เฉลยเอกสารทบทวนคณิตศาสตร์พื้นฐาน

สำหรับ

นักศึกษาวิทยาศาสตร์การกีฬา เทคโนโลยีการเกษตร สาธารณสุขศาสตร์ และพยาบาลศาสตร์

รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาศรี อัศวกุล
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เฉลยเอกสารทบทวนคณิตศาสตร์พื้นฐาน

สำหรับ

นักศึกษาวิทยาศาสตร์การกีฬา เทคโนโลยีการเกษตร สาธารณสุขศาสตร์ และพยาบาลศาสตร์

รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาศรี อัศวกุล
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

1.3 ช่วง (Intervals) ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a<b$

ช่วงเปิด (Open Intervals) (a,b) หมายถึง เซตของจำนวนจริงซึ่งอยู่ระหว่าง a และ b

$$(a,b) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a<x<b\}$$

$$a<x<b$$

ช่วงปิด (Closed Intervals) $[a,b]$ หมายถึง เซตของจำนวนจริงซึ่งอยู่ระหว่าง a และ b และรวมทั้งค่า a และ b

$$[a,b] = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$$

$$a \le x \le b$$

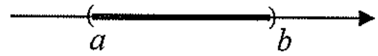
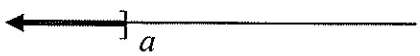
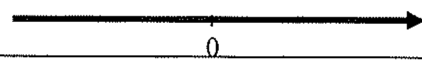
ช่วงกึ่งเปิด (Half-Open Intervals)

$$[a,b) = \{\, x \mid x \in \mathbb{R}, \ldots\ldots a \le x < b \ldots\ldots \}$$
$$(a,b] = \{\, x \mid x \in \mathbb{R}, \ldots\ldots a < x \le b \ldots\ldots \}$$

ช่วงอนันต์ (Infinite Intervals) เป็นช่วงที่ไม่มีขอบเขต

$$(a,\infty),\quad [a,\infty),\quad (-\infty,a),\quad (-\infty,a],\quad (-\infty,\infty)$$

สรุปได้ว่า

	สัญกรณ์แบบช่วง	สัญกรณ์แบบอสมการ	การแทนบนเส้นจำนวน
ช่วงที่มีขอบเขต			
ช่วงเปิด	(a,b)	$a<x<b$	
ช่วงปิด	$[a,b]$	$a\le x\le b$	
ช่วงกึ่งเปิด	$[a,b)$	$a\le x<b$	
ช่วงกึ่งเปิด	$(a,b]$	$a<x\le b$	
ช่วงที่ไม่มีขอบเขต			
	(a,∞)	$a<x$	
	$[a,\infty)$	$a\le x$	
	$(-\infty,a)$	$x<a$	
	$(-\infty,a]$	$x\le a$	
เส้นจำนวนจริง	$(-\infty,\infty)$	-	

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนเซตซึ่งนิยามโดยอสมการต่อไปนี้แบบช่วง และเขียนแสดงบนเส้นจำนวนจริง

(1)	$2<x\le 4$	(2)	$-1.5\le x<0$
(3)	$x\ge -1$	(4)	$x<3.6$
(5)	$x\le 1$	(6)	$-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$

วิธีทำ

(1) $2<x\le 4$ หมายถึง จำนวนจริง x ใด ๆ ที่มากกว่า 2 และน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4
แทนได้ด้วย $(2,4]$

(2) $-1.5\le x<0$ หมายถึง จำนวนจริง x ใดๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับ -1.5 และ น้อยกว่า 0
แทนได้ด้วย $[-1.5,\ 0)$

(3) $x\ge -1$ หมายถึง จำนวนจริง x ใดๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับ -1
แทนได้ด้วย $[-1,\ \infty)$

(4) $x < 3.6$ หมายถึง จำนวนจริง x ใดๆ ที่น้อยกว่า 3.6

แทนได้ด้วย $(-\infty, 3.6)$

(5) $x \le 1$ หมายถึง จำนวนจริง x ใดๆ ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1

แทนได้ด้วย $(-\infty, 1]$

(6) $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ หมายถึง จำนวนจริง x ใดๆ ที่มีค่าระหว่าง $-\sqrt{2}$ และ $\sqrt{2}$ และรวมทั้งค่า $-\sqrt{2}$ และ $\sqrt{2}$

แทนได้ด้วย $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

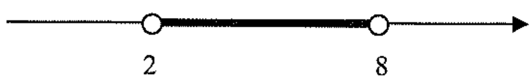
□

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนช่วงต่อไปนี้ในรูปอสมการ และเขียนแสดงบนเส้นจำนวน

(1) $(2, 8)$ (2) $[-2, \infty)$ (3) $(-\infty, 0.34)$

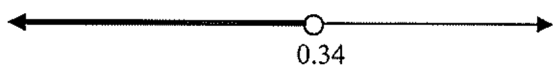
วิธีทำ

(1) $(2, 8)$ หมายถึง เซตของจำนวนจริง x ซึ่ง $2 < x < 8$



(2) $[-2, \infty)$ หมายถึง เซตของจำนวนจริง x ซึ่ง $x \ge -2$

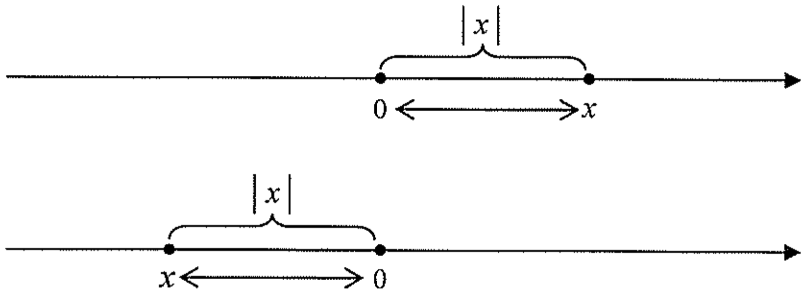
(3) $(-\infty, 0.34)$ หมายถึง เซตของจำนวนจริง x ซึ่ง $x < 0.34$



□

1.4 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value)

ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ คือ ขนาดของจำนวนจริง x กล่าวได้ว่า $|x|$ เป็นจำนวนที่ไม่เป็นค่าลบที่บอกระยะห่างระหว่าง x บนเส้นจำนวนจริงและ 0



ดังนั้น

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

เช่น

(1) $|-5| = -(-5) = 5$

(2) $|2| = 2$

(3) $|-4.8| = -(-4.8) = 4.8$

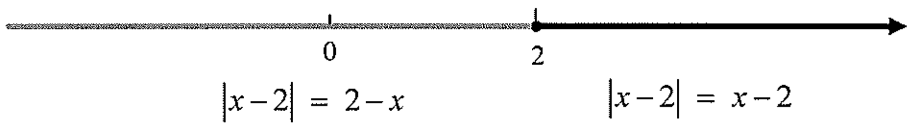
(4) $|0| = 0$

(5) $\left|\frac{19}{5}\right| = \frac{19}{5}$

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียน $|x-2|$ โดยใช้บทนิยาม

วิธีทำ

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & x-2 < 0 \end{cases}$$



□

สมบัติของค่าสัมบูรณ์ ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ

(1) $|x| = |-x|$

(2) $|xy| = |x||y|$

(3) $|x-y| = |y-x|$

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

(5) $|x+y| \leq |x|+|y|$

1.5 เลขชี้กำลัง (Exponents)

ให้ x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \; . \; . \; . \; x}_{\text{คูณกัน } n \text{ ครั้ง}}$$

เรียก n ว่า เลขชี้กำลัง (exponent) และ x เป็นฐาน (base) ตัวอย่าง เช่น

(1) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$

(2) $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$

(3) $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

กรณีเฉพาะ ถ้า $x \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

(1) $x^0 = 1$

(2) $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

สมบัติของเลขชี้กำลัง ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

(1) $x^m x^n = x^{m+n}$

(2) $(x^m)^n = x^{mn}$

(3) $(xy)^n = x^n y^n$

(4) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$ $(y \neq 0)$

(5) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \dfrac{1}{x^{n-m}}$ $(x \neq 0)$

ตัวอย่างที่ 4 จงจัดรูปให้เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

(1) $(2x^{-3}y^{2})^{-4}$

(2) $\left(\dfrac{x^{-4}}{y^{3}}\right)^{-5}$

(3) $\dfrac{7x^{-2}(x+y)^{3}}{21x^{5}(x+y)^{-4}}$

วิธีทำ

(1)
$$
\begin{aligned}
(2x^{-3}y^{2})^{-4} &= (2^{-4})(x^{-3})^{-4}(y^{2})^{-4} \\
&= \frac{1}{2^{4}}x^{12}\,y^{-8} \\
&= \frac{x^{12}}{16y^{8}}
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x^{-4}}{y^{3}}\right)^{-5} &= \frac{(x^{-4})^{-5}}{(y^{3})^{-5}} \\
&= \frac{x^{20}}{y^{-15}} \\
&= x^{20}y^{15}
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
\frac{7x^{-2}(x+y)^{3}}{21x^{5}(x+y)^{-4}} &= \frac{x^{-2-5}(x+y)^{3-(-4)}}{3} \\
&= \frac{x^{-7}(x+y)^{7}}{3} \\
&= \frac{(x+y)^{7}}{3x^{7}}
\end{aligned}
$$

$\square$

1.6 รากที่ n (n^{th} root)

ให้ x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$x^{\frac{1}{n}}$ เป็นรากหลักที่ n ของ x (principal n^{th} root)

นิยามโดย

$$x^{\frac{1}{n}} = y \quad \text{ถ้า} \quad y^n = x$$

และ

(1) $y \geq 0$ เมื่อ $x \geq 0$ และ n เป็นเลขคู่

(2) $y < 0$ เมื่อ $x < 0$ และ n เป็นเลขคี่

สัญกรณ์ รากหลักที่ n ของ x เขียนโดยใช้สัญกรณ์ $\sqrt[n]{x}$

$\sqrt[n]{x}$ แทน $x^{\frac{1}{n}}$ (รากหลักที่ n ของ x)

หมายเหตุ

(1) สัญกรณ์ $\sqrt[n]{}$ เรียกว่า radical

(2) สัญกรณ์ $\sqrt{}$ หมายถึง รากที่ 2

ตัวอย่างที่ 5

(1) $\sqrt{4} = 2$ (ไม่ใช่ -2)

เพราะว่า $2^2 = 4$ (เป็นค่าบวกทั้งคู่)

(2) $\sqrt[3]{8} = 2$

เพราะว่า $2^3 = 8$ (เป็นค่าบวกทั้งคู่)

(3) $\sqrt[3]{-8} = -2$

เพราะว่า $(-2)^3 = -8$ (เป็นค่าลบทั้งคู่ 3 เป็นเลขคี่)

(4) $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

(5) $\sqrt[3]{-8y^3} = -2y$

เพราะว่า $(-2y)^3 = -8y^3$

ถ้า x เป็นจำนวนจริงค่าลบ และ n เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว ค่าของ $\sqrt[n]{x}$ ในระบบจำนวนจริง**ไม่นิยาม**

เช่น

$$\sqrt{-9},\quad \sqrt[4]{-16},\quad \sqrt[6]{-36} \qquad \text{(ไม่นิยาม)}$$

เลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

$$x^{m/n} = (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

ตัวอย่างที่ 6

(1) $$32^{2/5} = \left(32^{1/5}\right)^2 = \left(\sqrt[5]{32}\right)^2 = \left(\;\ldots 2 \ldots\;\right)^2 = \ldots 4 \ldots$$

(2) $$\left(81x^4\right)^{-3/4} = \left(\left(81x^4\right)^{1/4}\right)^{-3} = \left(\sqrt[4]{81x^4}\right)^{-3} = (3x)^{-3}$$

$$= \frac{\ldots 1 \ldots}{\left(\;\ldots 3x \ldots\;\right)^3} = \frac{1}{\ldots 27x^3 \ldots}$$

□

ตัวอย่างที่ 7 สมบัติของเลขชี้กำลังเป็นจริง ในกรณีเลขชี้กำลังเป็นเลขเศษส่วน

(1) $$x^{-1/2}\,x^{3/2} = x^{-1/2+3/2} = x^{2/2} = x$$

(2) $$\left(x^{-5/7}\right)^{-14} = x^{(-5/7)(-14)} = x^{10}$$

(3) $$\left(\frac{x^{-9}}{y^{-6}}\right)^{-2/3} = \frac{\left(x^{-9}\right)^{-2/3..}}{\left(y^{-6}\right)^{-2/3.}} = \frac{x^{(-9)(-2/3)}}{y^{(-6)(-2/3)}} = \frac{x^6}{y^4}$$

สมบัติของรากที่ n

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น ถ้ารากที่ n และ m ต่อไปนี้นิยาม แล้ว

(1) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$

(2) $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

(3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$

ตัวอย่างที่ 8 จงใช้สมบัติของรากที่ n จัดรูปในข้อต่อไปนี้ให้ง่ายขึ้น (x และ y เป็นจำนวนจริงบวก)

(1) $\sqrt{63}$ (2) $\sqrt{125x^2}$ (3) $\sqrt[4]{\dfrac{32x^9}{81y^4}}$ (4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{y^{30}}}$

วิธีทำ

(1) $\sqrt{63} = \sqrt{(9)(7)} = \sqrt{9}\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

(2) $\sqrt{125x^2} = \sqrt{(25x^2)(5)} = \sqrt{25x^2}\sqrt{5} = 5\sqrt{5}..x....$

(3) $\sqrt[4]{\dfrac{32x^9}{81y^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{32x^9}}{\sqrt[4]{81y^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{16x^8\cdot 2x}}{.....\sqrt[4]{81y^4}.........} = \dfrac{..2x^2\sqrt[4]{2x}....}{......3y.............}$

(4) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{y^{30}}} = \sqrt[5\times 3]{y^{30}} = y^{30/..15..} = \ldots y^2 \ldots$

□

บทที่ 2
การดำเนินการทางพีชคณิต

2.1 นิพจน์ทางพีชคณิต (Algebraic Expression)

นักศึกษามักจะต้องจัดการหรือดำเนินการกับพจน์ในลักษณะต่อไปนี้

$$-2,\quad \sqrt{2},\quad 5,\quad 2x+3,\quad x^2+3x-4,\quad 2y^2+5y-3,\quad y^3-1,\quad 6x^3y^2-4,$$
$$2xy-x^2+y^2-1,\quad \sqrt{x^2+y^2},\quad x^3-y^3+2xy+2xyz,\quad x^2y-yz^2+zx^2-1,$$
$$(x+y+z)^3,\quad \frac{x+y}{x-y},\quad \frac{1}{x^2+y^2-1},\quad \frac{6x^3y^2+4}{y^3-x},\ \ldots$$

ซึ่งเกิดจากการบวก การลบ การคูณ การหาร การยกกำลัง การหารากของจำนวนหรือตัวแปร (variable) $x, y, z, \ldots$ เรียกว่า นิพจน์ทางพีชคณิต

ตัวแปร เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แทนปริมาณที่วัดได้ เช่น เวลา น้ำหนัก อุณหภูมิ ความดัน ระยะทาง พื้นที่ ปริมาตร จำนวนนักศึกษา,. . . เป็นต้น

ถ้าแทนค่าตัวแปรด้วยจำนวน เช่น $x=1$ และ $y=-1$ ใน

$$2xy-x^2+y^2-1 \quad \text{จะได้} \quad 2(1)(-1)-(1)^2+(-1)^2-1 \;=\; -3$$

ถ้าเลขชี้กำลังของตัวแปรตัวเดียวกันเท่ากัน แต่แตกต่างกันเฉพาะสัมประสิทธิ์ที่เป็นค่าคงตัว เรียกพจน์เหล่านี้ว่า พจน์ที่คล้ายกัน (like terms) เช่น $3x^2y,\ -2x^2y$ และ x^2y เป็นพจน์ที่คล้ายกัน

2.2 เอกลักษณ์ทางพีชคณิต (Algebraic Identities)

ให้ a และ b แทนจำนวนจริง เอกลักษณ์ทางพีชคณิตที่สำคัญๆ คือ

(1) $(a+b)^2 \;=\; a^2+2ab+b^2$

(2) $(a-b)^2 \;=\; a^2-2ab+b^2$

(3) $(a-b)(a+b) \;=\; a^2-b^2$

(4) $(a+b)(a^2-ab+b^2) \;=\; a^3+b^3$

(5) $(a-b)(a^2+ab+b^2) \;=\; a^3-b^3$

(6) $(a+b)^3 \;=\; a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(7) $(a-b)^3 \;=\; a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

2.3 พหุนาม (Polynomials)

นักศึกษาต้องรู้จักคำว่า พหุนาม (polynomials) ซึ่งหมายถึง นิพจน์ทางพีชคณิตซึ่งเกิดจากการบวก การลบ การคูณ เท่านั้น เช่น

$$5x+2, \quad 3x^2-2x+7, \quad 4xy^4-3xy+5x+6y^2-2$$

แต่ $\dfrac{6x^3+4}{x-1}$ ไม่เป็นพหุนาม เพราะว่า มีการหาร

$5y^2+\sqrt{y}-1$ ไม่เป็นพหุนาม เพราะว่า มีการหารากที่สอง

พหุนามในตัวแปรเดียว เช่น

$$5x+2, \quad y^2-y+1, \quad x^3+3x^2+3x-1, \quad x^2+x+\sqrt{2}, \quad -z^3+z-4, \ \ldots$$

พหุนามในสองตัวแปร เช่น

$$5xy, \quad x^2+y^2, \quad x^3y-y^3-2xy+1$$

ระดับขั้นหรือดีกรี (degree) ของพหุนามในตัวแปรเดียว คือ เลขชี้กำลังสูงสุดของตัวแปร เช่น

ระดับขั้นของพหุนาม	$3x^2-x+5$	คือ	2
ระดับขั้นของพหุนาม	$1-\frac{3}{4}y^5$	คือ	5
ระดับขั้นของพหุนาม	$1-z+z+z^3$	คือ	3
ระดับขั้นของพหุนาม	$1+2t$	คือ	....1.......
ระดับขั้นของพหุนาม	$\sqrt{2}-x+\sqrt{3}x^3$	คือ	....3.......
ระดับขั้นของพหุนาม	$-\sqrt{2}x+4$	คือ	....1.......

ระดับขั้นของพหุนามในสองตัวแปร คือ ผลบวกของเลขชี้กำลังที่สูงสุดของตัวแปร เช่น

ระดับขั้นของพหุนาม	$3xy^2-xy+\frac{x}{2}+\sqrt{2}y$	คือ	3
ระดับขั้นของพหุนาม	$3zx+3xy-5yz$	คือ	...2........
ระดับขั้นของพหุนาม	x^2+y^2-x+y	คือ	...2........

นักศึกษาสามารถ บวก ลบ คูณ พหุนามได้ โดย

พจน์ที่คล้ายกัน บวก ลบ กันได้

ใช้สมบัติของเลขชี้กำลัง

ใช้กฎการกระจาย

ตัวอย่างที่ 1 จงดำเนินการนิพจน์ต่อไปนี้

(1) $(4x^3+7x-13)+(-2x^3+5x+17)$

(2) $(2x^3+3x^2-5x+11)-(4x^3-5x^2+9)$

(3) $(-2x)(7x^3)(-x^4)$

(4) $(2x^2y)^2(-3x^3y^2)^3$

(5) $(3x-5)(4x+1)$

(6) $(2x^2y^2)(4xy^2-3x^2y^5-8)$

(7) $(x^2-2x+1)(x^2+x+2)$

(8) $(x-1)(x-1)(x-1)$

(9) $\left(\sqrt{2}-x\right)\left(\sqrt{2}+x\right)$

(10) $(x+y)^3$

วิธีทำ

(1) $(4x^3+7x-13)+(-2x^3+5x+17)$

$= (4x^3-2x^3)+(7x+5x)+(-13+17)$

$= 2x^3+12x+4$

(2) $(2x^3+3x^2-5x+11)-(4x^3-5x^2+9)$

$=$ ....$(2x^3-4x^3)+(3x^2-(-5x^2))+(-5x)+(11-9)$........

$=$ ....$-2x^3+8x^2-5x+2$..

(3) $(-2x)(7x^3)(-x^4)$

$=$ .....$(-2)(7)(-1)x^{1+3+4}$.................................

$=$ ....$14x^8$...

(4) $(2x^2y)^2(-3x^3y^2)^3$

$=$ ..$(2)^2(x^2)^2(y)^2(-3)^3(x^3)^3(y^2)^3$................

$=$ ....$4x^4y^2\cdot(-27)x^9y^6$.................................

$=$ ....$-108x^{4+9}y^{2+6}$.......................................

$=$ ....$-108x^{13}y^8$...

(5) $(3x-5)(4x+1)$

$= ....(3x-5)(4x)+(3x-5)(1)......................$

$= ....12x^2-20x+3x-5..............................$

$= ....12x^2-17x-5.....................................$

(6) $(2x^2y^2)(4xy^2-3x^2y^5-8)$

$= ....2x^2y^2(4xy^2)-2x^2y^2(3x^2y^5)-2x^2y^2(8)....................$

$= ....8x^3y^4-6x^4y^7-16x^2y^2...$

(7) $(x^2-2x+1)(x^2+x+2)$

$= ...(x^2-2x+1)(x^2)+(x^2-2x+1)(x)+(x^2-2x+1)(1)......$

$= ...(x^4-2x^3+x^2)+(x^3-2x^2+x)+(2x^2-4x+2)...........$

$= ...x^4-x^3+x^2-3x+2...$

(8) $(x-1)(x-1)(x-1)$

$= ....(x-1)^3..$

$= .....x^3-3x^2+3x-1.................................$

(9) $(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)$

$= ......\left(\sqrt{2}\right)^2-(x)^2.......................................$

$= ......2-x^2..$

(10) $(x+y)^3$

$= .....x^3+3x^2y+3xy^2+y^3............................$

2.4 การแยกตัวประกอบพหุนาม

พหุนามที่มีตัวประกอบเป็นตัวมันเอง 1 และ –1 เท่านั้น เรียกว่า prime polynomial เช่น

$$x+1,\quad x^2+1,\quad 1+y+y^2,\quad 2x+3y,\ \ldots$$

การแยกตัวประกอบพหุนาม คือ การแยกตัวประกอบพหุนามเป็นผลคูณของ prime polynomial

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

(1) $2x^2-5x$ (2) $3x^2y^5-5xy^3$

วิธีทำ

(1) $2x^2-5x = x(2x-5)$

(2) $3x^2y^5-5xy^3 = xy^3(3xy^2)+xy^3(-5)$

$= xy^3(..3xy^2-5....................)$

□

ตัวอย่างที่ 3 จงใช้เอกลักษณ์แยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้

(1) $16x^2-49y^2$ (2) $8x^3+27y^3$ (3) x^4-y^4

วิธีทำ

(1) $16x^2-49y^2 = (4x)^2-(7y)^2 = (4x-7y)(..4x+7y..)$

(2) $8x^3+27y^3 = (2x)^3+(3y)^3$

$= (2x+3y)\left[(2x)^2-(..2x..)(..3y..)+(..3y..)^2\right]$

$= \ldots(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2).......$

(3) $x^4-y^4 = (x^2)^2-(y^2)^2 = (x^2-y^2)(..x^2+y^2..)$

$= (\ldots x-y\ldots)(..x+y..)(..x^2+y^2..)$

□

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้ให้ได้ตัวประกอบ prime polynomial

(1) $3x^2+x-2$ (2) $12x^3+x^2-20x$

วิธีทำ

(1) $3x^2+x-2 \quad = \quad (3x-2)(...x+1..)$

(2) $12x^3+x^2-20x \quad = \quad x(12x^2+x-20)$

$= \quad x(..4x-5..)(..3x+4..)$

□

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบ

$$x^2+x-y^2-y$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^2+x-y^2-y &= (x^2-y^2)+(x-y) \\ &= (x-y)(..x+y..)+(x-y) \\ &= (x-y)\left[(..x+y..)\ +\ ...1...\right] \\ &= ...(x-y)(x+y+1)............ \end{aligned}$$

□

2.5 นิพจน์ตรรกยะ (Rational Expression)

ผลหารของพหุนาม เรียกว่า นิพจน์ตรรกยะ เช่น

$$\frac{2}{3},\ -\frac{1}{x},\ \frac{1-x}{1+x},\ \frac{3}{t^2-4},\ \frac{4y^3+1}{y^4+5y^2-8},\ \ldots$$

ดังนั้น พหุนามในตัวส่วน ต้องไม่เป็นศูนย์

พิจารณา

$$\frac{5x}{x^3-x} = \frac{5x}{x(x^2-1)} = \frac{5x}{x(x-1)(x+1)}$$

ดังนั้น $x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq ..-1...$

ในทำนองเดียวกับเศษส่วนของจำนวน รูปแบบตรรกยะ หรือผลหารของพหุนามนี้ สามารถตัดทอนให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำได้ โดยใช้หลักการ

$$\frac{PK}{QK} = \frac{P}{Q} \quad \text{สำหรับ } Q \neq 0 \text{ และ } K \neq 0$$

ตัวอย่างที่ 6 จงจัดรูปตรรกยะต่อไปนี้ให้ง่ายขึ้น

(1) $\dfrac{12x^2y}{9xy^2}$ (2) $\dfrac{2x^2+5x-3}{10x^2+9x-7}$

วิธีทำ

(1) $$\frac{12x^2y}{9xy^2} = \frac{(3xy)(4x)}{(3xy)(3y)} = \dots\frac{4x}{3y}\dots\dots$$

(2) $$\frac{2x^2+5x-3}{10x^2+9x-7} = \frac{(2x-1)(\dots x+3\dots)}{(2x-1)(\dots 5x+7\dots)} = \dots\frac{x+3}{5x+7}\dots\dots$$

□

ในวิชาแคลคูลัส นักศึกษาต้องสามารถจัดรูปพจน์ที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบได้ พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7 จงจัดรูปโดยไม่ให้เลขชี้กำลังเป็นลบ

$$-4y^4(2y-1)^{-5}(2)+4y^3(2y-1)^{-4}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
&-4y^4(2y-1)^{-5}(2)+4y^3(2y-1)^{-4} \\
&\quad = 4y^3(2y-1)^{-5}\left[-2y+(\dots 2y-1\dots)\right] \quad (\text{แยกตัวประกอบ } 4y^3(2y-1)^{-5} \text{ ออก}) \\
&\quad = 4y^3(2y-1)^{-5}\left(-2y+2y-1\right) \\
&\quad = \dots 4y^3(2y-1)^{-5}(-1)\dots\dots \\
&\quad = \dots\frac{-4y^3}{(2y-1)^5}\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

□

การคูณ การหาร รูปแบบตรรกยะ ใช้หลักการ

(1) $\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{R}{S} = \dfrac{PR}{QS}$

(2) $\dfrac{P}{Q}\div\dfrac{R}{S} = \dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{S}{R} = \dfrac{PS}{QR} \qquad \left(\dfrac{R}{S}\neq 0\right)$

ตัวอย่างที่ 8 จงดำเนินการคูณและหารในข้อต่อไปนี้

(1) $\dfrac{x^2+4x+4}{2x^2+2x-4}\cdot\dfrac{2x-2}{x^2+2x}$ (2) $\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-100}\div\dfrac{x^2-7x+10}{x^2+12x+20}$

วิธีทำ

(1)
$$\begin{aligned}\frac{x^2+4x+4}{2x^2+2x-4}\cdot\frac{2x-2}{x^2+2x} &= \frac{(x^2+4x+4)(2x-2)}{(2x^2+2x-4)(x^2+2x)}\\ &= \frac{(x+2)(x+2)(2)(x-1)}{(2)(x+2)(\ldots x-1\ldots)(x)(\ldots x+2\ldots)}\\ &= \ldots\ldots\frac{1}{x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\frac{x^2-10x+25}{x^2-100}\div\frac{x^2-7x+10}{x^2+12x+20} &= \frac{x^2-10x+25}{x^2-100}\cdot\frac{x^2+12x+20}{x^2-7x+10}\\ &= \frac{(x^2-10x+25)(x^2+12x+20)}{(x^2-100)(x^2-7x+10)}\\ &= \frac{(x-5)(x-5)(x+2)(\ldots x+10\ldots)}{(\ldots x-10..)(\ldots x+10..)(x-2)(\ldots x-5..)}\\ &= \ldots\frac{(x-5)(x+2)}{(x-10)(x-2)}\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

□

การบวก และ การลบ รูปแบบตรรกยะ ใช้หลักการ

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{Q} = \frac{P+R}{Q}$$

$$\frac{P}{Q}-\frac{R}{Q} = \frac{P-R}{Q}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงดำเนินการ บวก และ ลบ และจัดให้อยู่ในรูปที่ง่ายที่สุด

(1) $\frac{3}{2x+4} + \frac{5}{2x+4}$ (2) $\frac{x}{4-x^2} - \frac{2}{4-x^2}$

วิธีทำ

(1)
$$\frac{3}{2x+4} + \frac{5}{2x+4} = \frac{3+5}{2x+4} = \frac{8}{2x+4} = \frac{4}{x+2}$$

2)
$$\frac{x}{4-x^2} - \frac{2}{4-x^2} = \frac{x-2}{4-x^2} = \frac{-(2-x)}{(2-x)(2+x)} = \frac{-1}{2+x}$$

□

ในวิชาแคลคูลัส นักศึกษาต้องมีทักษะจัดรูปที่มีรากที่ n โดยทำให้พจน์ที่เป็นรากที่ n ไม่ติดค่าราก การทำให้ตัวส่วนไม่ติดค่าราก เช่น

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

ตัวอย่างที่ 14 จงทำให้ตัวส่วนไม่ติดค่ารากที่ 2

$$\frac{4}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}$$

วิธีทำ ใช้เอกลักษณ์ $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}} &= \frac{4}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}} \cdot \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}} \\
&= \frac{4\left(2\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)}{\left(2\sqrt{x}\right)^2-\left(3\sqrt{y}\right)^2} \\
&= \frac{8\sqrt{x}+12\sqrt{y}}{4x-9y}
\end{aligned}$$

□

ตัวอย่างที่ 15 จงจัดรูป $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{3}$ โดยทำให้เศษไม่ติดรากที่ 2

วิธีทำ ใช้เอกลักษณ์ $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{3} &= \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{3} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{3\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)} = \frac{x+3-x}{3\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{3}{3\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

□

บทที่ 3

สมการ (Equations)

3.1 สมการ

สมการ คือ ประโยคซึ่งแสดงการเท่ากันของนิพจน์ทางคณิตศาสตร์

สมการแบบหนึ่งตัวแปร เช่น

$$3x-5 = 0$$

$$1-2x+x^2 = 0$$

$$\sqrt{5y-7} = 11$$

$$|3y-5| = 2$$

สมการแบบสองตัวแปร เช่น

$$x^2+y^2 = 16$$

$$x^2-2xy+y^2 = 1$$

$$x = \frac{1}{y}$$

การแก้สมการแบบหนึ่งตัวแปร คือ การหาค่าของตัวแปรที่ทำให้สมการเป็นจริง ค่าของตัวแปรที่ทำให้สมการเป็นจริง เรียกว่า ผลเฉลย คำตอบ หรือ ราก (roots) ของสมการ เช่น

$\frac{5}{3}$ เป็นรากของสมการ

$$3x-5 = 0$$

เพราะว่า

$$3\left(\frac{5}{3}\right)-5 = 5-5 = 0$$

> การแก้สมการ ใช้หลักการง่ายๆ คือ
>
> (1) สมบัติการบวก
>
> ถ้า $P = Q$ แล้ว $P+R = Q+R$
>
> และ $P-R = Q-R$
>
> (2) สมบัติการคูณ
>
> ถ้า $P = Q$ และ $R \neq 0$ แล้ว
>
> $PR = QR$ และ $\frac{P}{R} = \frac{Q}{R}$

3.2 สมการเชิงเส้น (Linear equations)

สมการเชิงเส้น หรือ สมการระดับขั้น 1 หรือ สมการเส้นตรง เป็นสมการพหุนามที่ตัวแปรในสมการมีเลขชี้กำลังเป็น 1 และไม่มีผลคูณของตัวแปร เช่น

$$4x-7 = 1 \qquad \text{(ตัวแปรเดียว)}$$

$$2t+5 = 1-t \qquad \text{(ตัวแปรเดียว)}$$

$$2x+5y = 4-3y \qquad \text{(สองตัวแปร)}$$

$$x+y+z = 3 \qquad \text{(สามตัวแปร)}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ

$$4(x-3) = 2(3x+1)+5x$$

วิธีทำ จัดรูปสมการและใช้สมบัติการบวกและการคูณ

$$\begin{aligned}
4(x-3) &= 2(3x+1)+5x \\
4x-12 &= 6x+2+5x \\
4x-12 &= 11x+2 \\
4x &= 11x+14 && \text{(12 บวกทั้งสองข้าง)} \\
-7x &= 14 && (-11x \text{ บวกทั้งสองข้าง}) \\
x &= \frac{14}{-7} && (-\tfrac{1}{7} \text{ คูณทั้งสองข้าง})
\end{aligned}$$

ดังนั้น $x = -2$ □

โจทย์ จงแก้สมการเชิงเส้นต่อไปนี้

(1)
$$\begin{aligned}
34-3x &= 4(3-2x)+23 \\
34-3x &= 12x-8x+23 \\
34-3x &= 35-8x \\
-3x+8x &= 35-34 && (8x \text{ บวกทั้งสองข้าง}) \\
5x &= 1 \\
x &= \frac{1}{5} && (\tfrac{1}{5} \text{ คูณทั้งสองข้าง})
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
8(5x-1)+36 &= -3(x+5) \\
40x-8+36 &= -3x-15 \\
40x+28 &= -3x-15 \\
40x &= -3x-43 && (-28 \text{ บวกทั้งสองข้าง}) \\
43x &= -43 && (3x \text{ บวกทั้งสองข้าง}) \\
x &= -1 && (1/43 \text{ คูณทั้งสองข้าง})
\end{aligned}$$

(3) $$3y-2(y+1) = 2(y-1)$$
$$3y-2y-2 = 2y-2$$
$$3y-2y-2y = -2+2$$
$$-y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

(4) $$8 = 3s-8(7-s)+23$$
$$8 = 3s-56+8s+23$$
$$8 = 11s-33$$
$$41 = 11s \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{41}{11}$$

(5) $$11-7(1-2t) = 9(t+1)$$
$$11-7+14t = 9t+9$$
$$5t = 5 \quad \Longrightarrow \quad t = 1$$

(6) $$7(\theta-3) = 4(\theta+5)-47$$
$$7\theta-21 = 4\theta+20-47$$
$$7\theta = 4\theta-6$$
$$3\theta = -6 \quad \Longrightarrow \quad \theta = -2$$

(7) $P = 2s+2w$ (หา s)
$$2s+2w = P$$
$$2s = P-2w$$
$$s = \frac{P-2w}{2}$$

(8) $5F = 9C+100$ (หา C)
$$9C+100 = 5F$$
$$9C = 5F-100$$
$$C = \frac{5F-100}{9}$$

□

การแก้สมการที่มีเศษส่วน ต้องคูณสมการด้วย LCD ของเศษส่วนในสมการ

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ (ไม่ใช่สมการเชิงเส้น)

(1) $\frac{5}{x-5} + 6 = \frac{x}{x-5}$ (2) $\frac{3}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{x-1}$

วิธีทำ

(1) คูณสมการด้วย $x-5$ ซึ่งเป็น LCD

$$\begin{aligned}
(x-5)\left(\frac{5}{x-5}+6\right) &= (x-5)\left(\frac{x}{x-5}\right) \\
(x-5)\left(\frac{5}{x-5}\right) + (x-5)6 &= (x-5)\left(\frac{x}{x-5}\right) \\
5+(x-5)6 &= x \qquad \longleftarrow \text{(สมการเชิงเส้น)} \\
5+6x-30 &= x \\
6x-25 &= x \\
5x &= 25 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

ตรวจสอบว่า $x = 5$ เป็นผลเฉลยหรือคำตอบของสมการที่กำหนดมาให้โดยการแทนค่า $x = 5$ ในสมการได้

$$\frac{5}{5-5}+6 = \frac{x}{5-5}$$

แต่การหารด้วยศูนย์ไม่สามารถทำได้ ดังนั้น สมการที่กำหนดมาไม่มีผลเฉลย $x = 5$ เป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง (ต้องระวังกรณีเช่นนี้)

(2) คูณสมการด้วย $2x(x-1)$ ซึ่งเป็น LCD

$$\begin{aligned}
2x(x-1)\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{2x}\right) &= 2x(x-1)\left(\frac{1}{x-1}\right) \\
2x(x-1)\left(\frac{3}{x}\right)-2x(x-1)\left(\frac{1}{2x}\right) &= 2x(x-1)\left(\frac{1}{x-1}\right) \\
6(x-1)-(x-1) &= 2x(2) \\
6x-6-x+1 &= 4x \\
5x-5 &= 4x \\
x &= 5
\end{aligned}$$

ตรวจสอบว่า $x = 5$ เป็นผลเฉลยของสมการหรือไม่ แทนค่า $x = 5$ ในสมการ

แทนค่าในด้านซ้ายได้

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6-1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

แทนค่าในด้านขวาได้

$$\frac{2}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $x = 5$ เป็นผลเฉลยของสมการ

□

ตัวอย่างที่ 3 นักชีววิทยามีสารละลาย A ซึ่งมีกรดที่ความเข้มข้น 60% สารละลาย B ซึ่งมีกรดที่ความเข้มข้น 75% ถ้านักชีววิทยาต้องการสารละลายโดยผสม A และ B ให้ได้ 10 ลิตร โดยให้ความเข้มข้นของกรดเป็น 65% แล้ว ต้องใช้สารละลาย A และ B อย่างละกี่ลิตร

วิธีทำ กำหนดตัวแปร x แทน จำนวนลิตรจากสารละลาย A

$\Rightarrow$ ใช้ $10 - x$ ลิตรจากสารละลาย B

	จำนวนลิตร	ความเข้มข้นของกรด	จำนวนลิตรของกรดในสารละลาย
สารละลาย A	x	0.60	$0.60x$
สารละลาย B	$10 - x$	0.75	$0.75(10 - x)$
ส่วนผสม (A และ B)	10	0.65	6.5

ดังนั้น สมการที่ได้คือ (แล้วแก้สมการหา x)

$$0.6x + 0.75(10 - x) = 6.5$$

$$0.6x + 7.5 - 0.75x = 6.5$$

$$7.5 - 0.15x = 6.5$$

$$-0.15x = -1.0$$

$$x = \frac{-1.0}{-0.15} = \frac{20}{3}$$

ได้ $x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$

ดังนั้น ต้องใช้สารละลาย A จำนวน $6\frac{2}{3}$ ลิตร และ

สารละลาย B จำนวน $10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ ลิตร

เพื่อให้ได้ความเข้มข้นของกรดในสารละลายเป็น 65% □

3.3 สมการกำลังสอง (Quadratic Equations)

สมการกำลังสองในตัวแปรเดียว คือ สมการในรูป

$$ax^2+bx+c = 0$$

เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$ เช่น

(1) $2x^2-3x+1 = 0$

(2) $3x = x^2-4$

(3) $x^2 = 1$

(4) $9-y^2 = 0$

3.3.1 การแก้สมการกำลังสองโดยการแยกตัวประกอบ

จัดรูปสมการกำลังสองเป็นแบบมาตรฐาน คือ

$$ax^2+bx+c = 0$$

(ด้านขวาของสมการเป็นศูนย์ นักศึกษามักจะทำผิดตรงนี้) และใช้สมบัติของจำนวนจริงที่ว่า

(*) $ab=0$ ก็ต่อเมื่อ $a=0$ หรือ $b=0$ หรือทั้ง a และ b เป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ

(1) $2x^2-5x = -2$ (2) $\frac{12}{y}-7 = \frac{12}{1-y}$

วิธีทำ

(1) จัดเป็นแบบมาตรฐานก่อน แล้วแยกตัวประกอบ

$$2x^2-5x+2 = 0$$
$$(2x-1)(x-2) = 0$$

(ใช้สมบัติ (*))

$$\Rightarrow \quad 2x-1 = 0,\quad x = \frac{1}{2} \qquad\Big|\qquad x-2 = 0,\quad x = 2$$

ดังนั้น รากของสมการคือ $\frac{1}{2}$ และ 2

(2) คูณสมการด้วย $y(1-y)$ (เป็น LCD)

$$
\begin{aligned}
y(1-y)\left(\frac{12}{y}-7\right) &= y(1-y)\left(\frac{12}{1-y}\right) \\
y(1-y)\left(\frac{12}{y}\right)-y(1-y)(7) &= y(1-y)\left(\frac{12}{1-y}\right) \\
(1-y)(12)-7y(1-y) &= 12y \\
12-12y-7y+7y^2 &= 12y
\end{aligned}
$$

(รวมพจน์และจัดเป็นสมการมาตรฐาน)

$$
\begin{aligned}
7y^2-31y+12 &= 0 \\
(7y-3)(y-4) &= 0
\end{aligned}
$$

(ใช้สมบัติ (*))

$\Rightarrow$

$7y-3 = 0$	$y-4 = 0$
$y = \frac{3}{7}$	$y = 4$

ตรวจสอบผลเฉลยที่ได้ โดยแทนค่าในสมการ

$y=\frac{3}{7}$ แทนค่า $\quad \frac{12}{\frac{3}{7}}-7 = \frac{12}{1-\frac{3}{7}}$	$y=4$ แทนค่า $\quad \frac{12}{4}-7 = \frac{12}{1-4}$
$28-7 = 21$	$3-7 = \frac{12}{-3}$
$21 = 21$	$-4 = -4$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ คือ $\frac{3}{7}$ และ -4

$\square$

โจทย์ จงแก้สมการต่อไปนี้ โดยการแยกตัวประกอบ

(1) $x^2+5x = 0$

$x(x+5) = 0$

$x = 0$	$x+5=0$
	$x=-5$

ดังนั้น รากสมการ คือ 0 และ –5

(2) $y^2 - 6y + 8 = 0$

$(y-4)(y-2) = 0$

$y-4=0$	$y-2=0$
$y=4$	$y=2$

ดังนั้น รากของสมการคือ 4 และ 2

(3) $-6t^2 + 5t - 1 = 0$

$6t^2 - 5t + 1 = 0$

$(3t-1)(2t-1) = 0$

$3t-1=0$	$2t-1=0$
$t=\frac{1}{3}$	$t=\frac{1}{2}$

ดังนั้น รากของสมการคือ $\frac{1}{3}$ และ $\frac{1}{2}$

(4) $18t^3 + 15t^2 - 12t = 0$

$3t(6t^2 + 5t - 4) = 0$

$3t(3t+4)(2t-1) = 0$

$3t=0$	$3t+4=0$	$2t-1=0$
$t=0$	$t=\frac{-4}{3}$	$t=\frac{1}{2}$

ดังนั้น รากของสมการคือ $\frac{-4}{3}$, 0 และ $\frac{1}{2}$

(5) $6z^2 - z^4 = z^3$

$-z^4 - z^3 + 6z^2 = 0$

$z^4 + z^3 - 6z^2 = 0$

$z^2\left(z^2 + z - 6\right) = 0$

$z^2(z+3)(z-2) = 0$

$z^2=0$	$z+3=0$	$z-2=0$
$z=0$	$z=-3$	$z=2$

ดังนั้น รากของสมการคือ -3, 0 และ 2

$\square$

3.3.2 การแก้สมการกำลังสองโดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

จัดสมการกำลังสอง

$$ax^2+bx+c = 0$$

ให้อยู่ในรูป

$$(x+d)^2 = r$$

ซึ่งเรียกว่า รูปกำลังสองสมบูรณ์ การทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ (completing the square) ทำได้โดยง่าย สังเกตจาก

$$\boxed{x^2+mx+\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{m}{2}\right)^2}$$

ครึ่งหนึ่งของ m

ตัวอย่างที่ 5

(1) $$x^2+2x+(1)^2 = (x+1)^2$$

$$\frac{2}{2} = 1$$

(2) $$x^2+6x+9 = (x+3)^2$$

$$\frac{6}{2} = 3$$

(3) $$x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36} = \left(x-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3}\right) = -\frac{1}{6}$$

(4) $$x^2-x+\frac{1}{4} = \left(\dots x-\frac{1}{2}\dots\right)^2$$

(5) $$x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9} = \left(\ldots x+\frac{2}{3}\ldots\right)^2$$

(6) $$x^2+\pi x+\frac{\pi^2}{4} = \left(\ldots x+\frac{\pi}{2}\ldots\right)^2$$

(7) $$x^2-0.4x+0.04 = (\ldots x-0.2\ldots)^2$$

(8) $$x^2-\sqrt{2}\,x+\frac{2}{4} = \left(\ldots x-\frac{\sqrt{2}}{2}\ldots\right)^2$$

(9) $$x^2+\sqrt{3}\,x+\frac{3}{4} = \left(\ldots x+\frac{\sqrt{3}}{2}\ldots\right)^2$$

(10) $$y^2-\frac{y}{\sqrt{5}}+\frac{1}{20} = \left(\ldots y-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ldots\right)^2$$

□

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $2x^2-2x-1 = 0$ โดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

วิธีทำ จัดพจน์ที่มีตัวแปร x ไว้ข้างเดียวกัน โดยบวก 1 ทั้งสองข้างได้

$$2x^2-2x = 1$$

$$x^2-x = \frac{1}{2}$$ (ทำ ส.ป.ส. ของ x^2 เป็น 1)

$$x^2-x+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$ (ทำด้านซ้ายเป็นกำลังสองสมบูรณ์

โดยบวก $\left(\frac{1}{2}(-1)\right)^2 = \frac{1}{4}$ ทั้งสองข้าง)

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$ (เขียนด้านซ้ายเป็นกำลังสองสมบูรณ์)

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = 0$$

(แยกแฟกเตอร์และใช้สมบัติ (*))

$$x-\frac{1}{2} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \qquad\qquad x-\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$x-\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad x-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad x = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \qquad\qquad x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น รากของสมการคือ

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

□

3.3.3 การแก้สมการกำลังสองโดยสูตร

สมการกำลังสองในรูปมาตรฐาน

$$ax^2+bx+c = 0$$

($a \neq 0$) มีราก 2 ราก โดยคำนวณจากสูตรกำลังสอง (quadratic formula)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(นักศึกษาลองพิสูจน์สูตรนี้ โดยจัดสมการกำลังสองเป็นกำลังสองสมบูรณ์ เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 6)

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการกำลังสองโดยใช้สูตรกำลังสอง

(1) $2x^2-2x-1 = 0$ (2) $5x^2+2x = -1$

วิธีทำ

(1) $a = 2,\ b = -2,\ c = -1$ แทนค่าในสูตรได้

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น รากของสมการ คือ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ และ $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ (คำตอบเดียวกันกับตัวอย่างที่ 6)

(2) เขียนสมการเป็นแบบมาตรฐานได้

$$5x^2+2x+1 = 0$$

ดังนั้น $a=5,\quad b=2,\quad c=1$ แทนค่าในสูตรกำลังสองได้

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(5)(1)}}{2(1)} \\ &= \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} \\ &= \frac{2\pm\sqrt{-16}}{4} \end{aligned}$$

ค่าในรากที่สองเป็นค่าลบ ทำให้รากเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น สมการนี้ไม่มีรากที่เป็นจำนวนจริง

$\square$

โจทย์ จงหารากที่เป็นค่าจริงของสมการกำลังสองโดยสูตรกำลังสอง

(1) $2x^2+x = 1$

$$2x^2+x-1=0$$

$a=2,\ b=1,\ c=-1$ แทนค่าในสูตรกำลังสองได้

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(2)(-1)}}{2(2)} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} \\ &= \frac{-1\pm 3}{4} = \frac{1}{2},\ -1 \end{aligned}$$

(2) $3x^2 = 5x-1$

$$3x^2-5x+1 = 0$$

$a=3,\ b=-5,\ c=1$ แทนค่าในสูตรกำลังสองได้

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(1)}}{2(3)} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{25-12}}{6} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{13}}{6} \end{aligned}$$

(3) $2y^2-6y+3 = 0$

$a=2, b=-6, c=3$ แทนค่าในสูตรกำลังสองได้

$$y = \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(2)(3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{6\pm\sqrt{36-24}}{4}$$

$$= \frac{6\pm\sqrt{12}}{4} = \frac{2(3\pm\sqrt{3})}{4} = \frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$$

(4) $3u^2 = 4-4u$

$$3u^2+4u-4 = 0$$

$a=3, b=4, c=-4$ แทนค่าในสูตรกำลังสองได้

$$u = \frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{6}$$

$$= \frac{-4\pm\sqrt{64}}{6} = \frac{-4\pm 8}{6}$$

$$= \frac{2}{3},\ -2$$

(5) $LI^2+RI+\frac{1}{C} = 0$ (C เป็นค่าบวก)

$a=L, b=R, c=\frac{1}{C}$ แทนค่าในสูตรกำลังสองได้

$$\mathrm{I} = \frac{-R\pm\sqrt{R^2-4(L)\left(\frac{1}{C}\right)}}{2(L)}$$

$$= \frac{-R\pm\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}$$

□

บทที่ 4
ฟังก์ชัน (Functions)

4.1 บทนิยามของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันเกิดขึ้นมาได้อย่างไร ?

....

....

....

ตัวอย่างที่ 1

(1) พื้นที่ของวงกลมขึ้นอยู่กับรัศมี
ให้ A แทนพื้นที่ของวงกลมรัศมี r ดังนั้น กฎเกณฑ์ที่เชื่อมโยง r และ A คือ

$$A = \pi r^2$$

(2) จำนวนประชากรโลก P ขึ้นอยู่กับเวลา t (ปี)

ตารางแสดงจำนวนประชากรโดยประมาณในปี ค.ศ. ต่างๆ

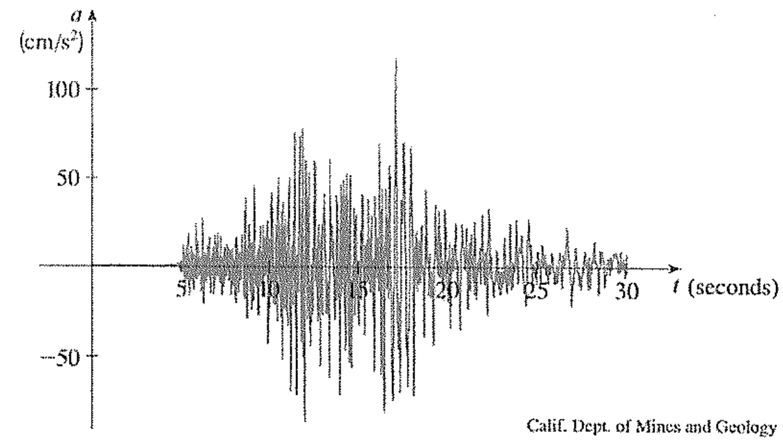
ปี	1950	1960	1970	1980	1990	2000
ประชากร (ล้าน)	2560	3040	3710	4450	5280	6080

ดังนั้น

$$P(1960) \cong 3710 \quad \text{ล้านคน}$$

P เป็น........................ของ..............................

(3) ความเร่งในแนวดิ่งของพื้นดินในช่วงเวลาที่เกิดแผ่นดินไหว วัดได้โดย seismograph แสดงด้วยกราฟ ดังเช่น กรณีที่เกิดแผ่นดินไหวใน Los Angeles ในปี ค.ศ. 1994 ความเร่งที่วัดได้ในช่วงเวลา 5 – 30 วินาที แสดงดังรูป



(ที่มาของรูป : Stewart หน้า 11)

ให้ a แทนความเร่ง (cm/s^2) และ t แทนเวลา (s)
กราฟแสดงความเร่ง a ณ เวลา t ในช่วง 5 – 30 วินาที

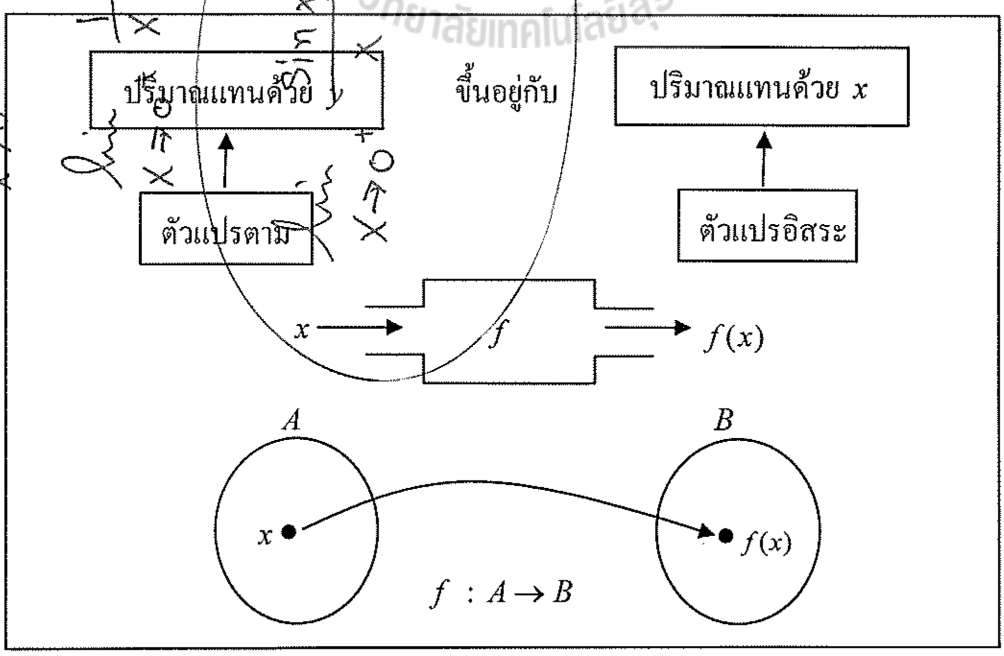
บทนิยามของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน f คือ กฎเกณฑ์เชื่อมโยงแต่ละสมาชิก x ในเซต A กับสมาชิก $f(x)$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นในเซต B (พิจารณากรณี เซต A และ B เป็นเซตของจำนวนจริง) ดังนั้น

$f(x)$ คือ ค่าของฟังก์ชัน f ที่ x

นิยมเขียนแทนค่า $f(x)$ ด้วยตัวแปร y นั่นคือ

$$y = f(x)$$



$f : A \to B$

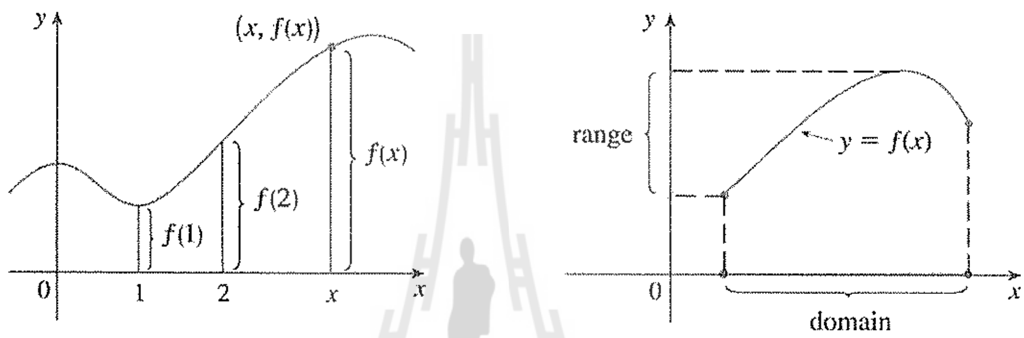
สิ่งที่ควรรู้

(1) โดเมน (domain) ของฟังก์ชัน f คือ เซต A

(2) เรนจ์ (range) ของฟังก์ชัน f คือ $\{ f(x) \mid x \in A \}$

(3) กราฟของฟังก์ชัน f คือ เซตของคู่อันดับ

$$\{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$$



(ที่มาของรูป : Stewart หน้า 12)

ตัวอย่างที่ 2

(1) $f(x) = \pi x^2$ หรือ $y = \pi x^2$

(ถ้า x เป็นรัศมีวงกลม แล้ว $f(x)$ คือ พื้นที่ของวงกลมที่มีรัศมียาว x)

(2) $f(x) = x^2$ หรือ $y = x^2$

(ถ้า x เป็นความยาวของด้านสี่เหลี่ยมจัตุรัส แล้ว $f(x)$ คือ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านเท่ากับ x)

(3) $f(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ หรือ $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

(ถ้า r เป็นรัศมีวงกลม แล้ว $f(r)$ หรือ V คือ ปริมาตรของทรงกลมที่มีรัศมียาว r)

□

ตัวอย่างที่ 3 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = 2x-1$ (2) $g(x) = x^2$ (3) $h(x) = \sqrt{x}$

วิธีทำ

(1) $f(x) = 2x-1$

เห็นได้ว่า สามารถแทนค่า x ในสูตรนี้ด้วยจำนวนจริงใดๆ และค่าของฟังก์ชันที่ได้ก็จะเป็นจำนวนจริงใดๆ ที่เปลี่ยนไปตามค่า x เช่น

$$f(0) = -1, \quad f(2) = 3, \quad f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-1$$

ดังนั้น

โดเมนของ f คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

และ

เรนจ์ของ f คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

(2) $g(x) = x^2$

โดเมนของ g คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

เรนจ์ของ g คือ $[0, \infty)$

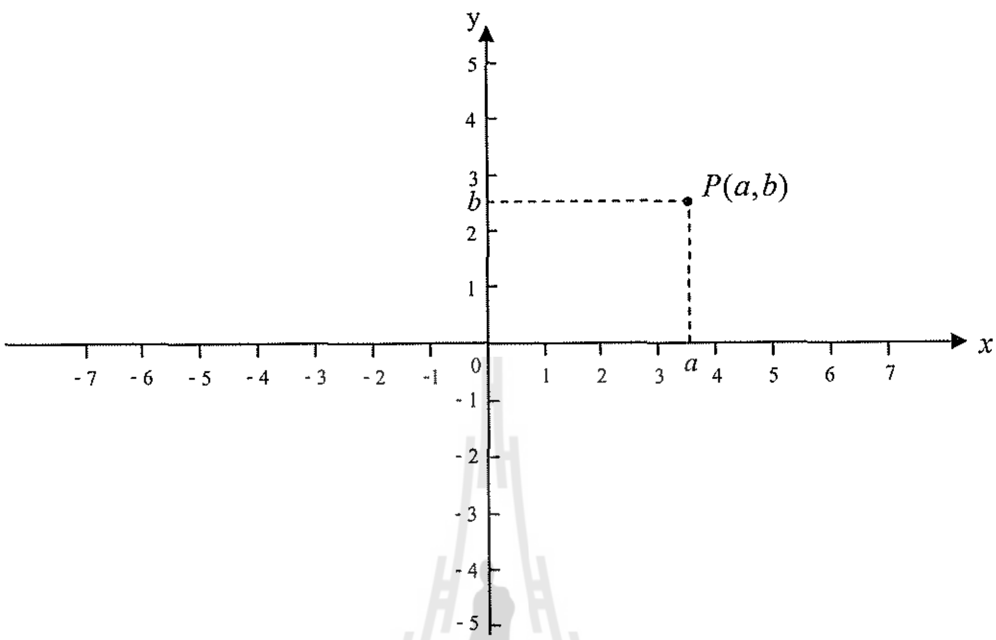
(3) $h(x) = \sqrt{x}$

โดเมนของ h คือ $[0, \infty)$

เรนจ์ของ h คือ $[0, \infty)$

□

4.2 ระบบพิกัดเชิงฉาก (Cartesian or Rectangular Coordinate System)



ระบบพิกัดเชิงฉาก

ประกอบด้วย

เส้นจำนวนในแนวนอน เรียกว่า แกน x ซึ่งตั้งฉากกับเส้นจำนวนในแนวดิ่ง เรียกว่า แกน y ตัดกันที่จุด ซึ่งเรียกว่า จุดกำเนิด (origin) กำหนดทิศทางการเพิ่มขึ้นบนแกน x จากซ้ายไปขวา และทิศทางการเพิ่มขึ้นบนแกน y จากล่างขึ้นไปบน จุดกำเนิดอยู่ที่ตำแหน่งตัดกันที่ 0 บนแกน x และ 0 บนแกน y

พิกัด (coordinates) ของจุดในระบบพิกัดเชิงฉาก

ให้ P เป็นจุดในระบบพิกัดเชิงฉาก ดังนั้น ตำแหน่งของจุด P ซึ่งอยู่บนระนาบในระบบพิกัดเชิงฉากนี้ เรียกว่า พิกัดของจุด P กำหนดโดยคู่อันดับ (a, b) โดย

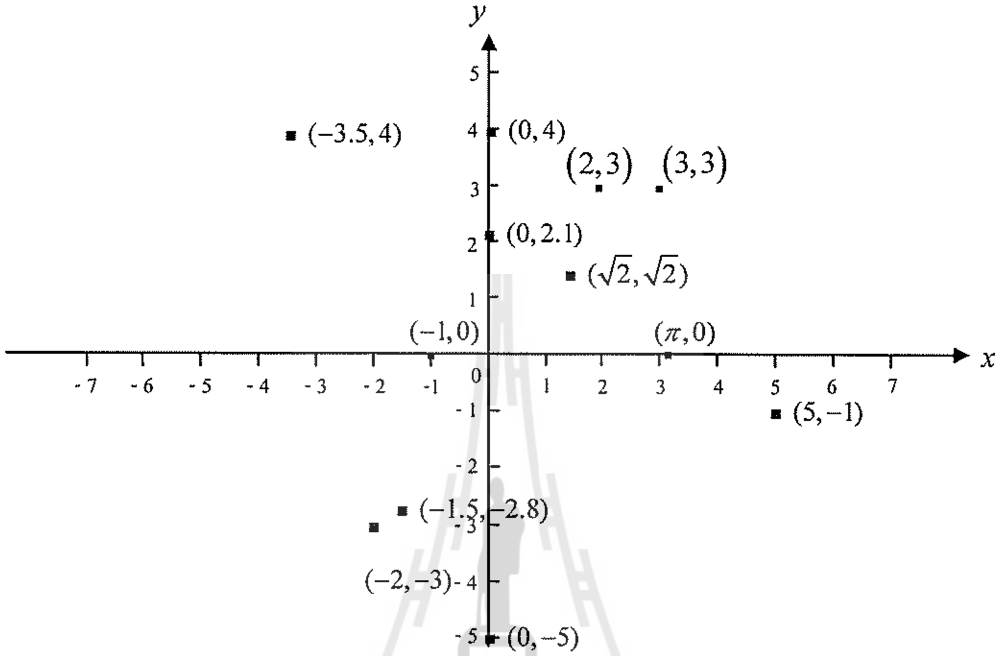
a คือ พิกัด x (x – coordinate) หรือ **แอบซิสซา** (abscissa) ของจุด P และ

b คือ พิกัด y (y – coordinate) หรือ **ออร์ดิเนต** (ordinate) ของจุด P

ดังพิกัดของจุดกำเนิด ซึ่งแทนด้วยจุด O คือ (0, 0)

ตัวอย่างที่ 4 จงลงจุดซึ่งกำหนดโดยคู่อันดับต่อไปนี้ ลงในระบบพิกัดเชิงฉาก

(1) $(2,3)$	(2) $(-1,0)$	(3) $(0,4)$	(4) $(0,-5)$
(5) $(-3.5,4)$	(6) $(5,-1)$	(7) $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$	(8) $(-2,-3)$
(9) $(0,2.1)$	(10) $(\pi,0)$	(11) $(-1.5,-2.8)$	(12) $(3,3)$

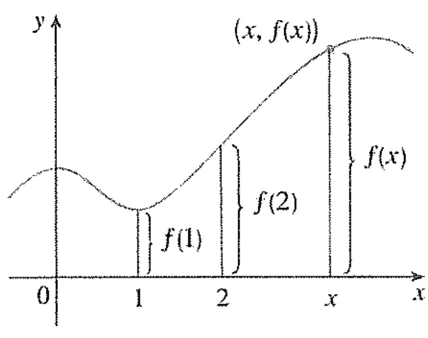


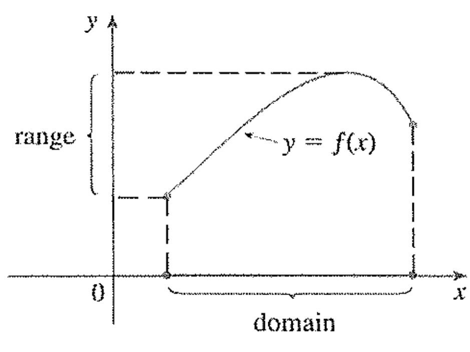
4.3 กราฟของฟังก์ชัน

กราฟของฟังก์ชัน $f : A \to B$ คือ เซตของคู่อันดับ

$$\left\{(x,\ f(x)) \middle|\ x \in A\right\}$$

การแสดงกราฟของฟังก์ชัน f สามารถลงจุด $(x,\ f(x))$ ในระบบพิกัดเชิงฉากดังรูปได้





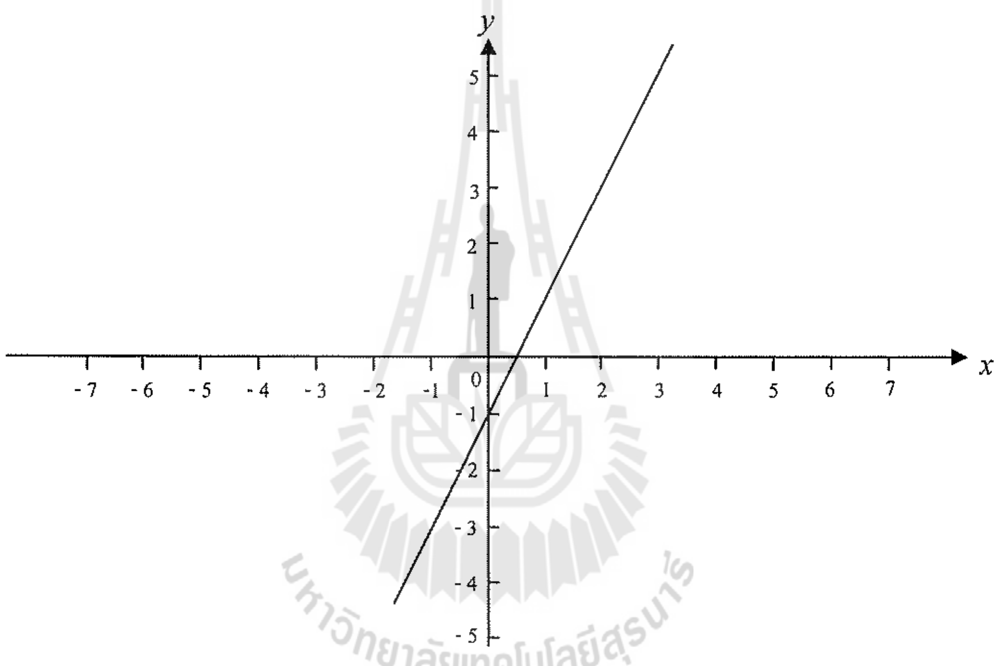
(ที่มาของรูป : Stewart หน้า 12)

ตัวอย่างที่ 5 จงร่างกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 2x-1$

วิธีทำ ลองคำนวณค่าของ $f(x)$ โดยเลือกค่า x ง่ายๆ ดังตาราง

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	0	1	3

ลงจุด $(x, f(x))$ ในระนาบ $x-y$



□

ตัวอย่างที่ 6 จงร่างกราฟของฟังก์ชัน $g(x) = x^2$

วิธีทำ โดเมนของ g คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด

เรนจ์ของ g คือ $[0,\infty)$

สังเกตได้ว่า ถ้าแทนค่า $-x$ ในสูตร จะได้

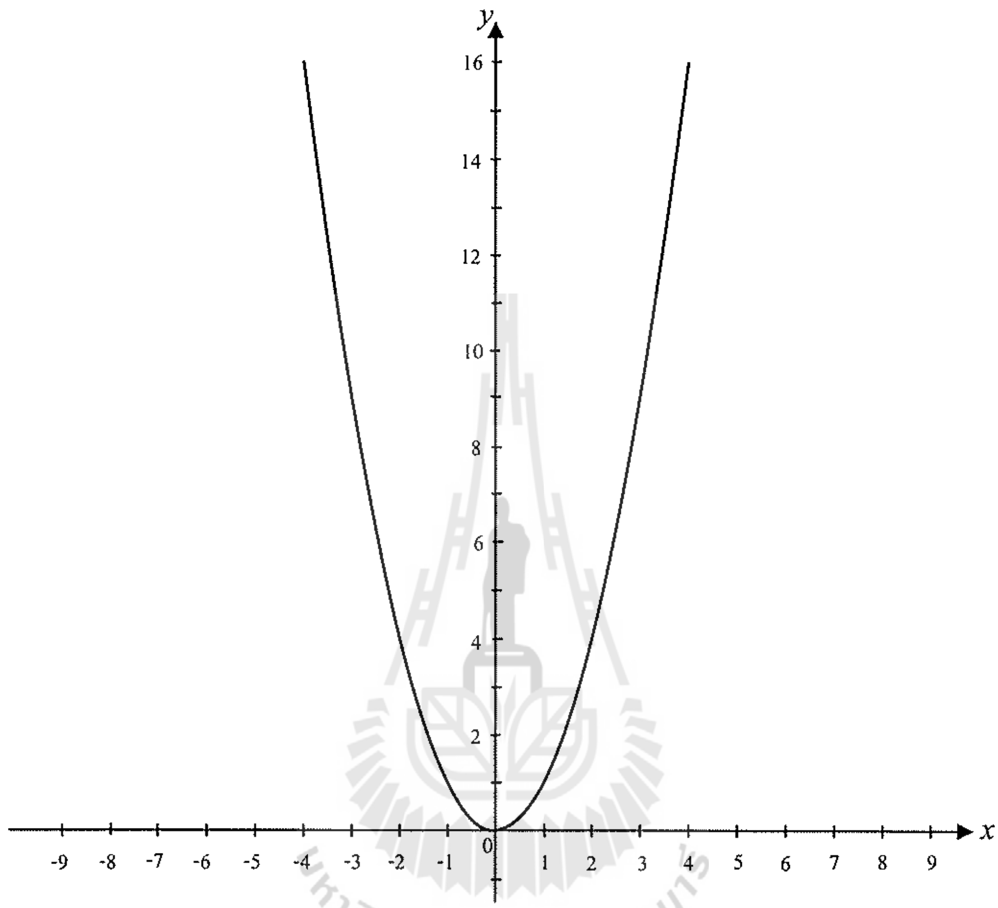
$$g(-x) = (-x)^2 = x^2$$

$$\Rightarrow \quad g(-x) = g(x)$$

แสดงว่า จุด $(-x, g(-x))$ และ จุด $(x, g(x))$ อยู่ในระดับเดียวกันบนระนาบ $x-y$
ทำให้กราฟของฟังก์ชัน g มีสมมาตรเทียบกับแกน y

ลองคำนวณค่าของ $g(x)$ ดังตาราง

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9	16



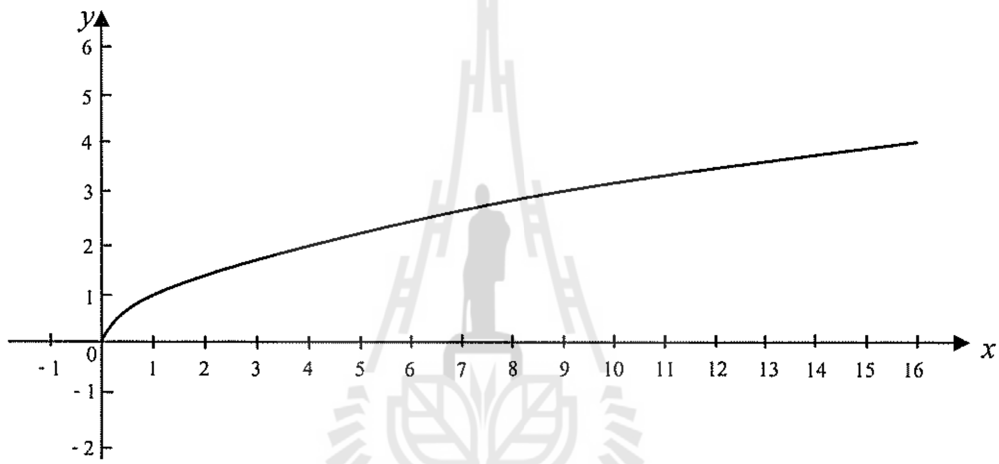
ตัวอย่างที่ 7 จงร่างกราฟของ $h(x) = \sqrt{x}$

วิธีทำ โดเมนของ h คือ $[0,\infty)$

เรนจ์ของ h คือ $[0,\infty)$

คำนวณค่าของ $h(x)$

x	0	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4



โจทย์ จงพิจารณาข้อต่อไปนี้และเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ค่าของ $f(x) = 4-2x^2$ ที่ $x=3$ เท่ากับเท่าใด

   (a) -14 (b) -12 (c) -10 (d) -8

2. ค่าของ $f(-1)$ สำหรับ

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x<0 \\ x+3, & x \ge 0 \end{cases}$$

   เท่ากับเท่าใด

   (a) -1 (b) 5 (c) 2 (d) $2, 5$

3. ค่าของ $f(u^2+v)$ สำหรับ $f(x) = 4x+6$ เท่ากับเท่าใด

   (a) $(u^2+v)(4x+6)$ (b) $4u^2+v+6$

   (c) $4u^2x+6$ (d) $4u^2+4v+6$

4. โดเมนของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ คือข้อใด

   (a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-\infty, -1]\cup[1, \infty)$

   (c) $(-\infty, -1)\cup(1, \infty)$ (d) $[-1, 1]$

5. ค่าของ $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ สำหรับ $f(x) = x^2+3$ เท่ากับเท่าใด

   (a) $2a+h^2$ (b) $2a+h^2+3$

   (c) $2a+h$ (d) $2a+h+3$

6. โดเมนของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x-5}$ คือข้อใด

   (a) $(-\infty, 5)\cup(5, \infty)$ (b) $[5, \infty)$

   (c) $(-\infty, 5]$ (d) $(-\infty, -5)\cup(5, \infty)$

7. โดเมนของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$ คือข้อใด

   (a) $(-\infty, 9)\cup(9, \infty)$ (b) $(-\infty, 3)\cup(3, \infty)$

   (c) $[3, \infty)$ (d) $(-\infty, -3)\cup(-3, 3)\cup(3, \infty)$

8. โดเมนของฟังก์ชัน $\{(a, 6), (b, 6), (d, 9)\}$ คือข้อใด

(a) $\{a, b, d\}$ (b) $\{6, 9\}$

(c) $\{a, b, d, 6, 9\}$ (d) $\{a, b, d, 9\}$

9. โดเมนของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{x-4}}$ คือข้อใด

(a) $[4, 5)\cup(5, \infty)$ (b) $(-\infty, 4)\cup(4, \infty)$

(c) $[4, \infty)$ (d) $(4, \infty)$

10. โดเมนของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x-5}$ คือข้อใด

(a) $[4, 5)\cup(5, \infty)$ (b) $(-\infty, 4)\cup(4, \infty)$

(c) $[4, \infty)$ (d) $(4, \infty)$

คำตอบ

1. (a)	2. (b)	3. (d)	4. (a)	5. (c)
6. (b)	7. (d)	8. (a)	9. (d)	10. (a)

เฉลย

1. จาก $f(x) = 4 - 2x^2$

$$f(3) = 4 - 2(3)^2 = 4 - 2(9) = -14$$

2. ที่ $x = -1$ $\quad f(x) = 5$

ดังนั้น $f(-1) = 5$

3. จาก $f(x) = 4x + 6$

$$f(u^2 + v) = 4(u^2 + v) + 6 = 4u^2 + 4v + 6$$

4. ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงเมื่อ $x^2 + 1 \geq 0$ ซึ่งเป็นจริงทุกค่าของจำนวนจริง

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน คือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด แทนด้วย $(-\infty, \infty)$

5. จาก $f(x) = x^2 + 3$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\left((a+h)^2 + 3\right) - \left(a^2 + 3\right)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 + 3 - a^2 - 3}{h}$$

$$= \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$$

6. ฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x - 5}$

$f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงเมื่อ $x - 5 \geq 0$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน คือ $[5, \infty)$

7. ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

$f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงเมื่อ $x^2 - 9 \neq 0$

$$x^2 - 9 \neq 0$$

$$(x-3)(x+3) \neq 0$$

$$x \neq -3, 3$$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน คือ $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

8. พิจารณาสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ จาก $\{(\underline{a}, 6), (\underline{b}, 6), (\underline{d}, 9)\}$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน คือ $\{a, b, d\}$

9. ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{x-4}}$

$f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงเมื่อ $x-4>0$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน คือ $(4, \infty)$

10. ฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x-5}$

$f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงเมื่อ $x-4 \geq 0$ และ $x-5 \neq 0$

ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน คือ $[4, 5) \cup (5, \infty)$

บทที่ 5

ฟังก์ชันเชิงเส้น

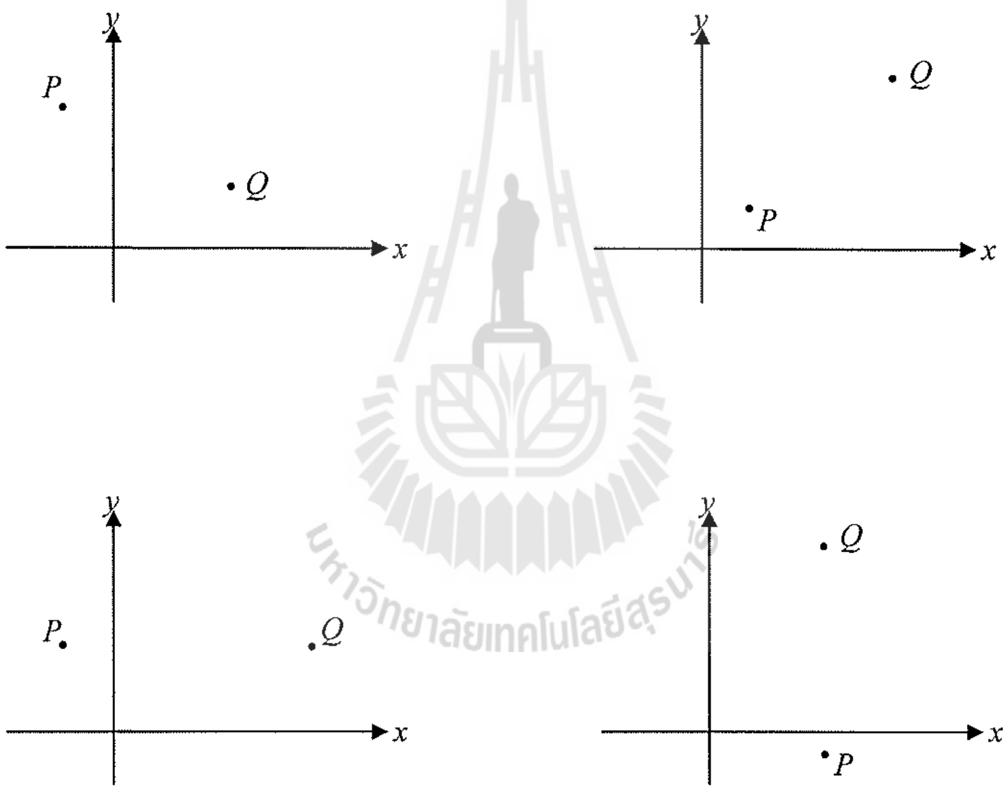
(Linear Functions)

5.1 ความชันของเส้นตรง

กำหนดจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนระนาบ จะมีเส้นตรงกี่เส้นที่ผ่านจุดทั้งสองได้

....

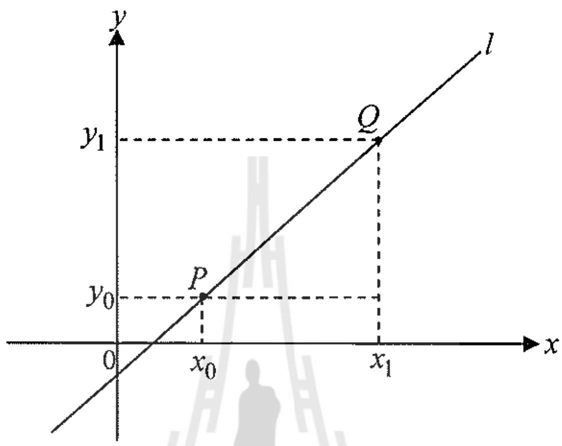
....



บทนิยามของความชันของเส้นตรง

ให้ $P(x_0, y_0)$ และ $Q(x_1, y_1)$ เป็นจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนเส้นตรง l ในระนาบ $x-y$ ซึ่งไม่ใช่เส้นดิ่ง ความชันของเส้นตรง l คือ

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



ความชันของเส้นตรง l มีค่าคงที่หรือไม่ เพราะเหตุใด

....

....

....

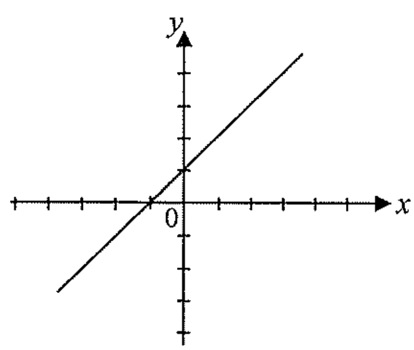
ตัวอย่างที่ 1 จงร่างเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q และหาความชัน m

(1) $P(-2,-1),\ Q(2,3)$ (2) $P(-1,3),\ Q(4,-1)$

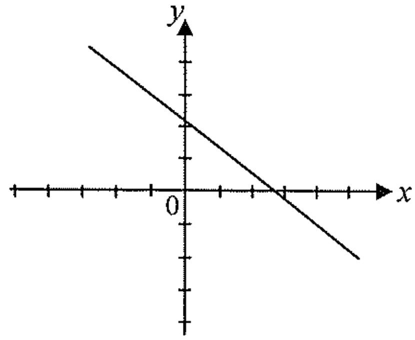
(3) $P(-1,2),\ Q(3,2)$ (4) $P(4,-1),\ Q(4,2)$

วิธีทำ

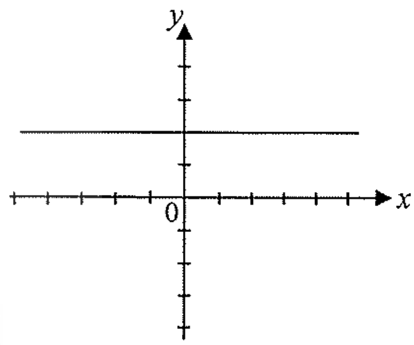
(1) $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{3-(-1)}{2-(-2)} = \dfrac{4}{4} = 1$



(2) $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{-1-3}{4-(-1)} = -\dfrac{4}{5}$

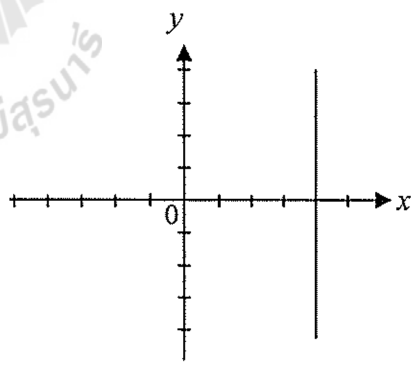


(3) $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{2-2}{3-(-1)} = \dfrac{0}{4} = 0$

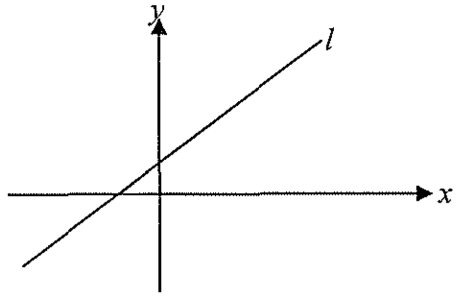


(4) $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{2-(-1)}{4-4} = \dfrac{3}{0}$

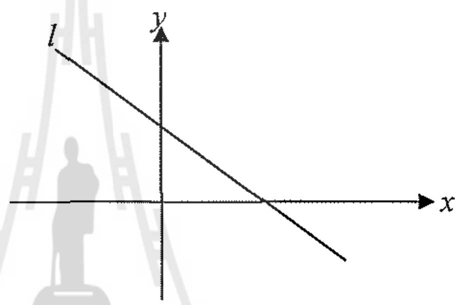
ความชันหาค่าไม่ได้



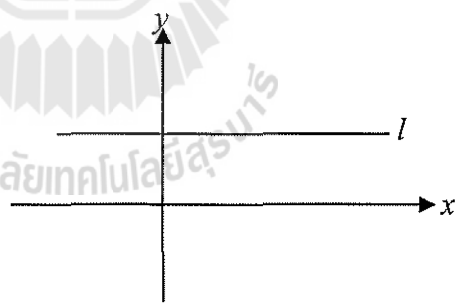
เส้นตรงที่มีความชันเป็นบวก



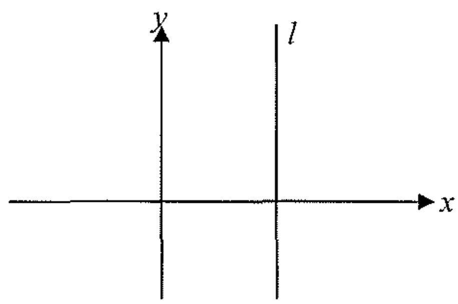
เส้นตรงที่มีความชันเป็นลบ



เส้นตรงที่มีความชันเป็นศูนย์



ความชันของเส้นดิ่งไม่นิยาม



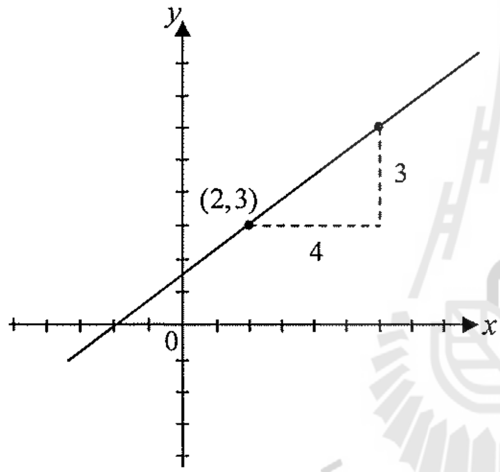
ตัวอย่างที่ 2 จงร่างเส้นตรง l ที่ผ่านจุด $(2, 3)$ และมีความชัน

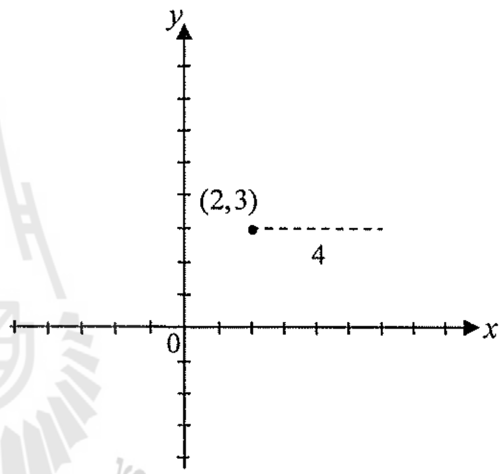
(1) $m = \frac{3}{4}$ (2) $m = -\frac{3}{4}$

วิธีทำ

(1) ความชัน $m = \frac{3}{4}$ หมายความว่า การเคลื่อนที่จากจุดใดๆบนเส้นตรง l ไปในแนวนอนทางขวา 4 หน่วย แล้วต้องเคลื่อนที่**<u>ขึ้น</u>**ไปทางแนวดิ่ง 3 หน่วย จึงจะไปถึงอีกจุดหนึ่งบนเส้นตรง l ดังรูป

(2) ความชัน $m = -\frac{3}{4}$ หมายความว่า การเคลื่อนที่จากจุดใดๆบนเส้นตรง l ไปในแนวนอนทางขวา 4 หน่วย แล้วต้องเคลื่อนที่.......ไปทางแนวดิ่ง 3 หน่วย จึงจะไปถึงอีกจุดหนึ่งบนเส้นตรง l ดังรูป





5.2 สมการของเส้นตรง

ให้ l เป็นเส้นตรง (ไม่เป็นเส้นดิ่ง) ซึ่งผ่านจุด (x_0, y_0) และมีความชัน m ให้ (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง l พิจารณาความชันที่คำนวณจากจุด (x, y) และ (x_0, y_0) ย่อมได้

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

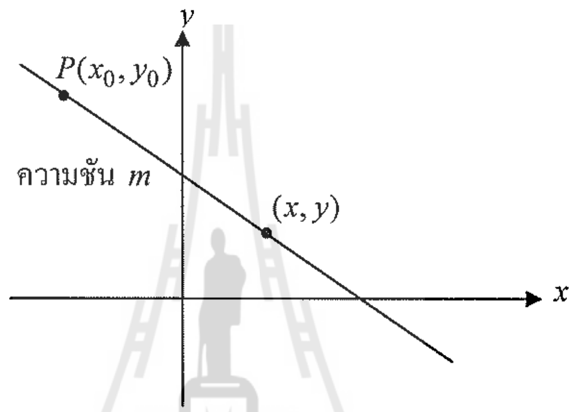
จัดรูปได้

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ดังนั้น สมการของเส้นตรง l ซึ่งผ่านจุด (x_0, y_0) และมีความชัน m คือ

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

เรียกสมการนี้ว่า **รูปแบบจุด-ความชัน** (point – slope form)



ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการเส้นตรง l ในรูปแบบจุด-ความชัน

(1) เส้นตรง l ผ่านจุด $(3,2)$ และมีความชัน 2

(2) เส้นตรง l ผ่านจุด $(-4,0)$ และมีความชัน $-\frac{1}{2}$

(3) เส้นตรง l ผ่านจุด $(-4,0)$ และ $(0,4)$

(4) เส้นตรง l ผ่านจุด $(5,-2)$ และ $(-3,4)$

วิธีทำ

(1) แทนค่า $x_0 = 3,\ y_0 = 2$ และ $m = 2$ ในสมการเส้นตรงรูปแบบ จุด-ความชัน ได้

$$y - 2 = 2(x - 3)$$

(2) แทนค่า $x_0 = -4,\ y_0 = 0$ และ $m = -\frac{1}{2}$ ในสมการเส้นตรงรูปแบบ จุด-ความชัน ได้

$$y - 0 = \frac{-1}{2}\left(x - (-4)\right)$$

$$y = \frac{-1}{2}\left(x + 4\right)$$

(3) คำนวณความชันของเส้นตรง l ได้

$$m = \frac{0-4}{-4-0} = \frac{-4}{-4} = 1$$

แทนค่า $x_0 = -4,\ \ y_0 = 0$ และ $m = 1$ ได้สมการของเส้นตรงของ l เป็น

$$y - 0 = 1(x - (-4))$$

นั่นคือ

$$y = x + 4$$

(หรือเลือก $x_0 = 0,\ \ y_0 = 4$)

(4) คำนวณความชันของเส้นตรง l ได้

$$m = \frac{4-(-2)}{-3-5} = \frac{6}{-8} = \frac{-3}{4}$$

แทนค่า $x_0 = ...5....,\ \ y_0 = ...-2.....$ และ $m = ...\frac{-3}{4}.....$

ได้สมการของเส้นตรงของ l เป็น

$$\begin{aligned} y-(-2) &= \frac{-3}{4}(x-5) \\ y+2 &= \frac{-3}{4}(x-5) \\ y &= -\frac{3}{4}x+\frac{7}{4} \end{aligned}$$

□

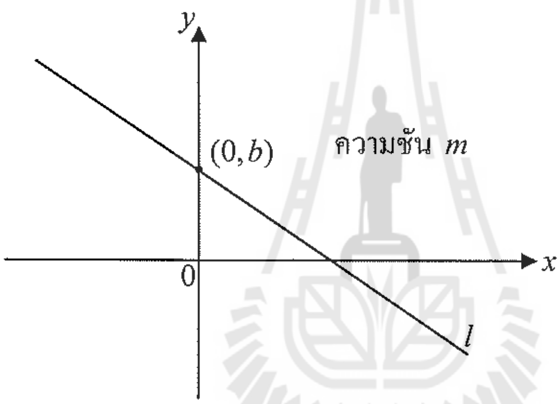
สำหรับเส้นตรง l ที่ไม่เป็นเส้นดิ่ง และมีความชัน m ย่อมต้องตัดแกน y ให้จุดตัดแกน y เป็น $(0,b)$ ดังรูป เรียกค่าออร์ดิเนต b ว่าระยะตัดแกน y (y- intercept) ของเส้นตรง l โดยใช้จุด $(0,b)$ ซึ่งอยู่บนเส้นตรง l และความชัน m แทนค่าในสมการของเส้นตรงในรูปแบบ จุด-ความชันได้

$$y-b = m(x-0)$$

หรือ

$$y = mx+b$$

ซึ่งเรียกว่า สมการเส้นตรงใน**รูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกน** (slope-intercept form) ของเส้นตรง l



> **รูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกน**
>
> สมการ
>
> $$y = mx+b$$
>
> คือสมการของเส้นตรงซึ่งมีความชัน m และระยะตัดแกน y เท่ากับ b

โจทย์ จงอ่านค่าความชันและระยะตัดแกน y จากสมการของเส้นตรง l ที่กำหนดมาให้

(1) $y = -2x+3$

ความชันเท่ากับ -2 ระยะตัดแกน y เท่ากับ 3

(2) $y = \frac{x}{4}-2$

ความชันเท่ากับ $\frac{1}{4}$ ระยะตัดแกน y เท่ากับ -2

(3) $y = 0.5x$

ความชันเท่ากับ 0.5 ระยะตัดแกน y เท่ากับ 0

(4) $y = -\frac{3}{5}x-1$

ความชันเท่ากับ $-\frac{3}{5}$ ระยะตัดแกน y เท่ากับ -1

(5) $y = -2$

ความชันเท่ากับ 0 ระยะตัดแกน y เท่ากับ -2

(6) $y+2 = x-3$

จัดเป็นรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกนได้

$$y = x-5$$

ดังนั้น ความชันเท่ากับ 1 ระยะตัดแกน y เท่ากับ -5

(7) $2y-3x = 4$

จัดเป็นรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกนได้

$$y = \frac{4+3x}{2} = \frac{3}{2}x+2$$

ดังนั้น ความชันเท่ากับ $\frac{3}{2}$ ระยะตัดแกน y เท่ากับ 2

(8) $3x+4y+5 = 0$

จัดเป็นรูป ความชัน-ระยะตัดแกนได้

$$4y = -3x-5$$
$$y = \frac{-3}{4}x-\frac{5}{4}$$

ดังนั้น ความชันเท่ากับ $\frac{-3}{4}$ ระยะตัดแกน y เท่ากับ $\frac{-5}{4}$

(9) $x-y-1 = 0$

จัดเป็นรูป ความชัน-ระยะตัดแกนได้

$$y = x-1$$

ดังนั้น ความชันเท่ากับ 1 ระยะตัดแกน y เท่ากับ -1

(10) $2-x-3y = 0$

จัดเป็นรูป ความชัน-ระยะตัดแกนได้

$$3y = 2-x$$
$$y = -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

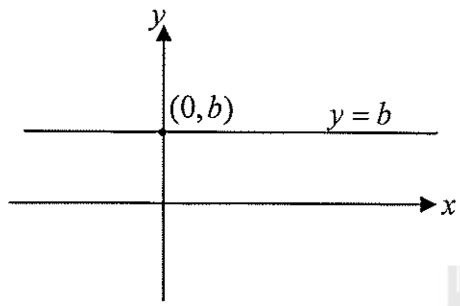
ดังนั้น ความชันเท่ากับ $-\frac{1}{3}$ ระยะตัดแกน y เท่ากับ $\frac{2}{3}$

□

ถ้าแทน m ด้วย 0 ในสมการ $y = mx + b$ ทำให้ได้สมการ

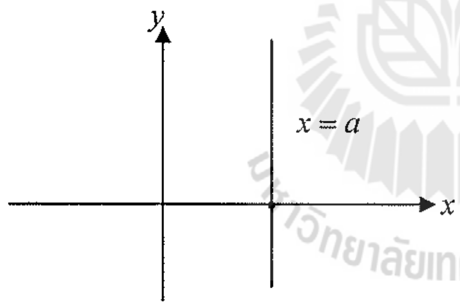
$$\boxed{y = b}$$

ซึ่งคือ สมการ**เส้นนอน** (horizontal line)



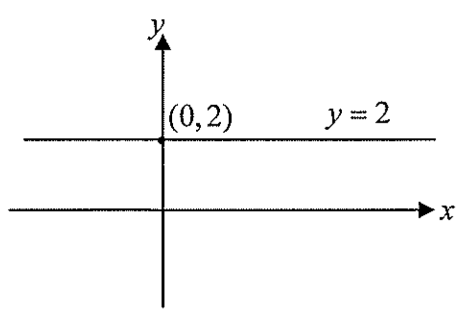
สำหรับสมการเส้นดิ่ง (vertical line) ไม่สามารถแทนค่าความชัน m ใน $y = mx + b$ ได้ เพราะว่าความชันของเส้นดิ่งไม่นิยาม อย่างไรก็ตาม พิกัด x ของทุกๆ จุดบนเส้นดิ่งเป็นค่าคงตัว ดังนั้น สมการของเส้นดิ่ง คือ

$$\boxed{x = a}$$

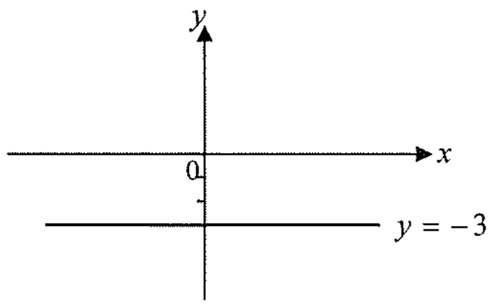


โจทย์ จงร่างกราฟของเส้นตรงซึ่งนิยามโดยสมการต่อไปนี้

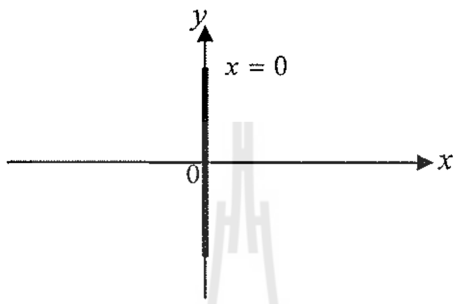
(1) $y = 2$



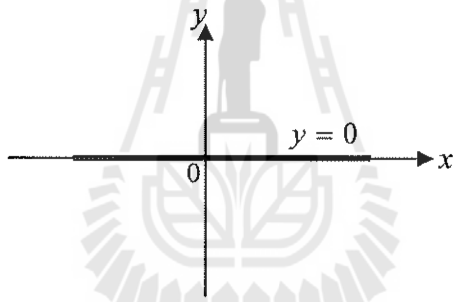
(2) $y = -3$



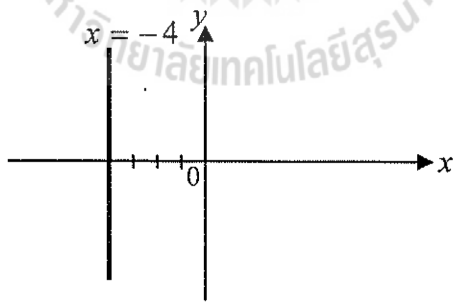
(3) $x = 0$



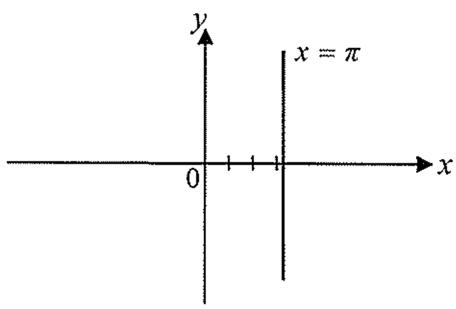
(4) $y = 0$



(5) $x = -4$



(6) $x = \pi$



ถ้าแทนค่า $y = 0$ ในสมการเส้นตรง

สามารถหาระยะตัดแกน x (x-intercept) ซึ่งคือ แอบซิสซา ของจุดตัดแกน x ของเส้นตรงได้ เช่น

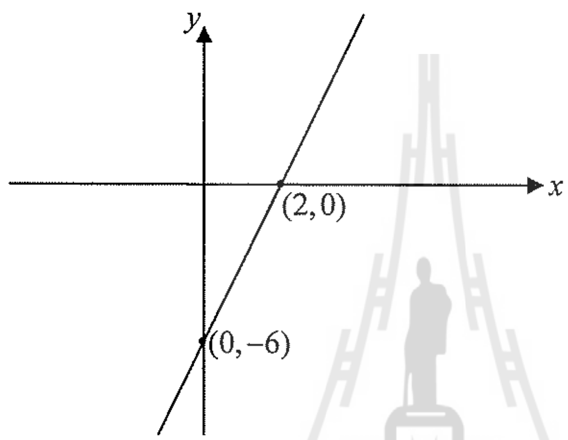
$$y = 3x - 6$$

แทนค่า $y = 0$ ได้

$$3x - 6 = 0$$

$$x = 2$$

ดังนั้นระยะตัดแกน x คือ 2



สมบัติเชิงเรขาคณิต

ให้เส้นตรง l_1 และเส้นตรง l_2 (ไม่เป็นเส้นดิ่ง) มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ

(1) เส้นตรง l_1 **ขนาน**กับเส้นตรง l_2 ($l_1 \parallel l_2$) ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$

(2) เส้นตรง l_1 **ตั้งฉาก**กับเส้นตรง l_2 ($l_1 \perp l_2$) ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณา เส้นตรง l_1 และเส้นตรง l_2 ที่กำหนดโดยสมการในแต่ละข้อว่า ขนานกันหรือตั้งฉากกัน

(1) $l_1 : 3x-2y-3 = 0,$ $\quad$ $l_2 : 3x-2y+5 = 0$

(2) $l_1 : -3x+2y-3 = 0,$ $\quad$ $l_2 : 2x+3y-10 = 0$

(3) $l_1 : \ y = 5,$ $\quad$ $l_2 : \ y = -10$

(4) $l_1 : \ x = 2,$ $\quad$ $l_2 : \ x = -\frac{1}{2}$

(5) $l_1 : \ y = 5,$ $\quad$ $l_2 : \ x = 3$

วิธีทำ

(1) เขียนสมการในรูป $y = mx+b$ ได้

เส้นตรง l_1	เส้นตรง l_2
$3x-2y-3 = 0$	$3x-2y+5 = 0$
$-2y = -3x+3$	$-2y = -3x-5$
$y = \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$	$y = \frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$

ดังนั้น เส้นตรง l_1 ขนานกับ เส้นตรง l_2 เพราะ ความชันของ l_1 และ l_2 ต่างก็เท่ากับ $\frac{3}{2}$

(2) เขียนสมการในรูป $y = mx+b$ ได้

เส้นตรง l_1	เส้นตรง l_2
$-3x+2y-3 = 0$	$2x+3y-10 = 0$
$2y = 3x+3$	$3y = 10-2x$
$y = \frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$	$y = -\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$
ความชันของ l_1 เท่ากับ $\frac{3}{2}$	ความชันของ l_2 เท่ากับ $-\frac{2}{3}$

ดังนั้น เส้นตรง l_1 ตั้งฉากกับ เส้นตรง l_2 เพราะว่า ความชันของ l_1 และ l_2 คูณกันเท่ากับ -1

(3) เส้นตรง $l_1 : \ y = 5$ และ เส้นตรง $l_2 : \ y = -10$
ต่างก็เป็นเส้นนอน ดังนั้น l_1 ขนานกับ l_2

(4) เส้นตรง $l_1 : \ x = 2$ และ เส้นตรง $l_2 : \ x = -\frac{1}{2}$
ต่างก็เป็น.....เส้นดิ่ง............. ดังนั้น ....เส้นตรง l_1 ขนานกับ เส้นตรง l_2..........

(5) เส้นตรง l_1 : $y = 5$ เป็นเส้น....นอน................

เส้นตรง l_2 : $x = 3$ เป็นเส้น....ดิ่ง..................

ดังนั้น เส้นตรง l_1 ...ตั้งฉากกับ... เส้นตรง l_2

□

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้สมการของเส้นตรง l เป็น

$$2x - y + 6 = 0$$

จงสร้างสมการเส้นตรงในรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกน ซึ่งผ่านจุด $(3,2)$ และ

(1) ตั้งฉากกับ l (2) ขนานกับ l

วิธีทำ เขียนสมการของเส้นตรง l ในรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกน ได้

$$y = 2x + 6$$

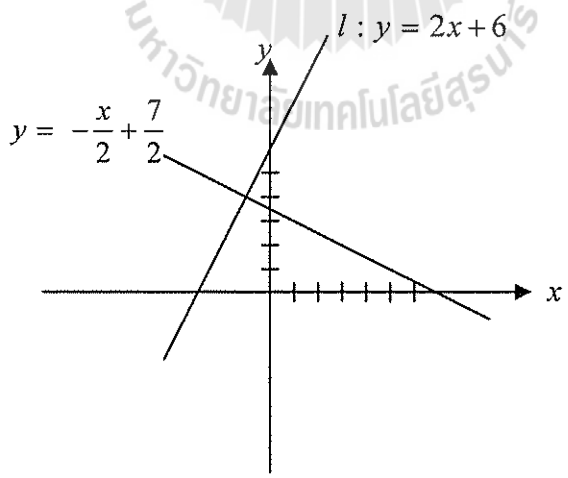
ดังนั้น ความชันของเส้นตรง l เท่ากับ 2

(1) เส้นตรงที่ตั้งฉากกับ l ต้องมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{2}$

ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,2)$ และมีความชัน $-\frac{1}{2}$ คือ

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

จัดเป็นรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกนได้ $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$



(2) เส้นตรงที่ขนานกับ l ต้องมีความชันเท่ากับ .....2...........

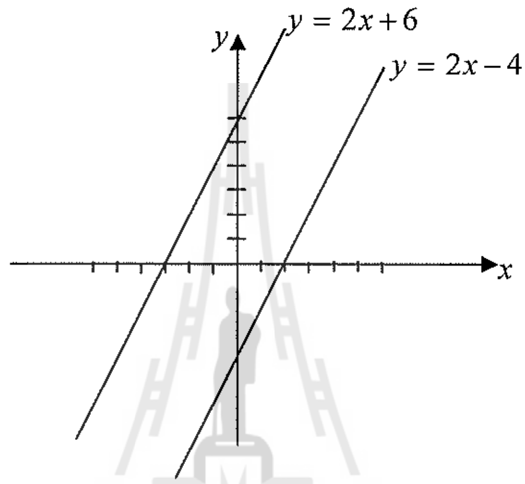
ดังนั้น สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,2)$ และมีความชัน ......2......... คือ

$$y-2 = ...2...(x-3)$$

จัดเป็นรูปแบบ ความชัน-ระยะตัดแกนได้

$$y = 2x-4$$

(เขียนรูปแสดง)



5.3 ฟังก์ชันเชิงเส้น

ฟังก์ชันเชิงเส้น คือ ฟังก์ชันในรูป

$$f(x) = mx+b$$

เมื่อ m และ b เป็นค่าคงตัว ถ้าให้ตัวแปร y แทนค่าของ $f(x)$ จะได้สมการ

$$y = mx+b$$

ดังนั้น กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = mx+b$ คือกราฟของสมการเส้นตรง $y = mx+b$ ซึ่งคือสมการของเส้นตรงที่มีความชัน m และระยะตัดแกน y เท่ากับ b

ตัวอย่างที่ 6 จงร่างกราฟของ $f(x) = 2x-3$

วิธีทำ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน ....เชิงเส้น................ ให้ $y = f(x)$ ดังนั้น กราฟของ $f(x)$ คือกราฟของสมการเส้นตรง

$$y = 2x-3$$

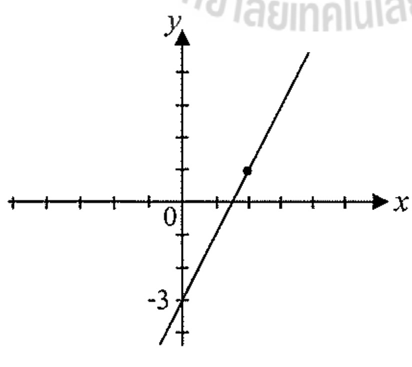
ร่างกราฟของเส้นตรง นักศึกษาหา 2 จุดใดๆบนเส้นตรงก็ลากเส้นตรงได้

<u>จุดที่ 1</u> จากสมการ คือ จุดตัดแกน y $(0,-3)$

<u>จุดที่ 2</u> เลือกแทนค่า $x = 2$ ได้ $y = 2(2)-3 = 1$

นั่นคือ จุด $(2,1)$ อยู่บนเส้นตรง

ร่างกราฟได้ดังนี้



□

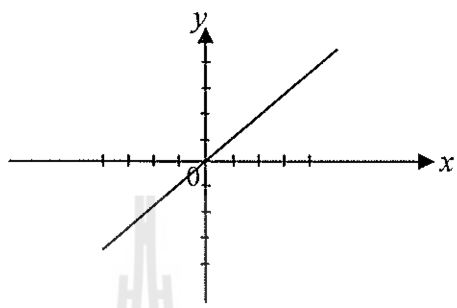
โจทย์

จงร่างกราฟของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ $f(x) = |x|$

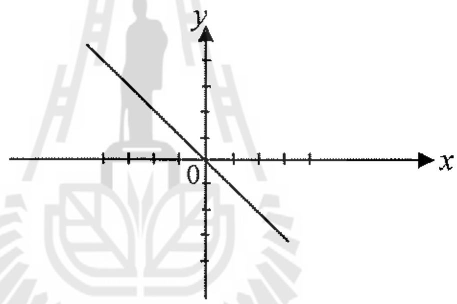
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

วิธีทำ

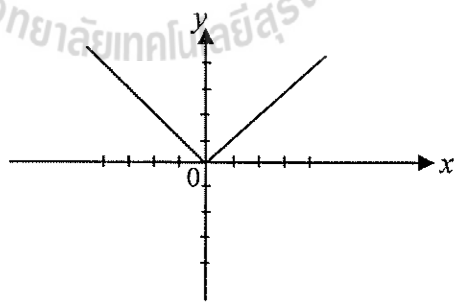
กราฟของ $y = x$ คือ



กราฟของ $y = -x$ คือ

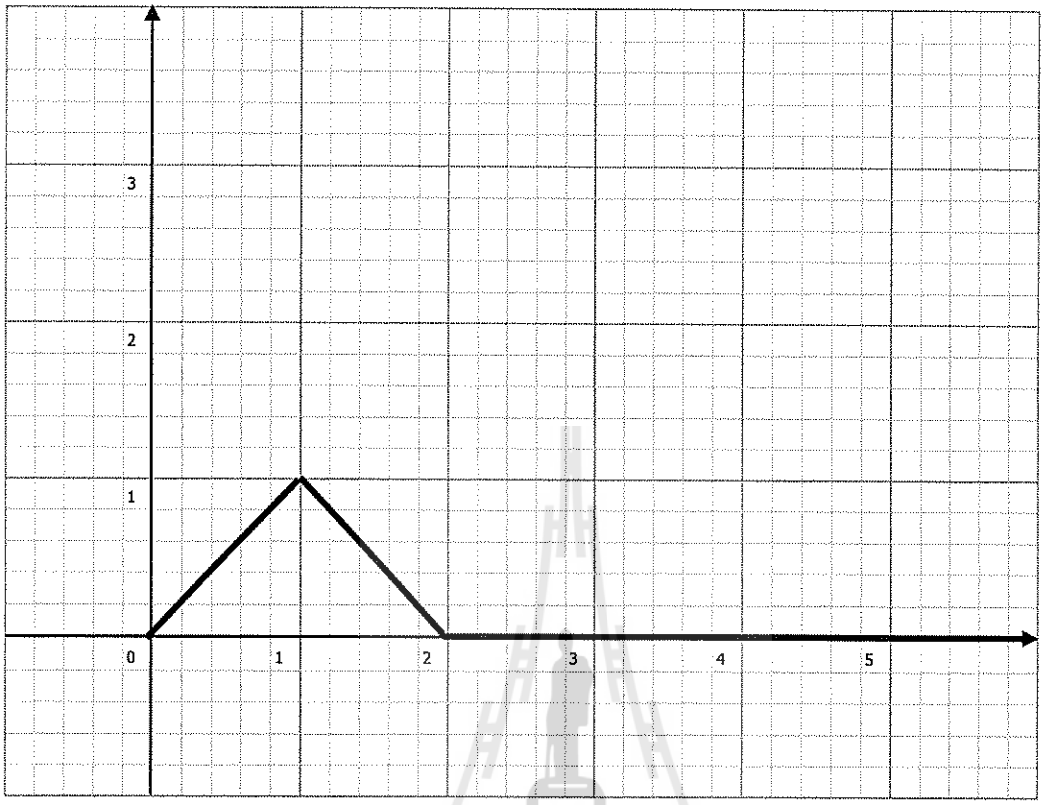


ดังนั้น กราฟของ $y = |x|$ คือ



โจทย์

จงหาสูตรของฟังก์ชัน f ซึ่งมีกราฟดังรูป



วิธีทำ

พิจารณา $0 \le x \le 1$

กราฟเป็นเส้นตรงผ่านจุด $(0,0)$ และ $(1,1)$

ดังนั้น สมการเส้นตรง คือ $y = x$

พิจารณา $1 < x \le 2$

กราฟเป็นเส้นตรงผ่านจุด $(1,1)$ และ $(2,0)$

ดังนั้น สมการเส้นตรง คือ $y = -x+2$

พิจารณา $x > 2$

กราฟเป็นเส้นนอนทับแกน x

ดังนั้น สมการเส้นตรง คือ $y = -x+2$

สรุปได้ว่า

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ -x, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

□

บรรณานุกรม

Huettenmueller, R., *Precalculus Demystified*, McGraw-Hill, New York, 2005.

Munem, M.A. and Yizze, J. P., *Precalculus Functions and Graphs,* 5^{th} Edition, Worth, New York, 1990.

Stewart, J., *Calculus Single Variable*, 5^{th} Edition, International Edition, Thomson Brooks/Cole, Belmont, 2003.