส้น ดังนั้นในกรณีนี้ เราไม่อาจเขียนผลเฉลยทั่วไปของสมการเบสเซลในรูปแบบ (6.28), เราจึงนิยามฟังก์ชัน

$$Y_\upsilon(z) = \frac{J_\upsilon(z)\cos\upsilon\pi - J_{-\upsilon}(z)}{\sin\upsilon\pi} \tag{6.29}$$

ซึ่งเรียกว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สอง, อันดับ υ** (Bessel's function of the second kind of order υ) เนื่องจากสมการเบสเซลเป็นแบบเชิงเส้น, $Y_\upsilon(z)$ จึงเป็นผลเฉลยที่เป็นผลรวมถ่วงน้ำหนัก (weighted sum) ของ $J_\upsilon(z)$ นอกจากนี้ สำหรับ υ ที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม, $Y_\upsilon(z)$ เป็นอิสระต่อ $J_\upsilon(z)$ และ $J_\upsilon(z)$ และ $Y_\upsilon(z)$ จะให้คู่ของผลเฉลยที่เป็นอิสระต่อกันเสมอ สมการ (6.29) จะมีรูปแบบยังไม่กำหนด (indeterminate form), $0/0$, เมื่อ υ เป็นเลขจำนวนเต็มเพราะ $\cos\upsilon\pi = (-1)^\upsilon$ และ $J_{-\upsilon}(z) = (-1)^\upsilon J_\upsilon(z)$ อย่างไรก็ตาม รูปแบบยังไม่กำหนดนี้สามารถหาได้ โดยใช้หลักเกณฑ์โลปีตาล (l'Hôpital's rule) ดังนั้น สำหรับ υ เป็นเลขจำนวนเต็ม เราให้

$$Y_\upsilon(z) = \lim_{\mu\to\upsilon}\left[\frac{J_\mu(z)\cos\mu\pi - J_{-\mu}(z)}{\sin\mu\pi}\right] \tag{6.30}$$

ซึ่งให้ผลเฉลยที่สองที่เป็นอิสระเชิงเส้น ดังนั้นเราอาจเขียนผลเฉลยทั่วไปของสมการเบสเซลที่ใช้ได้กับทุก υ คือ

$$y(z) = c_1 J_\upsilon(z) + c_2 Y_\upsilon(z) \tag{6.31}$$

ในปัญหาทางฟิสิกส์เราต้องการผลเฉลยมีค่าปรกติที่ $z = 0$ แต่จาก (6.29) และ (6.30) จะเห็นว่า $Y_\upsilon(z)$ เป็นเอกฐานที่จุดกำเนิด ดังนั้น เราจึงให้ c_2 เป็นศูนย์ ผลเฉลยจึงเป็นพหุคูณของ $J_\upsilon(z)$ ในบางครั้งเราเรียก $Y_\upsilon(z)$ ว่า **ฟังก์ชันนอยมันน์** (Neumann function) หรือ Weber function

6.3.3 สมบัติของฟังก์ชันเบสเซล

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

ความสัมพันธ์เวียนเกิดของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง $J_\upsilon(z)$ สามารถกำหนดจากนิยามของอนุกรมกำลัง (6.27) ได้โดยตรง คือ

$$\frac{d}{dz}\left[z^\upsilon J_\upsilon(z)\right] = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2\upsilon+2n}}{2^{\upsilon+2n} n!\Gamma(\upsilon+n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2\upsilon+2n-1}}{2^{\upsilon+2n-1} n!\Gamma(\upsilon+n)}$$

$$= z^\upsilon \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{(\upsilon-1)+2n}}{2^{(\upsilon-1)+2n} n!\Gamma((\upsilon-1)+n+1)}$$

$$= z^\upsilon J_{\upsilon-1}(z) \tag{6.32}$$

และในทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{d}{dz}[z^{-\upsilon} J_\upsilon(z)] = -z^{-\upsilon} J_{\upsilon+1}(z) \tag{6.33}$$

จาก (6.32) และ (6.33) ทำให้ความสัมพันธ์เวียนเกิดอื่น ๆ หาได้ง่าย ถ้ากระจายอนุพันธ์ทางซ้ายมือของสมการ (6.32) แล้วหารตลอดด้วย $z^{\upsilon-1}$ เราจะได้ความสัมพันธ์

$$zJ'_\upsilon(z) + \upsilon J_\upsilon(z) = zJ_{\upsilon-1}(z) \tag{6.34}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อกระจายอนุพันธ์ทางซ้ายมือของสมการ (6.33) แล้วคูณตลอดด้วย $z^{\upsilon+1}$ จะได้

$$zJ'_\upsilon(z) - \upsilon J_\upsilon(z) = -zJ_{\upsilon+1}(z) \tag{6.35}$$

เมื่อบวกสมการ (6.34) และ (6.35) เข้าด้วยกันแล้วหารตลอดด้วย z จะให้

$$J_{\upsilon-1}(z) - J_{\upsilon+1}(z) = 2J'_\upsilon(z) \tag{6.36}$$

และถ้าลบสมการ (6.35) ออกจาก (6.34) แล้วหารด้วย z จะได้

$$J_{\upsilon-1}(z)+J_{\upsilon+1}(z)=\frac{2\upsilon}{z}J_{\upsilon}(z) \tag{6.37}$$

ตัวอย่างของการใช้ประโยชน์ความสัมพันธ์เวียนเกิดเหล่านี้ เช่น ถ้า $J_{\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\sin z$ และ $J_{-\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\cos z$ เราอาจหา $J_{\frac{3}{2}}(z)$ และ $J_{-\frac{3}{2}}(z)$ ในเทอมของ $\cos z$ และ $\sin z$ ดังนี้ จาก (6.35) เราได้

$$J_{\frac{3}{2}}(z)=\frac{1}{2z}J_{1/2}(z)-J'_{1/2}(z)$$

$$=\frac{1}{2z}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\sin z-\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\cos z+\frac{1}{2z}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\sin z$$

$$=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{z}\sin z-\cos z\right)$$

ทำนองเดียวกัน จาก (6.34) จะได้

$$J_{-\frac{3}{2}}(z)=-\frac{1}{2z}J_{-1/2}(z)+J'_{-1/2}(z)$$

$$=-\frac{1}{2z}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\cos z-\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\sin z-\frac{1}{2z}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\cos z$$

$$=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left(-\frac{1}{z}\cos z-\sin z\right)$$

หากเราทำเช่นนี้ซ้ำ ๆ จะเห็นได้ว่าทุกฟังก์ชันเบสเซล $J_{v}(z)$ ด้วยอันดับกึ่งจำนวนเต็มอาจกำหนดในเทอมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และทำนองเดียวกับ $Y_{v}(z)$ ด้วย

นอกจากนี้ ความสัมพันธ์ (6.32) และ (6.33) อาจเขียนในรูปแบบอินทิกรัลเป็น

$$\int z^{\upsilon} J_{\upsilon-1}(z)\, dz = z^{\upsilon} J_{\upsilon}(z)$$

$$\int z^{-\upsilon} J_{\upsilon+1}(z)\, dz = -z^{-\upsilon} J_{\upsilon}(z)$$

และทำนองเดียวกันสำหรับ $Y_{\upsilon}(z)$ ด้วย

การตั้งฉากร่วมกันของฟังก์ชันเบสเซล

ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง $J_{\upsilon}(z)$ มีสมบัติของการตั้งฉากร่วมกันที่อุปมากับกรณีของพหุนามเลอจองด์ พิจารณาฟังก์ชัน $f(z) = J_{\upsilon}(\lambda z)$ และ $g(z) = J_{\upsilon}(\mu z)$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเบสเซลตามลำดับ คือ

$$z^2 f'' + zf' + (\lambda^2 z^2 - \upsilon^2) f = 0 \tag{6.38}$$

$$z^2 g'' + zg' + (\mu^2 z^2 - \upsilon^2) g = 0 \tag{6.39}$$

เราลองตรวจสอบดูว่า $f(z) = J_{\upsilon}(\lambda z)$ สอดคล้องกับ (6.38) หรือไม่โดยเขียน $w = \lambda z$
ดังนั้น $\dfrac{df}{dz} = \lambda \dfrac{dJ_{\upsilon}(w)}{dw}$ และ $\dfrac{d^2 f}{dz^2} = \lambda^2 \dfrac{d^2 J_{\upsilon}(w)}{dw^2}$
เมื่อแทนค่าทั้งสองลงใน (6.38) ซ้ายมือของสมการจะกลายเป็น

$$z^2 \lambda^2 \frac{d^2 J_{\upsilon}(w)}{dw^2} + z\lambda \frac{dJ_{\upsilon}(w)}{dw} + (\lambda^2 z^2 - \upsilon^2) J_{\upsilon}(w)$$

$$= w^2 \frac{d^2 J_{\upsilon}(w)}{dw^2} + w \frac{dJ_{\upsilon}(w)}{dw} + (w^2 - \upsilon^2) J_{\upsilon}(w)$$

ซึ่งต้องเท่ากับศูนย์ตามรูปแบบของสมการเบสเซล ดังนั้น $f(z)$ จึงสอดคล้องกับ (6.38)

เมื่อเอาสมการ (6.39) คูณด้วย $f(z)$ และ (6.38) คูณกับ $g(z)$ แล้วนำมาลบกันจะได้

$$\frac{d}{dz}[z(fg' - gf')] = (\lambda^2 - \mu^2) zfg \tag{6.40}$$

โดยที่ $\frac{d}{dz}[z(fg'-gf')] = z(fg''-gf'')+(fg'-gf')$

เมื่ออินทิเกรด (6.40) จาก $z=a$ ไปยัง $z=b$ จะได้

$$\int_a^b zf(z)g(z)dz = \frac{1}{\lambda^2-\mu^2}[zf(z)g'(z)-zg(z)f'(z)]_a^b$$

เมื่อแทนค่า $f(z)=J_\upsilon(\lambda z)$ และ $g(z)=J_\upsilon(\mu z)$ จะให้

$$\int_a^b zJ_\upsilon(\lambda z)J_\upsilon(\mu z)dz = \frac{1}{\lambda^2-\mu^2}[\mu zJ_\upsilon(\lambda z)J_\upsilon'(\mu z)-\lambda zJ_\upsilon(\mu z)J_\upsilon'(\lambda z)]_a^b \tag{6.41}$$

ถ้า $\lambda \neq \mu$ และช่วง $[a,b]$ อยู่ในลักษณะที่ขวามือของสมการข้างบนเป็นศูนย์ เราจะได้เงื่อนไขของการตั้งฉากร่วมกัน

$$\int_a^b zJ_\upsilon(\lambda z)J_\upsilon(\mu z)dz = 0 \tag{6.42}$$

จากสมการ (6.42) เราสามารถหาค่า $\int_a^b J_\upsilon^2(\lambda z)zdz$ ได้ดังนี้ ให้ $u=\lambda z$ ดังนั้น

$$\int J_\upsilon(\lambda z)zdz = \frac{1}{\lambda^2}\int J_\upsilon^2(u)udu$$

โดยการหาปริพันธ์แยกส่วนจะได้

$$I = \int J_\upsilon^2(u)udu = \tfrac{1}{2}u^2J_\upsilon^2(u) - \int J_\upsilon(u)J_\upsilon'(u)u^2du$$

สมการเบสเซล (6.23) สามารถจัดได้ใหม่เป็น

$$u^2J_\upsilon(u) = \upsilon^2J_\upsilon(u) - uJ_\upsilon'(u) - u^2J_\upsilon''(u)$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการสำหรับ I จะได้

$$I = \tfrac{1}{2}u^2 J_\upsilon^{\,2}(u) - \int J_\upsilon^{'}(u)[\upsilon^2 J_\upsilon(u) - uJ_\upsilon^{'}(u) - u^2 J_\upsilon^{''}(u)]du$$

$$= \tfrac{1}{2}u^2 J_\upsilon^{\,2}(u) - \tfrac{1}{2}\upsilon^2 J_\upsilon^{\,2}(u) + \tfrac{1}{2}u^2[J_\upsilon^{'}(u)]^2 + c$$

เนื่องจาก $u = \lambda z$ ดังนั้น

$$\int_a^b J_\upsilon^{\,2}(\lambda z) z dz = \tfrac{1}{2}\left[\left(z^2 - \frac{\upsilon^2}{\lambda^2}\right)J_\upsilon^{\,2}(\lambda z) + z^2[J_\upsilon^{'}(\lambda z)]^2\right]_a^b \qquad (6.43)$$

ซึ่งเป็นเงื่อนไขความเป็นปรกติสำหรับฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง

เนื่องจาก $J_\upsilon(z)$ มีสมบัติของการตั้งฉากร่วมกันตามสมการ (6.42) เราอาจกระจายฟังก์ชัน $f(z)$ ในช่วง $o \le z \le a$ ให้เป็นผลบวกของฟังก์ชันเบสเซลอันดับ υ คือ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_\upsilon(\lambda_n z) \qquad (6.44)$$

โดยที่ λ_n ถูกเลือกให้ $J_\upsilon(\lambda_n a) = 0$ สัมประสิทธิ์ c_n หาได้จาก

$$c_n = \frac{2}{a^2 J_{\upsilon+1}^2(\lambda_n a)} \int_o^a f(z) J_\upsilon(\lambda_n z) z dz \qquad (6.45)$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้โดยคูณสมการ (6.44) ด้วย $zJ_\upsilon(\lambda_m z)$ แล้วอินทิเกรตจาก $z = 0$ ไปยัง $z = a$ จะได้

$$\int_o^a zJ_\upsilon(\lambda_m z) f(z) dz = \sum_{n=o}^{\infty} c_n \int_o^a zJ_\upsilon(\lambda_m z) J_\upsilon(\lambda_n z) dz$$

$$= c_m \int_o^a J_\upsilon^{\,2}(\lambda_m z) z dz$$

$$= \tfrac{1}{2} c_m a^2 J_\upsilon^{'2}(\lambda_m a) \quad = \tfrac{1}{2} c_m a^2 J_{\upsilon+1}^2(\lambda_m a)$$

โดยสองช่วงสุดท้ายเราใช้ (6.41), (6.43), $J_\upsilon(\lambda_m a) = 0$ และ (6.35)

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับฟังก์ชันเบสเซล

ฟังก์ชันเบสเซล $J_\upsilon(z)$ โดยที่ υ เป็นจำนวนเต็ม สามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันก่อกำเนิดในลักษณะที่คล้ายกับกรณีพหุนามเลอจองด์ **ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับฟังก์ชันเบสเซลด้วยอันดับจำนวนเต็ม** คือ

$$G(z,h) = \exp\left[\tfrac{z}{2}\left(h - \tfrac{1}{h}\right)\right] \quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) h^n \tag{6.46}$$

โดยการกระจายเอกซ์โพเนนเชียลเป็นอนุกรมกำลัง เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่าฟังก์ชัน $J_n(z)$ ตามสมการ (6.46) ก็คือฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งนั่นเอง

ฟังก์ชันก่อกำเนิดมีประโยชน์ในการหาสำหรับฟังก์ชันเบสเซลอันดับจำนวนเต็มและมักขยายไปสู่กรณีอันดับไม่ใช่จำนวนเต็มได้

เราสามารถใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิด (6.46) พิสูจน์ความสัมพันธ์เวียนเกิด (6.37) เมื่อ υ เป็นจำนวนเต็มได้ดังนี้ อนุพันธ์ของ $G(z,h)$ เทียบกับ h จะได้

$$\frac{\partial G(z,h)}{\partial h} = \frac{z}{2}\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) G(z,h) \quad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(z) h^{n-1}$$

และเมื่อใช้ (6.46) อีกครั้งสำหรับ $G(z,h)$ จะได้

$$\frac{z}{2}\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) h^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(z) h^{n-1}$$

เมื่อเข้าสมการสัมประสิทธิ์ของ h^n จะได้

$$\frac{z}{2}[J_n(z) + J_{n+2}(z)] = (n+1) J_{n+1}(z)$$

แล้วแทน n ด้วย $\upsilon - 1$ เราจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ

$$J_{\upsilon-1}(z) + J_{\upsilon+1}(z) = \frac{2\upsilon}{z} J_\upsilon(z) \tag{6.47}$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิด (6.46) ยังใช้หาตัวแทนอินทิกรัล (integral representation) ของฟังก์ชันเบสเซลที่มีอันดับจำนวนเต็ม กล่าวคือ ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม, ฟังก์ชันเบสเซล $J_n(z)$ ในรูปของอินทิกรัล คือ

$$J_n(z) = \tfrac{1}{\pi}\int_o^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)d\theta \tag{6.48}$$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้ โดยการกระจายเทอมโคไซน์ในปริพัทธ์ (integrand) ใน (6.48) ทำให้เราพิจารณาอินทิกรัล

$$I = \tfrac{1}{\pi}\int_o^{\pi} [\cos(z\sin\theta)\cos n\theta + \sin(z\sin\theta)\sin n\theta]d\theta \tag{6.49}$$

เราอาจเขียน $\cos(z\sin\theta)$ และ $\sin(z\sin\theta)$ ในเทอมของฟังก์ชันเบสเซลโดยให้ $h = \exp i\theta$ ใน (6.46) จะได้

$$\exp[\tfrac{z}{2}(\exp i\theta - \exp(-i\theta))] \quad = \exp(iz\sin\theta) \quad = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)\exp im\theta$$

เมื่อใช้ทฤษฎีบทเดอมัวร์ $\exp i\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ เราจึงได้

$$\exp(iz\sin\theta) = \cos(z\sin\theta) + i\sin(z\sin\theta)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)(\cos m\theta + i\sin m\theta)$$

โดยการเข้าสมการในส่วนของส่วนจริงและส่วนจินตภาพจะให้

$$\cos(z\sin\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)\cos m\theta$$

$$\sin(z\sin\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)\sin m\theta$$

แทนค่าเหล่านี้ลงใน (6.49) ดังนั้น

$$I = \frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{o}^{\pi}[J_m(z)\cos m\theta\cos n\theta + J_m(z)\sin m\theta\sin n\theta]d\theta$$

และเมื่อใช้สมบัติการตั้งฉากร่วมกันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ

$$\int_{x_o}^{x_o+L}\sin\left(\frac{2\pi rx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi px}{L}\right)dx = 0 \qquad \text{ทุกค่าของ } r \text{ และ } p$$

$$\int_{x_o}^{x_o+L}\cos\left(\frac{2\pi rx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi px}{L}\right)dx = \begin{cases} L & ; r = p = o \\ \frac{1}{2}L & ; r = p > o \\ o & ; r \neq p \end{cases}$$

$$\int_{x_o}^{x_o+L}\sin\left(\frac{2\pi rx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi px}{L}\right)dx = \begin{cases} o & ; r = p = o \\ \frac{1}{2}L & ; r = p > o \\ o & ; r \neq p \end{cases}$$

เราจึงได้ $I = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}[J_n(z) + J_n(z)] = J_n(z)$

ซึ่งเป็นการพิสูจน์สมการ (6.48) นั่นเอง

ในกรณี $n = 0$, สมการ (6.48) จะกลายเป็น

$$J_o(z) = \frac{1}{\pi}\int_{o}^{\pi}\cos(z\sin\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}\cos(z\sin\theta)d\theta$$

เนื่องจาก $\cos(z\sin\theta)$ ซ้ำเดิมในช่วง $\theta = \pi$ ถึง $\theta = 2\pi$ แต่ $\sin(z\sin\theta)$ เปลี่ยนเครื่องหมายในช่วงดังกล่าว ดังนั้น

$$\frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}\sin(z\sin\theta)d\theta = 0$$

และเมื่อใช้ทฤษฎีบทเดอมัวร์ เราสามารถเขียน

$$J_o(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}\exp(iz\sin\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{o}^{2\pi}\exp(iz\cos\theta)d\theta$$

ตัวแทนอินทิกรัลอื่น ๆ ของฟังก์ชันเบสเซลสามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

ตาราง, กราฟ และค่าศูนย์ของฟังก์ชันเบสเซล

ฟังก์ชันเบสเซลมีลักษณะคล้ายกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ สามารถกำหนดเป็นตาราง *(tabulated)* สำหรับ υ ค่าต่าง ๆ ได้ เราอาจหาค่า $J_0(z)$ และ $J_1(z)$ โดยทั่วไปได้จากหนังสือคู่มือ, แต่ต้องค้นหาค่าของ $J_\upsilon(z)$ สำหรับ υ ค่าอื่น ๆ รวมทั้ง $Y_\upsilon(z)$ เราสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันเบสเซลจากค่าที่กำหนดในตารางดังกล่าว และเราอาจเห็นกราฟของค่าในตำราต่าง ๆ ยกเว้นสำหรับ $J_0(z)$, ทุกค่าของ $J_\upsilon(z)$ จะเริ่มจากจุดกำเนิดแล้วแกว่งกวัดคล้าย $\sin x$ แต่ด้วยแอมพลิจูดที่ลดลง $J_0(z)$ เท่ากับ 1 ที่ $z=0$ ดังนั้นจึงดูคล้ายกับโคไซน์แบบหน่วง (damped cosine) ทุก $Y_\upsilon(z)$ เท่ากับ $\pm\infty$ ที่จุดกำเนิดแล้วจึงแกว่งกวัดที่ระยะห่างออกไปด้วยแอมพลิจูดที่ลดลงเช่นกัน

ค่าของ x ที่ทำให้ $\sin x = 0$ เรียกว่า ค่าศูนย์ $(zeros)$ ของ $\sin x$, ซึ่งไม่จำเป็นต้องกำหนดเป็นตาราง เพราะ $x = n\pi$ สำหรับ $n = 0,1,2,\ldots$ อย่างไรก็ตาม ค่าศูนย์ของฟังก์ชันเบสเซลไม่ได้เกิดขึ้นที่ช่วงปรกติ จึงต้องคำนวณเชิงตัวเลขและกำหนดเป็นตาราง ค่าศูนย์มีความสำคัญมากต่อการใช้ประโยชน์และเราจะพบค่าของมันในตารางควบคู่ไปกับค่าของฟังก์ชันนั้น ความแตกต่างระหว่างค่าศูนย์ที่อยู่ติดกัน 2 ค่า จะมีค่าประมาณ π (เช่นเดียวกับ $\sin x$ และ $\cos x$) เมื่อ z มีค่ามาก

6.3.4 สมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไปที่มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันเบสเซล

หลาย ๆ สมการเชิงอนุพันธ์พบว่าไม่มีรูปแบบตามสมการ (6.23) แต่มีผลเฉลยที่สามารถเขียนในเทอมของฟังก์ชันเบสเซลได้ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + \frac{1-2a}{z}y' + \left[(bcz^{c-1})^2 + \frac{a^2 - \upsilon^2 c^2}{z^2}\right]y = 0 \tag{6.50}$$

มีผลเฉลย

$$y = z^a Z_\upsilon(bz^c) \tag{6.51}$$

โดยที่ Z อาจเป็น J หรือ Y หรือผลบวกของทั้งสอง, และ a,b,c,υ เป็นค่าคงตัว เพื่อให้เห็นชัดเจนขึ้น เราลองแก้สมการ $y'' + 9xy = 0$ ซึ่งหากมีรูปแบบตามสมการ (6.50) เราต้องให้

$$1-2a=0,\quad (bc)^2 = 9,\quad 2(c-1)=1,\quad a^2 - \upsilon^2 c^2 = 0$$

นั่นคือ $a = \frac{1}{2},\quad b = 2,\quad c = \frac{3}{2},\quad \upsilon = \frac{a}{c} = \frac{1}{3}$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการดังกล่าวคือ $y = x^{1/2} Z_{1/3}(2x^{3/2})$

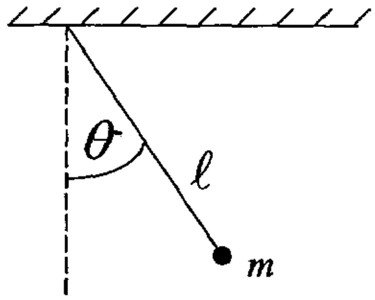
ซึ่งหมายถึงผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y = x^{1/2}[AJ_{1/3}(2x^{3/2}) + BY_{1/3}(2x^{3/2})] \tag{6.52}$$

โดยที่ A และ B เป็นตัวคงค่าเลือก

ตัวอย่างของสมการที่มีลักษณะ (6.50) คือ การแกว่งกวัดของลูกตุ้มเชิงเดี่ยว ซึ่งมีความยาว ℓ ของเชือกที่เพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงตัว พลังงานจลน์ของระบบคือ

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2)$$



และพลังงานศักย์ คือ

$$V = -mg\ell\cos\theta$$

ดังนั้น Lagrangian คือ

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2) + mg\ell\cos\theta$$

และ Lagrange equation ของการเคลื่อนที่สำหรับตัวแปร θ คือ

$$\frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\theta}^2) + mg\ell\sin\theta = 0$$

หรือ $$\ell\ddot{\theta} + 2\dot{\ell}\dot{\theta} + g\sin\theta = 0$$

ให้ความยาวของเชือกที่เวลา t เป็น $\ell = \ell_0 + vt$ โดยที่ v เป็นอัตราคงตัวที่เชือกยืดออก นั่นคือ $\dot{\ell} = v$ สำหรับการแกว่งกวัดเล็กน้อยเราแทน $\sin\theta$ ด้วย θ เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงไปในสมการข้างต้นจะได้

$$(\ell_0 + vt)\ddot{\theta} + 2v\dot{\theta} + g\theta = 0$$

เพื่อให้ผลเฉลยของสมการเป็นฟังก์ชันเบสเซล เราจะเปลี่ยนตัวแปรจาก t เป็น x คือ

$$x = \frac{\ell_0 + vt}{v}$$

$$\therefore dx = dt,\ \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx} = \theta',\ \ddot{\theta} = \theta''$$

เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงไปแล้วหารตลอดด้วย vx เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับ θ เทียบกับ x เป็น

$$\theta'' + \frac{2}{x}\theta' + \frac{g}{v}\frac{1}{x}\theta = 0 \tag{6.53}$$

แล้วเปรียบเทียบกับสมการ (6.50) จะได้

$$1 - 2a = 2\,,\quad a^2 = \upsilon^2 c^2\,,\quad (bc)^2 = \frac{g}{v},\quad 2c - 2 = -1$$

หรือ $$a = -\frac{1}{2},\ \upsilon^2 = \frac{a^2}{c^2} = 1,\ b = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{g}{v}} = 2\sqrt{\frac{g}{v}},\ c = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \theta = x^{-\frac{1}{2}} Z_1\left(2\sqrt{\frac{g}{v}}\, x^{1/2}\right)$$

ให้ $u = 2\sqrt{\frac{g}{v}}\, x^{1/2}$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (6.53) คือ

$$\theta = A u^{-1} J_1(u) + B u^{-1} Y_1(u)$$

6.3.5 ฟังก์ชันเบสเซลชนิดอื่น ๆ

เนื่องจากสมการเบสเซลเป็นสมการอันดับสองจึงมีผลเฉลยเพียง 2 ค่าที่เป็นอิสระต่อกันเท่านั้น อย่างไรก็ตาม ยังมีฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องอีกหลาย ๆ ฟังก์ชันที่เรียกว่า ฟังก์ชันเบสเซลเช่นกัน ซึ่งแนวคิดจะคล้าย ๆ กับฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ กล่าวคือ เราทราบว่า $\cos x$ และ $\sin x$ เป็นผลเฉลยหลักของ $y'' + y = 0$, แต่ $\cos x \pm i \sin x$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการนี้เช่นกัน และมักเขียนเป็น $e^{\pm ix}$. นอกจากนี้ถ้าเราแทน x ด้วย ix เราจะได้ฟังก์ชัน $e^x, e^{-x}, \cosh x, \sinh x$

ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ $y'' - y = 0$ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดอื่น ๆ ซึ่งอุปมากับฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังกล่าวและมักใช้กันบ่อย ๆ มีดังนี้

(1) ฟังก์ชันฮันเกลหรือฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สาม

(Hankel functions or Bessel functions of the third kind)

$$\begin{aligned} H_\upsilon^{(1)}(z) &= J_\upsilon(z) + iY_\upsilon(z) \\ H_\upsilon^{(2)}(z) &= J_\upsilon(z) - iY_\upsilon(z) \end{aligned} \tag{6.54}$$

(ซึ่งเปรียบเทียบกับ $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$)

(2) ฟังก์ชันเบสเซลดัดแปรหรือไฮเพอร์โบลิก

(Modified or hyperbolic Bessel functions)

ผลเฉลยของสมการ $z^2 y'' + zy' - (z^2 + \upsilon^2)y = 0$ (6.55)

มีลักษณะเช่นเดียวกับสมการ (6.51) คือ $Z_\upsilon(iz)$ โดยอาจเปรียบเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการเบสเซลและการอุปมากับผลเฉลยของ $y'' + y = 0$ และ $y'' - y = 0$ ผลเฉลยที่เป็นอิสระต่อกันของสมการ (6.55) ที่มักใช้กันคือ

$$\begin{aligned} I_\upsilon(z) &= i^{-\upsilon} J_\upsilon(iz) \\ K_\upsilon(z) &= \frac{\pi}{2} i^{\upsilon+1} H_\upsilon^{(1)}(iz) \end{aligned} \tag{6.56}$$

ซึ่งอาจเปรียบเทียบกับ $\sinh x = -i\sin(ix)$ และ $\cosh x = \cos(ix)$ เพราะ I และ K เรียกว่า ฟังก์ชันเบสเซลไฮเพอร์โบลิก แฟกเตอร์ i จะถูกปรับเพื่อให้ I และ K เป็นค่าจริงสำหรับ z ที่เป็นค่าจริง

(3) ฟังก์ชันเบสเซลทรงกลม (Spherical Bessel functions)

ถ้า $\upsilon = {(2n+1)}/{2} = n + \frac{1}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $J_\upsilon(z)$ และ $Y_\upsilon(z)$ เรียกว่า ฟังก์ชันเบสเซลอันดับคี่กึ่งจำนวนเต็ม (half odd integral order) และสามารถกำหนดในเทอมของ $\sin z, \cos z$ และยกกำลัง z ได้ ฟังก์ชันเบสเซลทรงกลมจะสัมพันธ์กับเทอมเหล่านี้ ฟังก์ชันเบสเซลทรงกลมเกิดขึ้นในหลายรูปแบบของปัญหาเกี่ยวกับการสั่น โดยเฉพาะ

อย่างยิ่งเมื่อพิกัดทรงกลมถูกนำมาใช้ ฟังก์ชันเบสเซลทรงกลม $j_n(z), y_n(z), h_n^{(1)}(z), h_n^{(2)}(z)$, สำหรับ $n = 0,1,2,\ldots$ คือ

$$\left.\begin{aligned}
j_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{n+\frac{1}{2}}(z) &&= z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\left(\frac{\sin z}{z}\right)\\
y_n(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}}Y_{n+\frac{1}{2}}(z) &&= -z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\left(\frac{\cos z}{z}\right)\\
h_n^{(1)}(z) &= j_n(z)+iy_n(z)\\
h_n^{(2)}(z) &= j_n(z)-iy_n(z)
\end{aligned}\right\} \tag{6.57}$$

(4) The ber, bei, ker, kei functions

วิธีมาตรฐานของผลเฉลยของข้อปัญหาการสั่นคือการสมมติผลเฉลยในรูป $e^{i\omega t}$, **สมการที่ได้อาจมีเทอมจินตภาพด้วย ตัวอย่างเช่น สมการที่เกิดจากข้อปัญหาของการแจกแจงกระแสสลับในเส้นลวด** (skin effect) **คือ**

$$y'' + \tfrac{1}{z}y' - iy = 0 \tag{6.58}$$

เมื่อเราเปรียบเทียบกับสมการ (6.50) จะพบว่า

$$a = 0,\ c = 1,\ (bc)^2 = -i,\ a^2 = \upsilon^2 c^2$$

$$\upsilon = 0,\ b = \sqrt{-i} = i^{3/2} \ \text{เพราะ}\ i^3 = -i$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (6.58) **คือ** $y = Z_0(i^{3/2}z)$ **ซึ่งค่อนข้างซับซ้อนและมักจะแยกออกเป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ซึ่งเรียกว่า** (สำหรับ $Z = J$) ber **และ** bei **ซึ่งย่อมาจาก** Bessel-real **และ** Bessel-imaginary **ตามลำดับ เรานิยาม** ber, bei, ker, kei **ดังนี้**

$$\begin{aligned}
J_0(i^{3/2}z) &= ber z + i bei z\\
K_0(i^{1/2}z) &= \ker z + i kei z
\end{aligned} \tag{6.59}$$

สำหรับกรณี $n \neq o$ ก็เป็นไปในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชันเหล่านี้เกิดขึ้นในข้อปัญหาเกี่ยวกับการไหลของความร้อนและในทฤษฎีของของไหลหนืด (viscous) และในข้อปัญหาเกี่ยวกับไฟฟ้า

6.3.6 ค่าโดยประมาณของฟังก์ชันเบสเซล

มีหลาย ๆ กรณีที่เราจำเป็นต้องใช้ค่าโดยประมาณเพื่อทราบพฤติกรรมของฟังก์ชันเบสเซล เมื่อ z มีค่าน้อย ๆ ใกล้ศูนย์หรือเมื่อ z มีค่ามาก ๆ เพื่อความสะดวกจะอ้างอิงค่าเหล่านี้ในรูปของตาราง สัญลักษณ์ $O(z^n)$ อ่านว่า เทอมของอันดับของ z^n และหมายถึงค่าผิดพลาดของการประมาณนี้จะน้อยกว่าค่าคงตัวคูณด้วย z^n เช่น $O(1)$ หมายถึง เทอมถูกจำกัด (bounded terms) ในที่นี้ $\upsilon \geq 0$

ฟังก์ชัน	z มีค่าน้อยๆ	z มีค่ามากๆ (asymptotic)
$J_\upsilon(z)$	$\dfrac{1}{\Gamma(\upsilon+1)}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{\upsilon}+O(z^{\upsilon+2})$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\dfrac{2\upsilon+1}{4}\pi\right)+O(z^{-3/2})$
$Y_\upsilon(z)\begin{cases}\upsilon=0\\ \upsilon>0\end{cases}$	$\dfrac{2}{\pi}\ell nz+O(1)$ $-\dfrac{\Gamma(\upsilon)}{\pi}\left(\dfrac{2}{z}\right)^{\upsilon}+O\left(\dfrac{1}{z^{\upsilon-1}}\right)$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\dfrac{2\upsilon+1}{4}\pi\right)+O(z^{-3/2})$
$H_\upsilon^{(1)\text{หรือ}(2)}(z)$	$\pm iY_\upsilon(z)+O(z^{\upsilon})$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\,e^{\pm i[z-\frac{1}{2}(\upsilon+\frac{1}{2})\pi]}+O(z^{-3/2})$
$I_\upsilon(z)$	เหมือน $J_\upsilon(z)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi z}}e^{z}+O\left(\dfrac{e^{z}}{z}\right)$
$K_\upsilon(z)\begin{cases}\upsilon=0\\ \upsilon>0\end{cases}$	$-\ell nz+O(1)$ $\dfrac{1}{2}\Gamma(\upsilon)\left(\dfrac{2}{z}\right)^{\upsilon}+O\left(\dfrac{1}{z^{\upsilon-1}}\right)$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2z}}\,e^{-z}+O\left(\dfrac{e^{-z}}{z}\right)$

6.4 สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์

สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ (Sturm-Liouville equations) มีรูปแบบทั่วไปเป็น

$$p(z)\frac{d^2y}{dz^2}+r(z)\frac{dy}{dz}+q(z)y+\lambda\rho(z)y=0 \quad ; \quad r(z)=\frac{dp(z)}{dz} \tag{6.60}$$

ดยที่ p,q และ r เป็นฟังก์ชันจริงของ z สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์สามารถแก้ได้โดยวิธีการซ้อนทับ (superposition methods)

สมการ (6.60) สามารถเขียนได้เป็น

$$\hat{L}y=\lambda\rho(z)y \tag{6.61}$$

โดยที่ $\hat{L} = -\left[p(z)\frac{d^2}{dz^2} + r(z)\frac{d}{dz} + q(z)\right]$

เช่น สมการเลอจองด์มีรูปแบบของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ด้วยค่า $p(z) = 1 - z^2$, $r(z) = -2z = p'(z), q(z) = 0, \rho(z) = 1$ และด้วยค่าเจาะจง $\ell(\ell+1)$.

สมการ (6.60) อาจเขียนได้ใหม่เป็น

$$(py')' + qy + \lambda\rho y = 0 \tag{6.62}$$

โดยที่ / หมายถึง อนุพันธ์เทียบกับ z เมื่อใช้สมการ (6.61), สมการ (6.62) อาจเขียนเป็น $\hat{L}y = -(py')' - qy = \lambda\rho y$ สำหรับตัวดำเนินการเชิงเส้นของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ (6.61) เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มิเทียน (Hermitian) หรือผูกพันในตัว (self-adjoint), นั่นคือ $(\hat{L})^+ = \hat{L}$ ในช่วง $[a,b]$ จำเป็นต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบบางประการ กล่าวคือ ฟังก์ชันเจาะจง 2 ค่า คือ y_i และ y_j ของสมการ (6.61) จะต้องสอดคล้องกับ

$$[y_i^* py_j']_{x=a} = [y_i^* py_j']_{x=b}$$

หรือ $$[y_i^* py_j']_{x=a}^{x=b} = 0 \tag{6.63}$$

ซึ่งเป็นเงื่อนไขขอบที่ต้องการ เงื่อนไขขอบอื่น ๆ ที่อาจต้องใช้คือ $y(a) = y(b) = 0;$ $y'(a) = y'(b) = 0;$ $p(a) = p(b) = 0$ เป็นต้น สังเกตว่าเพื่อให้สอดคล้องกับ (6.63) เงื่อนไขขอบหนึ่งเงื่อนไขจะต้องระบุที่ปลายของพิสัย

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองใด ๆ อาจแปลงไปสู่สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ได้โดยการคูณตลอดด้วยแฟกเตอร์ที่เหมาะสม กล่าวคือ สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ (6.60) กำหนดให้ $r(z) = p'(z)$ แต่สมการใด ๆ ที่มีรูปแบบ

$$p(z)y'' + r(z)y' + q(z)y + \lambda\rho(z)y = 0 \tag{6.64}$$

สามารถปรับให้มีรูปแบบผูกพันในตัวได้โดยคูณตลอดด้วยแฟกเตอร์ (integrating factor)

$$F(z) = \exp\left\{\int^z \frac{r(x) - p'(x)}{p(x)}\,dx\right\} \tag{6.65}$$

แล้วกลายเป็นสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ คือ

$$[F(z)p(z)y']' + F(z)q(z)y + \lambda F(z)\rho(z)y = 0 \tag{6.66}$$

ด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) $F(z)\rho(z)$

ตัวอย่างเช่น สมการแอร์มิต $y'' - 2zy' + 2\alpha y = 0$ เมื่อใช้สมการ (6.65) ด้วยเทอม $p(x) = 1, p'(x) = 0$ และ $r(x) = -2x$ จะให้แฟกเตอร์ $F(z)$ เป็น

$$F(z) = \exp(\int^{z} -2x dx) = \exp(-z^2)$$

ดังนั้น สมการแอร์มิตข้างต้นจะกลายเป็น

$$e^{-z^2} y'' - 2ze^{-z^2} y' + 2\alpha e^{-z^2} y = (e^{-z^2} y')' + 2\alpha e^{-z^2} y = 0$$

ซึ่งมีรูปแบบเป็นสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ด้วยค่า $p(z) = e^{-z^2}, q(z) = 0, \rho(z) = e^{-z^2}$ และ $\lambda = 2\alpha$.

ตัวอย่างของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์

ในหัวข้อนี้จะเสนอตัวอย่างของสมการที่ควรทราบและเป็นสมการที่มีรูปแบบหรือสามารถทำให้อยู่ในรูปแบบของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ได้ บางสมการได้กล่าวมาบ้างแล้ว แต่เป็นที่น่าสังเกตว่าผลเฉลยของสมการเหล่านี้จะสอดคล้องกับสมบัติเชิงตั้งฉากร่วมกันเสมอเพราะตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้มีลักษณะผูกพันในตัว

(1) สมการเลอจองด์

จากสมการเลอจองด์

$$(1 - z^2)y'' - 2zy' + \ell(\ell + 1)y = [(1 - z^2)y']' + \ell(\ell + 1)y = 0$$

จะเห็นว่ามีรูปแบบเป็นสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ด้วยค่า $p(z) = 1 - z^2$, $q(z) = 0$, $\rho(z) = 1$ และค่าเจาะจง $\ell(\ell + 1)$ ในหัวข้อที่ผ่านมาเราพบว่า ผลเฉลยของสมการเลอจองด์เป็นปรกติ (regular) สำหรับทุกค่าของ z, ซึ่งก็คือพหุนามเลอจองด์ $P_\ell(z)$ ที่กำหนดโดยสูตรโรดริกส์ คือ

$$P_\ell(z)=\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(z^2-1)^\ell$$

สมบัติเชิงตั้งฉากปรกติของฟังก์ชันนี้ในพิสัย $-1\le z\le 1$ กำหนดโดย

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(z)P_k(z)dz=\frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell k}$$

และฟังก์ชันก่อกำเนิดคือ

$$G(z,h)=(1-2zh+h^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)h^n$$

สมการเลอจองด์ปรากฏในการคำนวณเกี่ยวกับตัวดำเนินการ ∇^2 และสมมาตรเชิงรัศมี เพราะตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่เกี่ยวข้องมีรูปแบบของมุมเชิงขั้วของ ∇^2 ที่เขียนในพิกัดทรงกลม ตัวอย่างที่เราคุ้นเคยกันดีคือผลเฉลยของสมการลาปลาซในสมมาตรรอบแกนและผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ในกลศาสตร์ควอนตัมที่เกี่ยวข้องกับศักย์ศูนย์กลาง (central potential)

(2) สมการเลอจองด์สมทบ

สมการเลอจองด์สมทบ คือ

$$[(1-z^2)y']'+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]y=0$$

ซึ่งลดรูปเป็นสมการเลอจองด์เมื่อ $m=0$ การใช้ประโยชน์จาก $-\ell\le m\le \ell$ และ m ต้องเป็นจำนวนเต็มเท่านั้น ผลเฉลยของสมการเลอจองด์สมทบ คือ

$$P_\ell^m(z)=(1-z^2)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}P_\ell}{dz^{|m|}}$$

ซึ่งสมบัติเชิงตั้งฉากปรกติกำหนดโดย

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(z)P_k^m(z)dz=\frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell k}$$

และฟังก์ชันก่อกำเนิดคือ

$$G(z,h)=\frac{(2m)!\,(1-z^2)^{m/2}}{2^m\,m!(1-2hz+h^2)^{m+\frac{1}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+m}^{m}(z)h^n$$

และมักเกิดขึ้นกับมุมภาคทิศ ϕ ในรูปของ $e^{im\phi}$ หรือ $\cos m\phi$

(3) สมการเบสเซล

รูปแบบของสมการเบสเซล คือ

$$z^2y''+zy'+(z^2-\upsilon^2)y=0$$

เพื่อให้สมการนี้อยู่ในรูปของสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ และมีผลเฉลยที่มีสมบัติความเป็นปรกติด้วย เราจึงหารตลอดสมการนี้ด้วย z **แล้วเปลี่ยนตัวแปรไปเป็น** $x=\dfrac{z}{a}$ **ดังนั้น สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ คือ**

$$(xy')'+\frac{\upsilon^2}{x}y+a^2xy=0$$

โดยที่ $y'=\dfrac{dy}{dx}$ และเครื่องหมาย / หมายถึง อนุพันธ์เทียบกับ x

ผลเฉลยของสมการเบสเซลที่เขียนอยู่ในรูปแบบสมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ คือ

$$J_{\upsilon}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\left(\frac{z}{2}\right)^{\upsilon+2n}}{n!\,\Gamma(\upsilon+n+1)}$$

สมบัติเชิงตั้งฉากร่วมกันและความเป็นปรกติได้กล่าวแล้วในสมการ (6.42) และ (6.43) ของหัวข้อที่ 6.3.3 คือ

$$\int_z^b zJ_{\upsilon}(\lambda z)J_{\upsilon}(\mu z)dz=0$$

$$\int_z^b J_{\upsilon}^{2}(\lambda z)zdz=\frac{1}{2}\left[\left(z^2-\frac{\upsilon^2}{\lambda^2}\right)J_{\upsilon}^{2}(\lambda z)+z^2\left[J_{\upsilon}'(\lambda z)\right]^2\right]_a^b$$

และฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ

$$G(z,h)=\exp\left[\frac{z}{2}\left(h-\frac{1}{h}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)h^n$$

(4) สมการฮาร์มอนิกเชิงเดียว

สมการสตูร์ม-ลีอูวิลล์ที่ชัด (trivial) ที่สุด คือ สมการการเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกเชิงเดียว (simple harmonic equation)

$$y''+w^2y=0$$

โดยมี $p(z)=1,\ q(z)=0,\ \rho(z)=1$ และค่าเจาะจง w^2

(5) สมการแอร์มิต

สมการแอร์มิต (Hermite's equation) ปรากฏในการศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก (harmonic oscillator) และกำหนดโดย

$$y''-2zy'+2\alpha y=0$$

ซึ่งสามารถแปลงไปสู่รูปแบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์ได้โดยการคูณตลอดด้วย e^{-z^2} คือ

$$e^{-z^2}y''-2ze^{-z^2}y'+2\alpha e^{-z^2}y=(e^{-z^2}y')'+2\alpha e^{-z^2}y=0$$

ผลเฉลยคือ พหุนามแอร์มิต (Hermite polynomials) $H_n(z)$ ซึ่งกำหนดจากสูตรโรดริกส์ คือ

$$H_n(z)=(-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2})$$

การตั้งฉากร่วมกันในพิสัย $-\infty<z<\infty$ และความเป็นปรกติกำหนดโดย

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}H_m(z)H_n(z)dz=2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{mn}$$

และฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ

$$G(z,h) = e^{2hz-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} h^n$$

(6) สมการลาแกร์

สมการลาแกร์ (Laguerre's equation) ปรากฏในการศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นของอะตอมไฮโดรเจนและกำหนดโดย

$$zy'' + (1-z)y' + ny = 0$$

ซึ่งสามารถแปลงไปสู่รูปแบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์โดยการคูณตลอดด้วย integrating factor e^{-z} นั่นคือ

$$ze^{-z}y'' + (1-z)e^{-z}y' + ne^{-z}y = (ze^{-z}y')' + ne^{-z}y = 0$$

ผลเฉลยคือ พหุนามลาแกร์ (Laguerre polynomials) $L_n(z)$ ซึ่งกำหนดจากสูตรโรดริกส์ คือ

$$L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n}(z^n e^{-z})$$

สมบัติความเป็นปรกติและเชิงตั้งฉากกันในพิสัย $o \le z < \infty$ กำหนดโดย

$$\int_o^{\infty} e^{-z} L_m(z) L_n(z) dz = (n!)^2 \delta_{mn}$$

และฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ

$$G(z,h) = \frac{e^{-zh/(1-h)}}{1-h} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{L_n(z)}{n!} h^n$$

(7) สมการเชบีเชฟ

สมการเชบีเชฟ (Chebyshev equation) คือ

$$(1-z^2)y'' - zy' + n^2 y = 0$$

ซึ่งสามารถแปลงไปสู่รูปแบบสตูร์ม-ลีอูวิลล์ได้โดยคูณตลอดด้วยแฟกเตอร์ $(1-z^2)^{-1/2}$ แล้วได้

$$[(1-z^2)^{1/2}y']' + n^2(1-z^2)^{-1/2}y = 0$$

ผลเฉลยคือ พหุนามเชบีเชฟ (Chebyshev polynomial) $T_n(z)$ ที่กำหนดจากสูตรโรดริกส์

$$T_n(z) = \frac{(-2)^n(n+1)!}{(2n+1)!(1-z^2)^{1/2}}\frac{d^n}{dz^n}(1-z^2)^{n+\frac{1}{2}}$$

สมบัติความเป็นปรกติเชิงตั้งฉากในพิสัย $-1 \le z \le 1$ กำหนดจาก

$$\int_{-1}^{1}(1-z^2)^{-1/2}T_m(z)T_n(z)dz = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \dfrac{\pi}{2} & , n = m \neq 0 \\ \pi & , n = m = 0 \end{cases}$$

และฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ

$$G(z,h) = \frac{1-zh}{1-2zh+h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(z)h^n$$

บรรณานุกรม

.rfken, G. (1970) **Mathematical Methods for Physicists**. Academic Press, Inc., New York.

Boas, M.L. (1966) **Mathematical Methods in the Physical Sciences**. John Wiley & Sons, Inc., New York.

Butkov, E. (1968) **Mathematical Physics**. Addison – Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts.

Chow, T.L. (2000) **Mathematical Methods for Physicists A Concise Introduction**. Cambridge University Press, U.K.

Hassani , S. (1999) **Mathematical Physics A Modern Introduction to Its Foundations**. Springer – Verlag New York, Inc.

Mathews, J. and Walker, R.L. (1970) **Mathematical Methods of Physics**. W.A.Benjamin, Inc.

Rice, B.J. (1972) **Applied Analysis for Physicists and Engineers**. Prindle, Weber & Schmidt, Inc., Massachusetts.

Wyld, H.W. (1976) **Mathematical Methods for Physics**. Addison – Wesley Publishing Company, Inc.