แคลคูลัส 1 (Calculus I)

ประมวลสาระรายวิชา 103101

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เบญจวรรณ โรจนดิษฐ์

พิมพ์ครั้งที่ 1

SUTPRESS สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แคลคูลัส 1 (Calculus I)

ประมวลสาระรายวิชา 103101

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

เบญจวรรณ โรจนดิษฐ์.

แคลคูลัส 1.-- : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี , 2556.

144.

1. . 0. ชื่อเรื่อง.

ISBN 978-974-533-679-7

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 2,000 เล่ม พ.ศ. 2556

กองบรรณาธิการ อรนุช อวิรุทธไพบูลย์

ออกแบบปก ศูนย์นวัตกรรมและเทคโนโลยีการศึกษา

SUTPRESS

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

111 ถนนมหาวิทยาลัย ตำบลสุรนารี อำเภอเมืองนครราชสีมา จังหวัดนครราชสีมา 30000

โทรศัพท์ 0-4422-4995 โทรสาร 0-4422-4979 www.sut.ac.th

พิมพ์ที่ : บริษัท สมบูรณ์การพิมพ์ จำกัด

254/1 ซอยมิตรภาพ 4 ถนนมิตรภาพ ตำบลในเมือง อำเมือง จังหวัดนครราชสีมา 30000

โทรศัพท์ 044-954-222-6 โทรสาร 044-954-227

คำนำ

หนังสือแคลคูลัส 1 นี้ ได้ถูกเรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนรายวิชาแคลคูลัส 1 ของนักศึกษาชั้นปีที่ 1 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ซึ่งผู้เขียนได้พยายามใช้ภาษาง่าย ๆ และอธิบายเนื้อหา พร้อมตัวอย่างโดยละเอียด เพื่อให้นักศึกษาและผู้ที่สนใจสามารถศึกษาด้วยตนเองได้

ในหนังสือเล่มนี้ประกอบด้วยเนื้อหา 5 บทด้วยกัน คือ เนื้อหาในบทที่ 1 คือเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร ซึ่งผู้เขียนได้กล่าวถึงนิยามลิมิตของฟังก์ชัน การคำนวณหาค่าของลิมิต (ถ้าสามารถหาค่าได้) ลิมิตอนันต์ ลิมิตที่อนันต์ และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน บทที่ 2 คือเรื่องอนุพันธ์ ซึ่งได้กล่าวถึงที่มาของอนุพันธ์ ปัญหาต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ กฎของอนุพันธ์ อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กฎลูกโซ่ อนุพันธ์อันดับสูง และการหาอนุพันธ์โดยปริยาย บทที่ 3 จะเป็นเรื่องของการประยุกต์ใช้อนุพันธ์ ซึ่งได้กล่าวถึงค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ฟังก์ชันเพิ่มฟังก์ชันลด ความเว้าและจุดเปลี่ยนเว้าซึ่งนำมาใช้ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน อัตราสัมพัทธ์ และปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด บทที่ 4 เรื่องฟังก์ชันอดิศัยและหลักเกณฑ์ โลปีตาล ซึ่งเนื้อหาในบทนี้ ประกอบไปด้วย เรื่องฟังก์ชันผกผัน ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก และหลักเกณฑ์ของโลปีตาล ส่วนบทที่ 5 บทสุดท้ายเป็นเรื่องของการหาปริพันธ์ ซึ่งได้กล่าวถึงปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต พื้นที่ ปริพันธ์จำกัดเขต ทฤษฎี บทมูลฐานของแคลคูลัส และการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

ผู้เขียนขอขอบคุณ หัวหน้าสาขาวิชาคณิตศาสตร์ รองศาสตราจารย์ ดร.ประภาศรี อัศวกุล ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรชุน ไชยเสนะ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เจษฎา ตัณฑนุช ที่ช่วยให้คำปรึกษาข้อแนะนำที่เป็นประโยชน์ในการจัดทำเอกสาร ขอขอบคุณ คุณวิภารัตน์ วรพิทย์พงศ์ นักศึกษาบัณฑิตศึกษา ที่ช่วยพิมพ์เฉลยแบบฝึกหัด ขอขอบคุณ คุณละออง บุตรจันทร์ และคุณจริยา นาเจริญ ผู้ช่วยสอนสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ที่ช่วยทำเฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 4-5 และขอขอบคุณ คุณอรนุช อวิรุทธไพบูลย์ หัวหน้าสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ในการประสานงานเพื่อการจัดพิมพ์

เบญจวรรณ โรจนดิษฐ์

สารบัญ

บทที่ 1

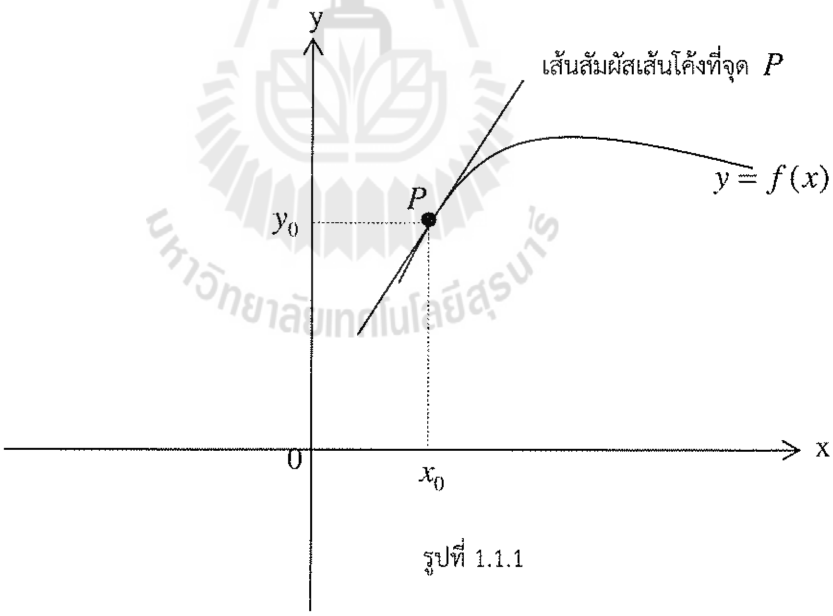
ลิมิตและความต่อเนื่อง

(Limits and Continuity)

1.1 ลิมิต (Limits)

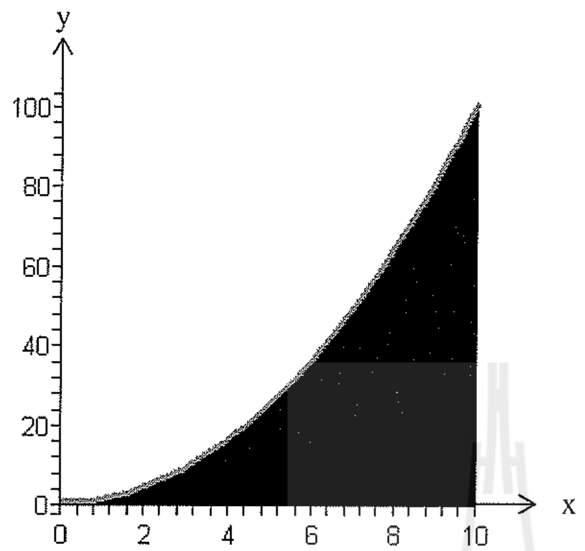
พิจารณาปัญหาดังต่อไปนี้

<u>**ปัญหาที่ 1**</u> เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ และ $P(x_0, y_0)$ เป็นจุดบนกราฟของฟังก์ชัน f แล้วจะมีวิธีการหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $P(x_0, y_0)$ ได้อย่างไร



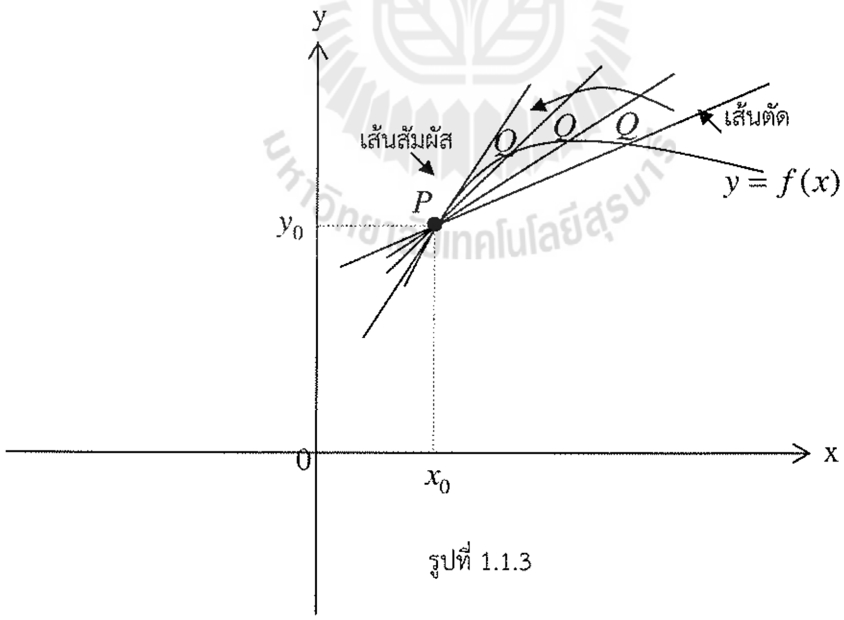
รูปที่ 1.1.1

<u>**ปัญหาที่ 2**</u> กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ และ $f(x) \geq 0$ แล้วจะสามารถหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งของกราฟของฟังก์ชัน f บนช่วง $[0,10]$ บนแกน x ตามรูปที่ 1.1.2 ได้อย่างไร



รูปที่ 1.1.2

<u>เส้นสัมผัสกับลิมิต</u>



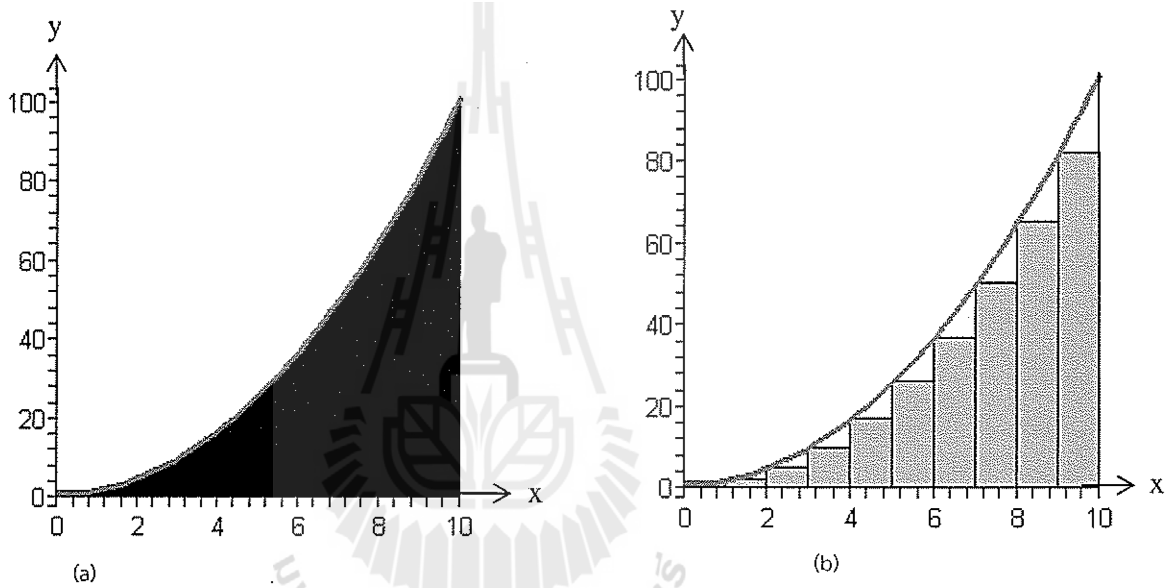
รูปที่ 1.1.3

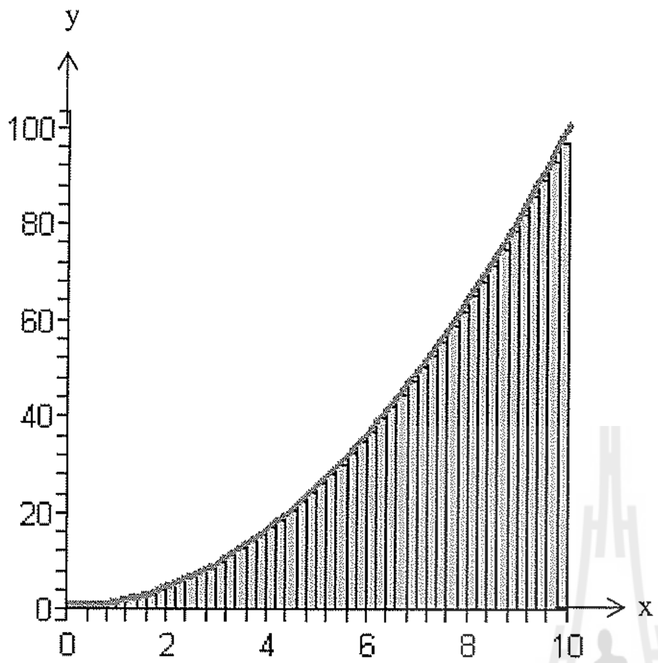
ให้ P และ Q เป็นจุดที่ต่างกัน และอยู่บนเส้นโค้งในระนาบ XY เส้นตรงที่เราลากผ่านจุด P และ Q เรียกว่า **เส้นตัด**ของเส้นโค้ง

พิจารณาถ้าเราเลื่อนจุด Q ไปตามเส้นโค้งเข้าหาจุด P แล้วเส้นตัดจะหมุนไปสู่ตำแหน่งลิมิต (ตามรูป 1.1.3) เส้นที่อยู่ในตำแหน่งลิมิตนี้ เราจะพิจารณาให้เป็นเส้นสัมผัสที่จุด P (tangent line at P)

<u>พื้นที่กับลิมิต</u>

จากเรื่องการหาเส้นสัมผัสที่นำไปสู่แนวความคิดเรื่องลิมิต สำหรับเรื่องการหาพื้นที่ก็เช่นเดียวกัน





รูปที่ 1.1.4 (c)

พิจารณาพื้นที่แรเงาในรูป 1.1.4 (a) เราจะหาพื้นที่ประมาณของรูปนี้ได้โดยการสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้างเท่ากันแนบในใต้เส้นโค้งดังรูป 1.1.4 (b) จากนั้นบวกพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเหล่านี้ เราจะเห็นว่า พื้นที่ที่ได้จากการประมาณมีค่าแตกต่างจากค่าจริงค่อนข้างมาก แต่ถ้าเราแบ่งใหม่ให้ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากลดลง ยิ่งความกว้างลดลงมากเท่าไร เราก็จะเห็นว่าช่องว่างระหว่างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับเส้นโค้งจะน้อยลงด้วย ดังนั้นเมื่อเราบวกพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่แบ่งใหม่ คราวนี้จะเห็นว่าค่าพื้นที่ที่ได้จะใกล้เคียงกับพื้นที่จริงยิ่งขึ้น ดังรูป 1.1.4 (c) และจะเท่ากับค่าจริงเมื่อเป็นค่าลิมิต

ลิมิต

พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, \qquad x\neq 1$$

จะเห็นว่า เราไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชันที่ $x=1$ ได้ แต่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน ที่ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ได้ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

$x<1$	$f(x)$
0	1.0000
0.5	1.5000
0.9	1.9000
0.95	1.9500
0.99	1.9900
0.995	1.9950
0.999	1.9990

ตารางที่ 1.1.1

$x>1$	$f(x)$
2	3.0000
1.5	2.5000
1.09	2.0900
1.05	2.0500
1.01	2.0100
1.005	2.0050
1.001	2.0010

ตารางที่ 1.1.2

จากตารางที่ 1.1.1 จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 จากทางซ้าย $(x<1)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 เราจะกล่าวว่าลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$$

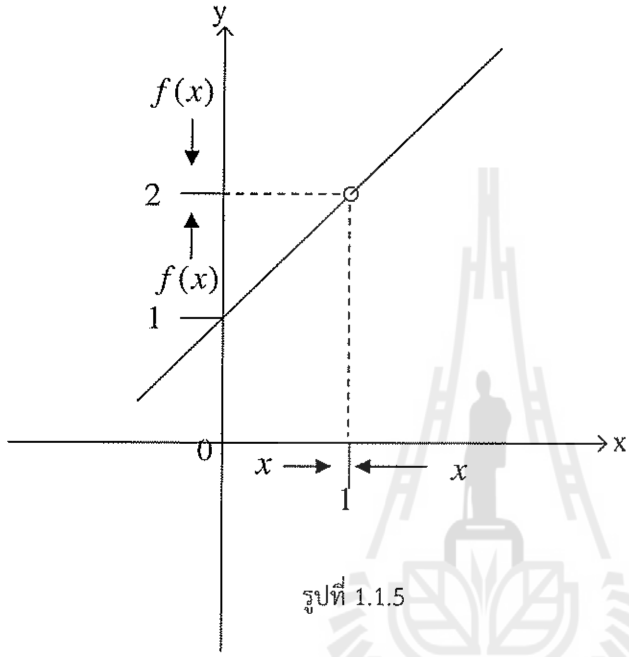
และเรียกลิมิตนี้ว่า **ลิมิตซ้าย (Left – handed limit)**

ในทำนองเดียวกันจากตาราง 1.1.2 เราจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 จากทางขวา $(x>1)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 จะกล่าวว่าลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา ซึ่งเขียนสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$$

และเรียกลิมิตนี้ว่า **ลิมิตขวา (Right – handed limit)**

นอกจากวิธีการสังเกตค่าของฟังก์ชันที่จุดต่าง ๆ ใกล้ 1 จากตารางแล้ว เรายังสามารถสังเกตได้จากกราฟของฟังก์ชันด้วย



รูปที่ 1.1.5

จากรูป 1.1.5 เราได้ว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จากทางซ้าย $(x<1)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ และ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา $(x>1)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 เช่นกัน ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$

จาก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$ ในกรณีนี้เราจะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เท่ากับ 2 เมื่อ x เข้าใกล้ 1 และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

<u>บทนิยามที่ 1.1.1</u> ถ้าค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่า L ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ x_0 จากทางขวา ($x > x_0$) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

อ่านว่า **ลิมิตของ $f(x)$ ขณะที่ x เข้าใกล้ x_0 จากทางขวาเท่ากับ L** (ดูรูปที่ 1.1.6 (a))
สัญลักษณ์ " $x \to x_0^+$ " หมายถึง ค่าของ x มีค่าเข้าใกล้ x_0 แต่มากกว่า x_0

ถ้าค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ค่า M ขณะที่ x เข้าใกล้ x_0 จากทางซ้าย ($x < x_0$) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = M$$

อ่านว่า **ลิมิตของ $f(x)$ ขณะที่ x เข้าใกล้ x_0 จากทางซ้ายเท่ากับ M** (ดูรูปที่ 1.1.6 (b))
สัญลักษณ์ " $x \to x_0^-$ " หมายถึง ค่าของ x มีค่าเข้าใกล้ x_0 แต่น้อยกว่า x_0

ถ้าลิมิตซ้ายเท่ากับลิมิตขวา นั่นคือ

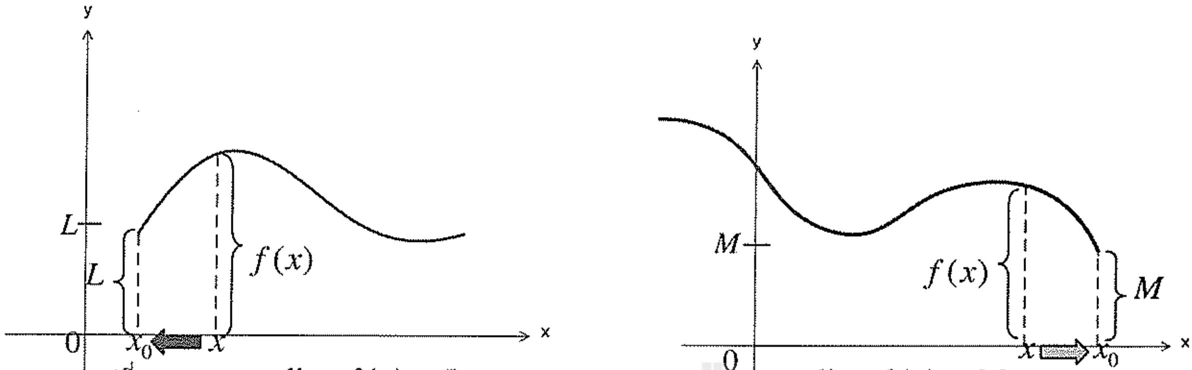
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

เราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

อ่านว่า **ลิมิตของ $f(x)$ ขณะที่ x เข้าใกล้ x_0 เท่ากับ L** ซึ่งหมายความว่า ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ x_0
เราเรียก $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ และ $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ว่า **ลิมิตข้างเดียว** ของ $f(x)$ ที่ x_0 และ เรียก $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ว่า **ลิมิตสองข้าง** ของ $f(x)$ ที่ x_0

หมายเหตุ ถ้า $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ แล้วจะกล่าวว่า $\lim_{x \to x_0} f(x)$ หาค่าไม่ได้



รูปที่ 1.1.6 (a) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ (b) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = M$

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.1</u> กำหนด $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ จงหา

(1) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u> สร้างตารางหาค่า

$x < 1$	$f(x)$
0	1.0000
0.1	1.1100
0.5	1.7500
0.55	1.8525
0.95	2.8525
0.99	2.9701
0.999	2.9970

ตารางที่ 1.1.3

$x > 1$	$f(x)$
2	7.0000
1.99	6.9501
1.95	6.7525
1.5	4.7500
1.1	3.3100
1.01	3.0301
1.001	3.0030

ตารางที่ 1.1.4

(1) จากตารางที่ 1.1.3 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย $(x < 1)$ ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 3 ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$

(2) จากตารางที่ 1.1.4 จะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา $(x > 1)$ ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 3 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$

(3) จาก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$ □

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.2</u> กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x < 2 \\ 2x+1 & \text{เมื่อ } x \ge 2 \end{cases}$ จงหา

(1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u> สร้างตารางหาค่า

$x < 2$	$f(x)$
1	2.0000
1.05	2.1000
1.1	2.2000
1.5	3.0000
1.9	3.8000
1.99	3.9800
1.999	3.9980

ตารางที่ 1.1.5

$x > 2$	$f(x)$
3	7.0000
2.99	6.9800
2.9	6.8000
2.5	6.0000
2.1	5.2000
2.01	5.0200
2.001	5.0020

ตารางที่ 1.1.6

(1) จากตารางที่ 1.1.5 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย $(x < 2)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$

(2) จากตารางที่ 1.1.6 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา $(x > 2)$ ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 5 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$

(3) จาก $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ □

<u>ตัวอย่างที่ 1.1.3</u> กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{\sin(3x)}{5x}$ จงหา

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u> สร้างตารางหาค่า

$x<0$	$f(x)$
-0.5	0.3990
-0.25	0.5453
-0.1	0.5910
-0.01	0.5999
-0.001	0.6000
-0.0001	0.6000

ตารางที่ 1.1.7

$x>0$	$f(x)$
0.5	0.3990
0.25	0.5453
0.1	0.5910
0.01	0.5999
0.001	0.6000
0.0001	0.6000

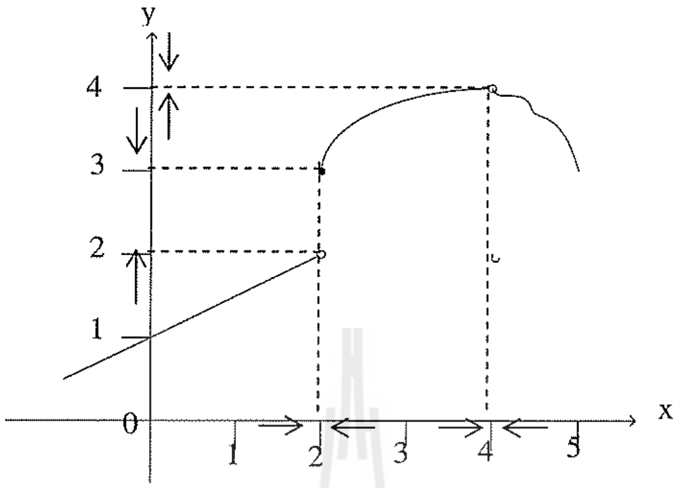
ตารางที่ 1.1.8

(1) จากตารางที่ 1.1.7 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย ($x<0$) ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0.6 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0.6$

(2) จากตารางที่ 1.1.8 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา ($x>0$) ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0.6 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0.6$

(3) จาก $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0.6$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0.6$ □

ตัวอย่างที่ 1.1.4 กำหนดให้กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ แสดงดังรูปที่ 1.1.7



รูปที่ 1.1.7

จงพิจารณาลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(1) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (2) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (3) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(4) $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ (5) $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ (6) $\lim_{x\to 4} f(x)$

วิธีทำ จากกราฟของฟังก์ชัน รูปที่ 1.1.7 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย ($x<2$) ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 2 ด้วย แต่เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา ($x>2$) ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 3 ดังนั้น

(1) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$ และ (2) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$

(3) จาก $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

จากกราฟ ก็จะเห็นได้อีกว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางด้านซ้าย ($x<4$) ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4 และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางด้านขวา ($x>4$) ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 4 เช่นกัน ดังนั้น

(4) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 4$ และ (5) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 4$

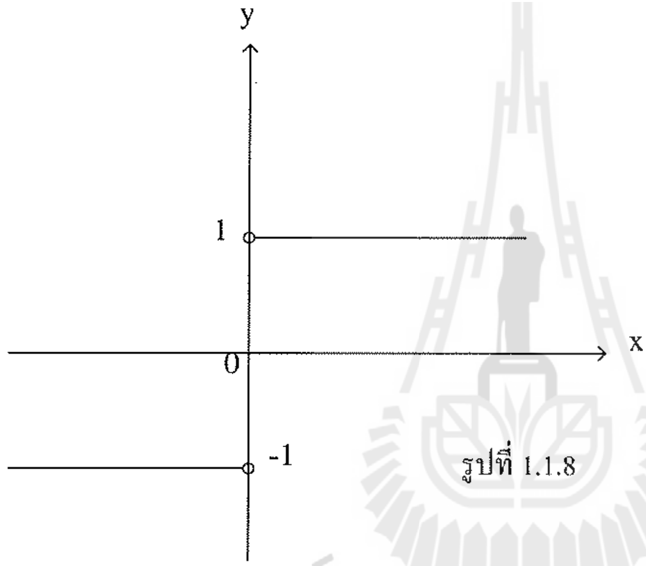
(6) จาก $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = 4$ จะได้ว่า $\lim_{x\to 4} f(x) = 4$ □

<u>**ตัวอย่างที่ 1.1.5**</u> กำหนดให้ $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ โดยที่ $x \neq 0$ จงหา

(1) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (ถ้ามี)

<u>วิธีทำ</u> จากนิยาม $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ดังนั้น $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1, & x > 0 \\ \dfrac{-x}{x} = -1, & x < 0 \end{cases}$

เพราะฉะนั้น กราฟของฟังก์ชันคือ



รูปที่ 1.1.8

จากรูปที่ 1.1.8 จะเห็นได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย $(x < 0)$ ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -1 และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา $(x > 0)$ ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 1 ดังนั้น

(1) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

(2) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

(3) จาก $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ □

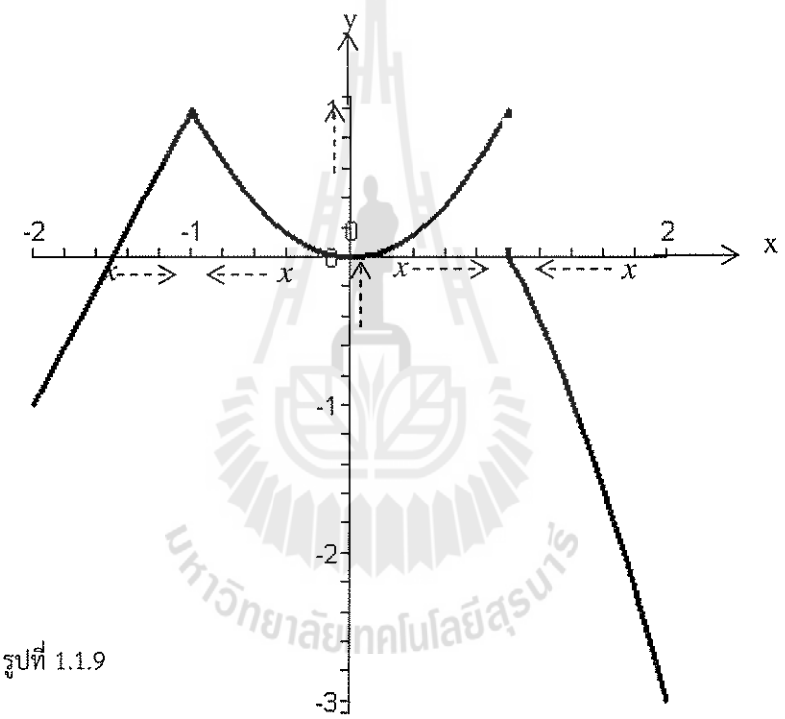
ตัวอย่างที่ 1.1.6 กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x<-1\\ x^2, & -1\le x<1\\ 1-x^2, & x\ge 1\end{cases}$

จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f พร้อมทั้งหาค่าลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(1) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

(4) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (5) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (6) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

วิธีทำ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะได้กราฟของฟังก์ชันดังนี้



รูปที่ 1.1.9

จากกราฟของ $y=f(x)$ ในรูปที่ 1.1.9 เราจะได้ว่า

(1) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1$ (2) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$ (3) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=1$

(4) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$ (5) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$ (6) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้ □

ตัวอย่างที่ 1.1.7 กำหนด $f(x)=\dfrac{|x|}{\left|\sqrt{x+1}-1\right|}$ จงหา

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (ถ้ามี)

วิธีทำ สร้างตารางหาค่า

x>0	f(x)
0.1	2.048808848
0.01	2.004987562
0.001	2.000499875
0.0001	2.000049999
0.00001	2.000005000
0.000001	2.000000500

ตารางที่ 1.1.9

x<0	f(x)
-0.1	1.948683298
-0.01	1.994987437
-0.001	1.999499875
-0.0001	1.999949999
-0.00001	1.999995000
-0.000001	1.999999500

ตารางที่ 1.1.10

(1) จากตารางที่ 1.1.9 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา ($x>0$) ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$

(2) จากตารางที่ 1.1.10 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย ($x<0$) ค่าของ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 2 ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2$

(3) จาก $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$ □

สรุป จากที่กล่าวมาแล้วก่อนหน้านี้ เราสรุปได้ว่า

(1) ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ และ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=M$ แล้ว $L=M$

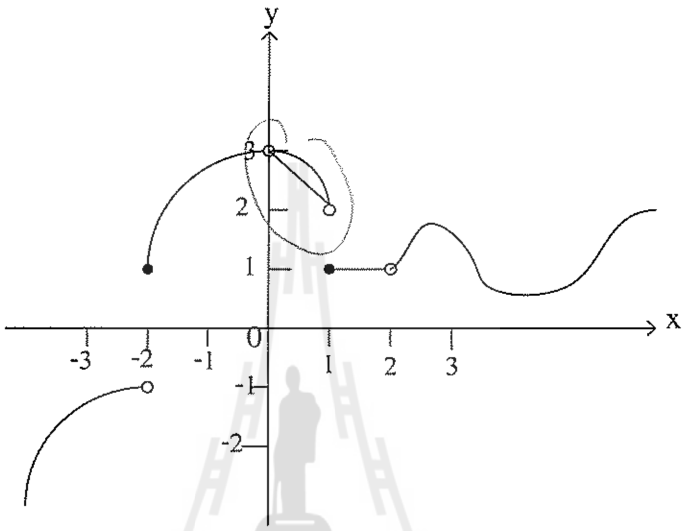
(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$

(3) ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้หรือไม่มีลิมิต

<u>แบบฝึกหัดที่ 1.1</u>

1) กำหนดให้ $\lim_{x\to 2} f(x) = 6$ แล้วเราสามารถสรุปได้หรือไม่ว่า $f(2) = 6$

2) กำหนดกราฟของฟังก์ชัน f ดังรูปข้างล่าง



จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(2.1) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ (2.2) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ (2.3) $\lim_{x\to -2} f(x)$

(2.4) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (2.5) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (2.6) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(2.7) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (2.8) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ (2.9) $\lim_{x\to 1} f(x)$

(2.10) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (2.11) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (2.12) $\lim_{x\to 2} f(x)$

3) กำหนด $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1} f(x)$ (ถ้ามี)

4) กำหนด $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$ จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(4.1) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (4.2) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (4.3) $\lim_{x\to 2} f(x)$

5) กำหนด $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$ จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(5.1) $\lim\limits_{x\to 25^-} f(x)$ (5.2) $\lim\limits_{x\to 25^+} f(x)$ (5.3) $\lim\limits_{x\to 25} f(x)$

6) กำหนด $f(x)=1-\dfrac{\sin(3x)}{2x}$ จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(6.1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ (6.2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (6.3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

7) จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases} |x|, & x<1 \\ -x^2, & 1\le x<3 \\ -(x+6), & x\ge 3 \end{cases}$

พร้อมทั้งหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(7.1) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (7.2) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ (7.3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

(7.4) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ (7.5) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ (7.6) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

1.2 บทนิยามของลิมิต

จากบทนิยามของลิมิตในหัวข้อที่ 1.1 เราได้กล่าวไว้อย่างคร่าว ๆ คือ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ หมายถึง เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a แล้วค่าของ $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ L ซึ่งความหมายที่ได้กล่าวไว้นี้ ในทางคณิตศาสตร์ยังถือว่าไม่ใช่ความหมายที่ถูกต้องและชัดเจน เพราะคำว่า "เข้าใกล้" นั้นยังไม่ชัดเจนว่าเข้าใกล้เพียงใด ดังนั้นต่อไปนี้เราจะนิยามความหมายของลิมิตให้ชัดเจนเพื่อที่จะได้นำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์สมบัติ หรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลิมิตของฟังก์ชันต่อไปได้

<u>**บทนิยามที่ 1.2.1**</u> ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดหนึ่งที่บรรจุจำนวนจริง a (โดยที่ f อาจจะไม่นิยามที่ a ก็ได้) แล้ว จะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a เท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\text{ถ้า } x \in D_f \text{ และ } 0 < |x-a| < \delta \quad \text{แล้ว} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

(D_f หมายถึงโดเมนของฟังก์ชัน f)

เนื่องจาก $|x-a|$ คือ ระยะทางระหว่าง x และ a และ $|f(x)-L|$ ก็คือ ระยะทางระหว่าง $f(x)$ และ L และเนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ (มีค่ามากหรือน้อยเท่าใดก็ได้) ดังนั้นในบทนิยามที่ 1.2.1 เราสามารถอธิบายด้วยภาษาพูดเพื่อให้เข้าใจง่ายได้ดังนี้

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ หมายถึง เราสามารถทำให้ระยะทางระหว่าง $f(x)$ และ L เข้าใกล้กันมากเท่าใดก็ได้ (ε มีค่าน้อยมาก ๆ) โดยการกำหนดให้ระยะทางระหว่าง x และ a เข้าใกล้กันเพียงพอ (แต่ต้องไม่เท่ากับศูนย์)

และนอกจากนี้ ในบทนิยามที่ 1.2.1 สามารถเขียนได้ในรูปแบบของช่วง โดยพิจารณาจากอสมการ $0 < |x-a| < \delta$ และ $|f(x) - L| < \varepsilon$

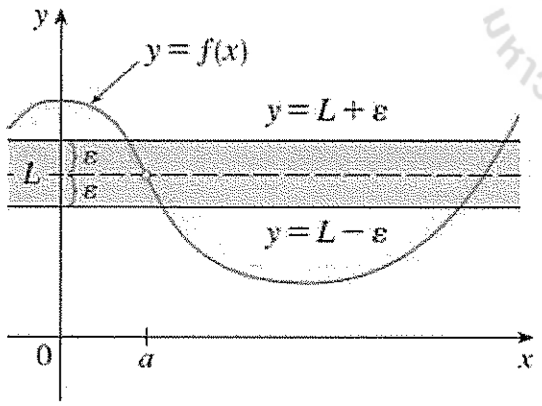
จาก $|x-a| < \delta$ ก็ต่อเมื่อ $-\delta < x-a < \delta$ นั่นคือ $a-\delta < x < a+\delta$ และ $|x-a| > 0$ ก็หมายถึง $x \neq a$

และ $|f(x)-L|<\varepsilon$ ก็ต่อเมื่อ $-\varepsilon<f(x)-L<\varepsilon$ นั่นคือ $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$ ดังนั้นเขียนบทนิยามที่ 1.2.1 ในรูปใหม่ได้ดังนี้

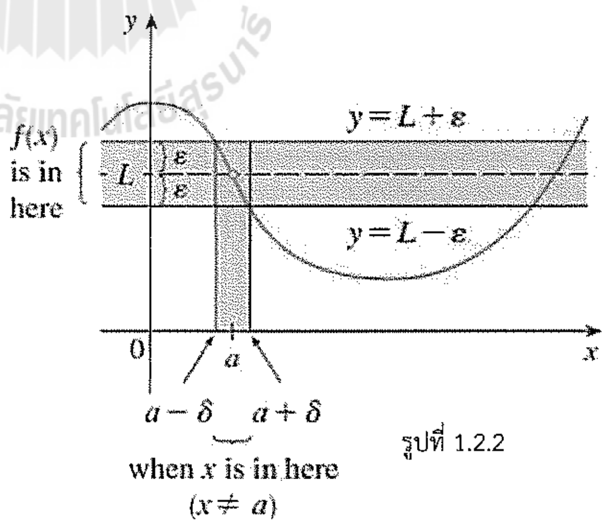
> บทนิยามของ $\lim_{x\to a} f(x)=L$ หมายถึง สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะต้องมีจำนวนจริง $\delta>0$ ซึ่งมีสมบัติว่า
>
> ถ้า $x\in D_f$ และ $x\neq a$ อยู่ในช่วงเปิด $(a-\delta,a+\delta)$ แล้ว ค่าของ $f(x)$ อยู่ในช่วงเปิด $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$

การตีความทางเรขาคณิตของบทนิยามลิมิต สามารถกำหนดในรูปของกราฟของฟังก์ชัน

ถ้ากำหนดให้ $\varepsilon>0$ แล้ววาดเส้นแนวนอน $y=L+\varepsilon$ และ $y=L-\varepsilon$ และกราฟของฟังก์ชัน f (ดูรูปที่ 1.2.1) ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)=L$ แล้ว เราสามารถหาจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้เส้นโค้ง $y=f(x)$ อยู่ระหว่างเส้นแนวนอน $y=L-\varepsilon$ และ $y=L+\varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $x\neq a$ ที่อยู่ในช่วง $(a-\delta,a+\delta)$ (ดูรูปที่ 1.2.2)



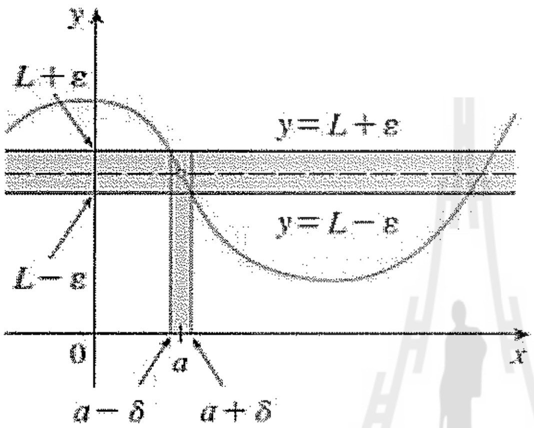
รูปที่ 1.2.1 ที่มา: (2009, Stewart)



รูปที่ 1.2.2

เราจะเห็นได้อีกอย่างหนึ่งว่า ถ้ามี δ ที่เหมาะสมกับ ε นี้แล้ว แน่นอนว่าจำนวนจริงบวกที่น้อยกว่า δ นี้ก็ย่อมใช้ได้กับ ε นี้ได้ด้วย

สิ่งสำคัญที่ตระหนักว่ากระบวนการที่แสดงในรูปที่ 1.2.1 และ 1.2.2 จะต้องใช้ได้สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ซึ่งไม่ว่า ε จะเล็กขนาดไหนก็ตาม รูปที่ 1.2.3 แสดงให้เห็นว่า ถ้าเลือก ε ที่มีขนาดเล็กมาก ๆ แล้ว δ ที่เลือกก็ต้องมีขนาดเล็กลงตามไปด้วย



รูปที่ 1.2.3 ที่มา: (2009, Stewart)

แนวทางการพิสูจน์ด้วยบทนิยามของลิมิตในรูป ε และ δ โดยทั่วไปมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนด ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ เริ่มวิเคราะห์จากผลที่เราต้องการ คือ $|f(x)-L|<\varepsilon$ แล้วเชื่อมโยงอสมการนี้ไปยังอสมการ $|x-a|<\delta$ เพื่อพิจารณาว่า δ ที่เหมาะสมกับ ε นี้ควรมีค่าเท่าใด
2. พิสูจน์ว่า δ ที่วิเคราะห์มาได้ในขั้นที่ 1 นั้นสอดคล้องตามเงื่อนไขในบทนิยาม (2552, ประภาศรี)

<u>**ตัวอย่างที่ 1.2.1**</u> จงแสดงว่า $\lim_{x\to 1}(2x+5)=7$

<u>วิธีทำ</u> **(1) วิเคราะห์หาค่า δ**

ให้ $\varepsilon>0$ เราต้องการหาค่า $\delta>0$ ซึ่งมีสมบัติว่า

ถ้า $0<|x-1|<\delta$ แล้ว $|(2x+5)-7|<\varepsilon$

พิจารณา $\left|(2x+5)-7\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|2x-2\right|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left|x-1\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|x-1\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

ดังนั้นเราจะเลือก $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$

(2) พิสูจน์ ให้ $\varepsilon>0$ ดังนั้นจะมี $\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$ ซึ่งมีสมบัติว่า

ถ้า $0<\left|x-1\right|<\delta$ แล้ว $\left|(2x+5)-7\right|=\left|2x-2\right|=2\left|x-1\right|<2\delta=2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$

ดังนั้น ถ้า $0<\left|x-1\right|<\delta$ แล้ว $\left|(2x+5)-7\right|<\varepsilon$

เพราะฉะนั้น โดยบทนิยามของลิมิต จะได้ $\lim\limits_{x\to1}(2x+5)=7$ □

<u>ตัวอย่างที่ 1.2.2</u> จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-3x-4}{x-4}=5$

<u>วิธีทำ</u> **(1) วิเคราะห์เพื่อหาค่า δ**

ให้ $\varepsilon>0$ เราต้องการหาค่า $\delta>0$ ซึ่งมีสมบัติว่า

ถ้า $0<\left|x-4\right|<\delta$ แล้ว $\left|\frac{x^2-3x-4}{x-4}-5\right|<\varepsilon$

พิจารณา สำหรับ $x\neq4$, $\left|\frac{x^2-3x-4}{x-4}-5\right|<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{(x-4)(x+1)}{x-4}-5\right|<\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \quad \left|x+1-5\right|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|x-4\right|<\varepsilon$$

ดังนั้น เราจะเลือก $\delta=\varepsilon$

(2) พิสูจน์ ให้ $\varepsilon>0$ ดังนั้นจะมี $\delta=\varepsilon$ ซึ่งมีสมบัติว่า

ถ้า $0<\left|x-4\right|<\delta$ แล้ว $\left|\frac{x^2-3x-4}{x-4}-5\right|=\left|\frac{(x+1)(x-4)}{x-4}-5\right|=\left|x-4\right|<\delta=\varepsilon$

ดังนั้น ถ้า $0<|x-4|<\delta$ แล้ว $\left|\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}-5\right|<\varepsilon$

เพราะฉะนั้น โดยบทนิยามของลิมิต จะได้ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}=5$ □

เราสามารถนิยามลิมิตข้างเดียวในรูปของ ε และ δ ได้ดังนี้

<u>บทนิยามที่ 1.2.2</u> (บทนิยามของลิมิตทางซ้าย)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดหนึ่งที่บรรจุจำนวนจริง a (โดยที่ f อาจจะไม่นิยามที่ a ก็ได้หรือ a อาจจะเป็นจุดขอบ) แล้วจะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายเท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆจำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะต้องมีจำนวนจริง $\delta>0$ ซึ่งมีสมบัติว่า

ถ้า $a-\delta<x<a$ แล้ว $|f(x)-L|<\varepsilon$

<u>บทนิยามที่ 1.2.3</u> (บทนิยามของลิมิตทางขวา)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดหนึ่งที่บรรจุจำนวนจริง a (โดยที่ f อาจจะไม่นิยามที่ a ก็ได้หรือ a อาจจะเป็นจุดขอบ) แล้วจะกล่าวว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวาเท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะต้องมีจำนวนจริง $\delta>0$ ซึ่งมีสมบัติว่า

ถ้า $a<x<a+\delta$ แล้ว $|f(x)-L|<\varepsilon$

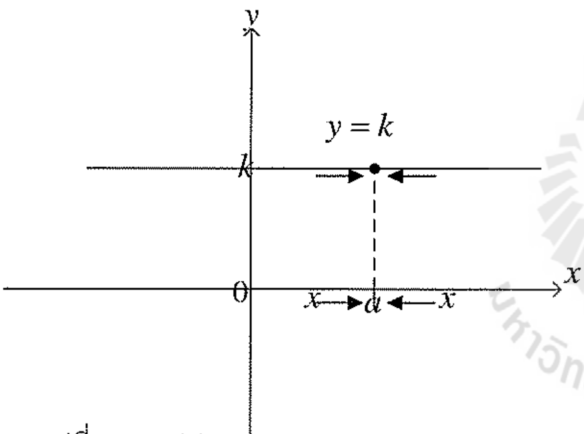
1.3 การหาค่าลิมิตโดยใช้กฎลิมิต (Calculating Limits Using the Limit Laws)

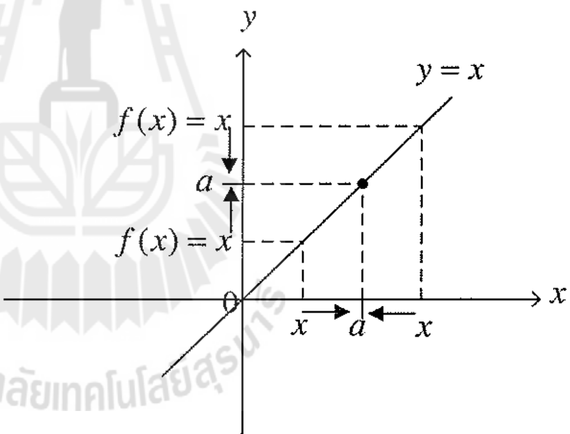
ในหัวข้อนี้ เราจะนำกฎลิมิตมาใช้เพื่อหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งจะทำให้การหาค่าของลิมิตง่ายและสะดวกมากกว่าการหาค่าโดยการคำนวณตัวเลข การวาดรูป หรือการใช้นิยามของลิมิตซึ่งได้กล่าวไปแล้วในหัวข้อที่ 1.1 และ 1.2

<u>**ทฤษฎีบทที่ 1.3.1**</u> ให้ a และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

(1a) $\lim\limits_{x \to a} k = k$

(2a) $\lim\limits_{x \to a} x = a$





รูปที่ 1.3.1 (a) $\lim\limits_{x \to a} k = k$ (b) $\lim\limits_{x \to a} x = a$

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.1</u>

(1) $\lim\limits_{x \to -1} 2 = 2$ (2) $\lim\limits_{x \to \pi} -1 = -1$

(3) $\lim\limits_{x \to 3} x = 3$ (4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} x = \dfrac{\pi}{2}$ □

<u>ทฤษฎีบทที่ 1.3.2</u> ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และสมมุติให้

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{และ} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

แล้ว

(1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L+M$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L-M$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = LM$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (ถ้า $M \neq 0$)

(5) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, เมื่อ $L>0$ ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่

นอกจากนี้ สมบัติข้อ (1) – (5) ยังคงเป็นจริงสำหรับลิมิตด้านเดียว (เมื่อ $x \to a^-$ หรือ $x \to a^+$) จากทฤษฎีบทที่ 1.3.2 สามารถเขียนเป็นภาษาพูดได้คือ

(1) ลิมิตของผลบวกเท่ากับผลบวกของลิมิต

(2) ลิมิตของผลลบเท่ากับผลลบของลิมิต

(3) ลิมิตของผลคูณเท่ากับผลคูณของลิมิต

(4) ลิมิตของผลหารเท่ากับผลหารของลิมิต

(5) ลิมิตของรากที่ n เท่ากับรากที่ n ของลิมิต

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M$

(1) ตามบทนิยามที่ 1.2.1 เราจะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งมีสมบัติว่า ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $\left|\left(f(x)+g(x)\right)-\left(L+M\right)\right| < \varepsilon$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\left|\left(f(x)+g(x)\right)-\left(L+M\right)\right| &= \left|\left(f(x)-L\right)+\left(g(x)-M\right)\right| \\ &\le |f(x)-L| + |g(x)-M|\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = M$ ดังนั้น โดยบทนิยามที่ 1.2.1 จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ และ $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-a| < \delta_1$ แล้ว $|f(x)-L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ .....(1.3.1)

และ

ถ้า $0 < |x-a| < \delta_2$ แล้ว $|g(x)-M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ .....(1.3.2)

ดังนั้น ถ้าให้ δ แทนจำนวนที่น้อยที่สุดระหว่าง δ_1 และ δ_2 หรือเขียนแทนด้วย $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $\left|\left(f(x)+g(x)\right)-\left(L+M\right)\right| \le |f(x)-L| + |g(x)-M| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(ถ้า $0 < |x-a| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ แล้ว $0 < |x-a| < \delta_1$ และ $0 < |x-a| < \delta_2$ ดังนั้นเราจึงสามารถใช้อสมการ 1.3.1 และ 1.3.2 ได้)

เพราะฉะนั้นโดยบทนิยามที่ 1.2.1 จะได้ว่า $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right) = L+M$ □

(2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับข้อ (1) ให้นักศึกษาลองทำเป็นแบบฝึกหัด □

(3) เราจะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งมีสมบัติว่า

ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$

พิจารณา

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-LM| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\ &\le |f(x)g(x) - f(x)M| + |f(x)M - LM| \\ &= |f(x)||g(x)-M| + |M||f(x)-L|\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ดังนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-a| < \delta_1$ แล้ว $|f(x)-L| < \dfrac{\varepsilon}{2|M|}$ .....(1.3.3)

ถ้า $M \neq 0$ จะได้ $\quad |M||f(x)-L| < |M| \cdot \dfrac{\varepsilon}{2|M|} = \dfrac{\varepsilon}{2}$

ถ้า $M = 0$ แล้ว $|M||f(x)-L| = 0 < \dfrac{\varepsilon}{2}$

ดังนั้นไม่ว่าค่าของ M จะเป็นอย่างไร เราจะได้ว่า

$$|M||f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \qquad .....(1.3.4)$$

จาก $\quad |f(x)| = |f(x)-L+L| \leq |f(x)-L| + |L| \qquad .....(1.3.5)$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ดังนั้น จะมี $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta_2$ แล้ว $|f(x)-L| < 1$ ดังนั้น จากอสมการที่ 1.3.5 จะได้

$$|f(x)| < 1 + |L| \qquad .....(1.3.6)$$

ดังนั้น $\quad |f(x)||g(x)-M| < (1+|L|)|g(x)-M| \qquad .....(1.3.7)$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ ดังนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta_3 > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta_3$ แล้ว $|g(x)-M| < \dfrac{\varepsilon}{2(1+|L|)}$

จากอสมการที่ 1.3.7 จะได้

$$|f(x)||g(x)-M| < (1+|L|)|g(x)-M| < (1+|L|)\frac{\varepsilon}{2(1+|L|)} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad .....(1.3.8)$$

ดังนั้นถ้าให้ δ แทนจำนวนที่น้อยที่สุดระหว่าง δ_1, δ_2 และ δ_3 หรือเขียนแทนด้วย $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ แล้วอสมการที่ (1.3.4) และ (1.3.8) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &\leq |f(x)||g(x)-M| + |M||f(x)-L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยบทนิยามที่ 1.2.1 จะได้ $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = LM$ □

(4) ในการพิสูจน์ข้อนี้ เราจะพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$ และจะนำข้อ (3) มาใช้เพื่อแสดงให้เห็นว่า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

(i) จะแสดงว่า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

นั่นคือ จะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{M}\right| < \varepsilon$

จาก $$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M-g(x)}{Mg(x)}\right| = \frac{|M-g(x)|}{|M||g(x)|} \qquad .....(1.3.9)$$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ ดังนั้น สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon_1 > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x-a| < \delta_1 \quad \text{แล้ว} \quad |g(x) - M| < \varepsilon_1 \qquad .....(1.3.10)$$

เนื่องจาก อสมการที่ 1.3.10 เป็นจริงสำหรับทุก $\varepsilon_1 > 0$ ดังนั้น เราสามารถเลือก $\varepsilon_1 = \dfrac{|M|}{2}$ นั่นคือ

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2}$$

จาก $$|M| = |M - g(x) + g(x)| \le |M - g(x)| + |g(x)| < \frac{|M|}{2} + |g(x)|$$

ดังนั้น $\dfrac{|M|}{2} < |g(x)|$ หรือ $\dfrac{2}{|M|} > \dfrac{1}{|g(x)|}$

และจากสมการที่ 1.3.9

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M-g(x)}{Mg(x)}\right| < \frac{2|M-g(x)|}{|M|^2} = \frac{2|M-g(x)|}{M^2} \qquad .....(1.3.11)$$

และนอกจากนี้ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-a| < \delta_2$ แล้ว

$$|M - g(x)| < \frac{\varepsilon M^2}{2} \qquad (\text{เพราะว่า } \lim_{x\to a} g(x) = M\ ) \qquad .....(1.3.12)$$

ดังนั้น ถ้าเราให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ แล้วอสมการที่ 1.3.11 และ 1.3.12 เป็นจริง

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{M}\right| < \dfrac{2|M-g(x)|}{M^2} < \dfrac{2}{M^2} \cdot \dfrac{\varepsilon M^2}{2} = \varepsilon$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0} x^2 + \lim\limits_{x\to 0} 1}}{\lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} 1} \qquad \text{(จากกฎข้อ (1))}$$

$$= \frac{\sqrt{0^2+1}}{0-1} = -1 \qquad \text{(จากกฎข้อ (1a), (2a),(6),(11))} \quad \square$$

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 1.3.3 จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-1\right) = \lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} 1 = 0-1 = -1$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0 ดังนั้นในการหาค่าของลิมิตในตัวอย่างนี้ เราจึงสามารถใช้กฎผลหารในข้อที่ (4) ได้

<u>**ตัวอย่างที่ 1.3.4**</u> จงหา $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2(5x^2-1)}{3x^2(x-1)^4}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\lim_{x\to 3} \frac{2(5x^2-1)}{3x^2(x-1)^4} = \frac{\lim\limits_{x\to 3} 2(5x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 3} 3x^2(x-1)^4} \qquad \text{(จากกฎข้อ (4))}$$

$$= \frac{2\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-1)}{3\lim\limits_{x\to 3} x^2(x-1)^4} \qquad \text{(จากกฎข้อ (6))}$$

$$= \frac{2\left[\lim\limits_{x\to 3} 5x^2 - \lim\limits_{x\to 3} 1\right]}{3\left[\lim\limits_{x\to 3} x^2 . \lim\limits_{x\to 3}(x-1)^4\right]} \qquad \text{(จากกฎข้อ (2), (3))}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{5\lim\limits_{x\to 3} x^2 - \lim\limits_{x\to 3} 1}{(\lim\limits_{x\to 3} x^2)(\lim\limits_{x\to 3} x - \lim\limits_{x\to 3} 1)^4}\right) \qquad \text{(จากกฎข้อ (2), (6), (10))}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{5(3^2)-1}{3^2(3-1)^4}\right) \qquad \text{(จากกฎข้อ (1a), (2a), (11))}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{44}{9\times 16}\right) = \frac{11}{54} \qquad \square$$

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 1.3.4 จะเห็นว่า

$$\lim_{x\to 3} 3x^2(x-1)^4 = 3\lim_{x\to 3} x^2 . \lim_{x\to 3}(x-1)^4$$
$$= 3\left(\lim_{x\to 3} x\right)^2 . \left(\lim_{x\to 3} x - \lim_{x\to 3} 1\right)^4$$
$$= 3.3^2.(3-1)^4 = 432 \neq 0$$

ดังนั้นในการหาค่าของลิมิตในตัวอย่างนี้สามารถใช้กฎผลหารในข้อที่ 4 ได้

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1.3.2 ค่าของลิมิตของฟังก์ชันพหุนาม $P(x) = 2x^2 + 3x - 1$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 มีค่าเท่ากับ $P(2) = 2(2^2) + 3(2) - 1 = 13$

ทฤษฎีบทที่ 1.3.3 สำหรับฟังก์ชันพหุนาม $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ ใดๆ และให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

(12) $\lim_{x\to a} P(x) = P(a) = c_n a^n + \ldots + c_1 a + c_0$

พิสูจน์ สมมติให้ $P(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น n นั่นคือ

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

ดังนั้นโดยใช้กฎข้อ (6), (7) และ (11) จะได้

$$\lim_{x\to a} P(x) = \lim_{x\to a}\left(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0\right)$$
$$= c_n \lim_{x\to a} x^n + c_{n-1} \lim_{x\to a} x^{n-1} + \ldots + c_1 \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} c_0$$
$$= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0$$
$$= P(a)$$

□

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.5</u> จงหา $\lim\limits_{x\to 1}(x^7-6x^5+3x^4-2x^2+x-1)^3$

<u>วิธีทำ</u> $\lim\limits_{x\to 1}(x^7-6x^5+3x^4-2x^2+x-1)^3=\left(\lim\limits_{x\to 1}\left(x^7-6x^5+3x^4-2x^2+x-1\right)\right)^3$

$$=((1)^7-6(1)^5+3(1)^4-2(1)^2+1-1)^3$$

$$=(1-6+3-2+1-1)^3=(-4)^3=-64 \qquad \square$$

<u>ทฤษฎีบทที่ 1.3.4</u> ถ้า $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามใด ๆ และ $Q(a)\neq 0$ แล้ว

(13) $$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$$

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.6</u> จงหา $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+1}{3x^2+2}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+2\right)=3(2^2)+2=12+2=14$ (ใช้กฎข้อ 12)

และ

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3-2x^2+1\right)=(2^3)-2(2^2)+1=8-8+1=1 \qquad \text{(ใช้กฎข้อ 12)}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+2\right)=14\neq 0$ ดังนั้นเราสามารถใช้กฎข้อ (13) จะได้

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+1}{3x^2+2}=\frac{(2^3-2(2)^2+1)}{(3(2)^2+2)}=\frac{1}{14} \qquad \text{(ใช้กฎข้อ 13)} \quad \square$$

ทฤษฎีบทที่ 1.3.5 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดหนึ่งที่บรรจุจำนวนจริง a (f หรือ g อาจจะไม่นิยามที่ a ก็ได้) โดยที่ $f(x)=g(x)$ สำหรับทุก $x\neq a$ เมื่อ x อยู่ในช่วงเปิดนี้ ถ้า $\lim_{x\to a} g(x)=L$ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x)=L$

พิสูจน์ ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดหนึ่งที่บรรจุจำนวนจริง a โดยที่ $f(x)=g(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วงเปิดนี้ และ $x\neq a$
ให้ $\lim_{x\to a} g(x)=L$ ดังนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนจริง $\delta>0$ โดยที่ $f(x)=g(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่บนช่วงเปิด $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$
และ $|g(x)-L|<\varepsilon$ เมื่อ $0<|x-a|<\delta$
เพราะว่า $f(x)=g(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในช่วงเปิดที่บรรจุ a และ $x\neq a$ ดังนั้นจึงได้ว่า $|f(x)-L|<\varepsilon$ เมื่อ $0<|x-a|<\delta$
เพราะฉะนั้น โดยบทนิยามที่ 1.2.1 จะได้ว่า $\lim_{x\to a} f(x)=L$ □

ตัวอย่างที่ 1.3.7 จงหา $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^3-1}\right)$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x\to 1}\left(x^3-1\right)=1^3-1=0$ ดังนั้นเราไม่สามารถใช้กฎข้อ (4) ในการหาค่าของลิมิตในข้อนี้ได้ แต่เราสามารถหาค่าของลิมิตได้โดยอาศัยความรู้ทางพีชคณิตเปลี่ยนรูปของฟังก์ชันใหม่ดังนี้

$$\frac{x-1}{x^3-1}=\frac{x-1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)} \qquad \text{เมื่อ } x\neq 1$$

ดังนั้น โดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 1.3.5 จะได้

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{1}{1^2+1+1}=\frac{1}{3} \qquad \text{(ใช้กฎข้อ 13)}$$

□

<u>**ตัวอย่างที่ 1.3.8**</u> จงหา $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}-1\right)=\sqrt{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}-\lim_{x\to 0}1$$
$$=\sqrt{0+1}-1=0$$

ดังนั้นเราไม่สามารถหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ โดยใช้กฎผลหารได้ (กฎข้อ 4) แต่สามารถหาค่าของลิมิตโดยอาศัยความรู้ทางพีชคณิตโดยการเปลี่ยนรูปของฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}$$
$$=\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}$$
$$=\sqrt{x+1}+1 \qquad \text{เมื่อ } x\neq 0$$

ดังนั้นโดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 1.3.5 จะได้

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1}+1$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}+\lim_{x\to 0}1 \qquad \text{(ใช้กฎข้อ 1, 5)}$$

$$=\sqrt{0+1}+1=2 \qquad \text{(ใช้กฎข้อ 1a, 2a)} \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.9</u> จงหา $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^2-4x-12}$

<u>วิธีทำ</u> จากข้อนี้เราไม่สามารถใช้กฎผลหารได้ทันที เนื่องจากลิมิตของตัวส่วนมีค่าเป็น 0 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ -2 แต่จะเห็นว่า สำหรับ $x\neq -2$ จะได้ว่า $x+2\neq 0$ ดังนั้น เราจึงต้องเริ่มต้นโดยการแยกตัวประกอบ $(x+2)$ ออกมาทั้งเศษและส่วนและตัดค่า $(x+2)$ ออกไป จะได้

$$\frac{x^2-2x-8}{x^2-4x-12}=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-6)(x+2)}=\frac{(x-4)}{(x-6)} \qquad \text{เมื่อ } x\neq -2$$

ดังนั้น ถ้าหาก x เข้าใกล้ -2 แต่ $x\neq -2$ เราสามารถหาค่าลิมิตได้โดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 1.3.5 ได้ดังนี้

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^2-4x-12}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-4)}{(x-6)}$$

$$=\frac{-2-4}{-2-6} \qquad \text{(ใช้กฎข้อ 13)}$$

$$=\frac{3}{4} \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.10</u> จงหา $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

<u>วิธีทำ</u> จากข้อนี้เราไม่สามารถใช้กฎผลหารได้ทันที เนื่องจากลิมิตของตัวส่วนเป็นศูนย์ ฉะนั้นใช้วิธีการทางพีชคณิตช่วยดังนี้

$$\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\times\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2-3^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}$$

$$=\frac{x^2+9-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} \qquad \text{เมื่อ } x\neq 0$$

ดังนั้น โดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 1.3.5 จะได้

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+9}+\lim\limits_{x\to 0}3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+9)}+3}=\frac{1}{\sqrt{0^2+9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6} \qquad \square$$

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.11</u> จงหา $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{2-\sqrt{x^2+3}}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1}2-\sqrt{x^2+3}=0$ ดังนั้น เราจึงไม่สามารถหาค่าลิมิตโดยใช้กฎผลหารได้ทันที ดังนั้นเราต้องใช้วิธีการทางพีชคณิตช่วย ดังนี้

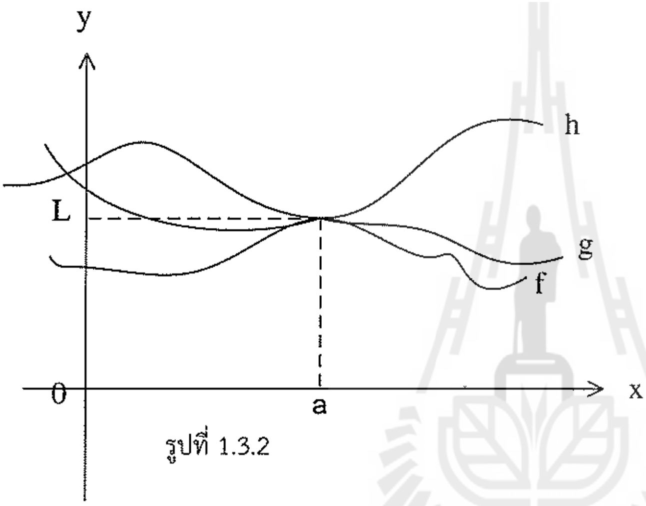
$$
\begin{aligned}
\frac{1-x^3}{2-\sqrt{x^2+3}} &= \frac{(1-x^3)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{\left(2-\sqrt{x^2+3}\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)} \\
&= \frac{(1-x)\left(1+x+x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{4-\left(x^2+3\right)} \\
&= \frac{(1-x)\left(1+x+x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{(1-x)(1+x)} \\
&= \frac{\left(1+x+x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{(1+x)}, \qquad x \neq 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้นโดยอาศัยทฤษฎีบทที่ 1.3.5 จะได้

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{2-\sqrt{x^2+3}} &= \lim_{x\to 1}\frac{\left(1+x+x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{1+x} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(1+x+x^2\right)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{\lim\limits_{x\to 1}(1+x)} \\
&= \frac{\left(1+1+1^2\right)\cdot\left(2+\sqrt{1^2+3}\right)}{1+1} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

□

<u>ทฤษฎีบทที่ 1.3.6</u> (ทฤษฎีบทแซนวิช) ถ้า $f(x) \le g(x) \le h(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a (เงื่อนไขนี้อาจจะยกเว้นที่ a ก็ได้) และถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ แล้ว $\lim_{x \to a} g(x) = L$



รูปที่ 1.3.2

รูปที่ 1.3.2 นี้แสดงกราฟของฟังก์ชัน g ที่ ถูกบีบให้อยู่ระหว่างกราฟของฟังก์ชัน f และ h ในบริเวณที่ใกล้กับ a ดังนั้นถ้าลิมิตของ f และ h ต่างมีค่าเท่ากับ L เมื่อ x เข้าใกล้ a
เพราะฉะนั้น เราก็จะเห็นได้ว่า g ก็จะถูกบังคับให้มีลิมิตเท่ากับ L ด้วย เมื่อ x เข้าใกล้ a

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ $f(x) \le g(x) \le h(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a และ $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ เราจะพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to a} g(x) = L$ นั่นคือ จะต้องแสดงว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|g(x) - L| < \varepsilon$
เนื่องจาก $\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$ ดังนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta_1, \delta_2 > 0$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-a| < \delta_1$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$ และ ถ้า $0 < |x-a| < \delta_2$ แล้ว $|h(x) - L| < \varepsilon$

ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ดังนั้น ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $0 < |x-a| < \delta_1$ และ $0 < |x-a| < \delta_2$ และจะได้ว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ และ $|h(x) - L| < \varepsilon$ หรือ

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ และ $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ที่ทำให้

ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $L - \varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < L + \varepsilon$ นั่นคือ $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$

ดังนั้น $|g(x) - L| < \varepsilon$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ □

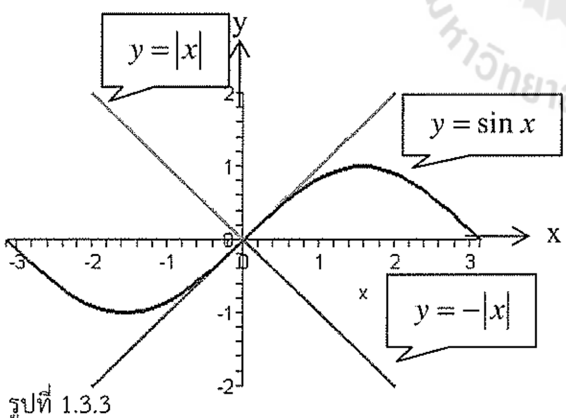
<u>ตัวอย่างที่ 1.3.12</u> จงประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทแซนวิช เพื่อแสดงว่า

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

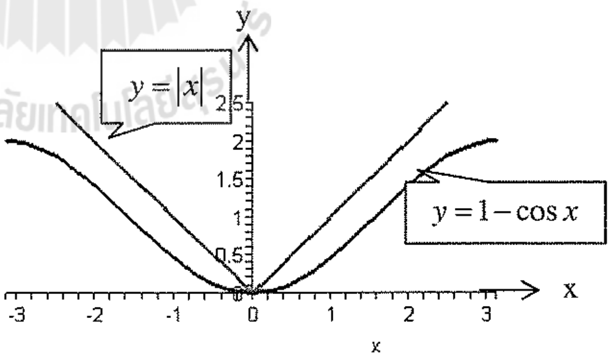
(2) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$

<u>วิธีทำ</u> (1) เนื่องจาก $-|x| \le \sin x \le |x|$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ (ดูรูปที่ 1.3.3) และเนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0} (-|x|) = 0$ และ $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทแซนวิชจะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$

(2) เนื่องจาก $0 \le 1 - \cos x \le |x|$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ (ดูรูปที่ 1.3.4) และ $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0 = \lim\limits_{x \to 0} 0$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทแซนวิชจะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$ □



รูปที่ 1.3.3



รูปที่ 1.3.4

ทฤษฎีบทที่ 1.3.7 ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ และ $|g(x)| < M$ สำหรับบางค่าคงตัว M และสำหรับ $x \neq a$ จะได้ว่า $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$

ลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ต่อไปนี้เราจะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทฤษฎีบทต่อไปนี้เราจะนำไปใช้ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

ทฤษฎีบทที่ 1.3.8 ให้ x มีหน่วยเป็นเรเดียน

(1) $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

(2) $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$

(3) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

(4) $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$

(5) $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$

(6) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(7) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

(8) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

<u>พิสูจน์</u> ข้อ (1) และ (2) แสดงแล้วในตัวอย่างที่ 1.3.12

(3) จาก $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0$ และ

$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=\lim_{x\to 0}1-\lim_{x\to 0}\cos x=1-\lim_{x\to 0}\cos x=0$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ □

(4) ในการพิสูจน์ $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$ สามารถที่จะพิสูจน์ $\lim_{h\to 0}\sin(a+h)=\sin a$ แทนได้ เนื่องจาก ถ้าให้ $x=a+h$ แล้ว $x\to a$ ก็ต่อเมื่อ $h\to 0$ ดังนั้น $\lim_{x\to a}\sin x=\lim_{h\to 0}\sin(a+h)$

จากเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ

$$\sin(a+h)=\sin a\cos h+\sin h\cos a$$

และ $\lim_{x\to 0}\sin x=0$ และ $\lim_{x\to 0}\cos x=1$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\sin(a+h)&=\lim_{h\to 0}(\sin a\cos h+\sin h\cos a)\\&=\sin a\lim_{h\to 0}\cos h+\cos a\lim_{h\to 0}\sin h\\&=(\sin a)\cdot 1+(\cos a)\cdot 0\\&=\sin a\end{aligned}$$ □

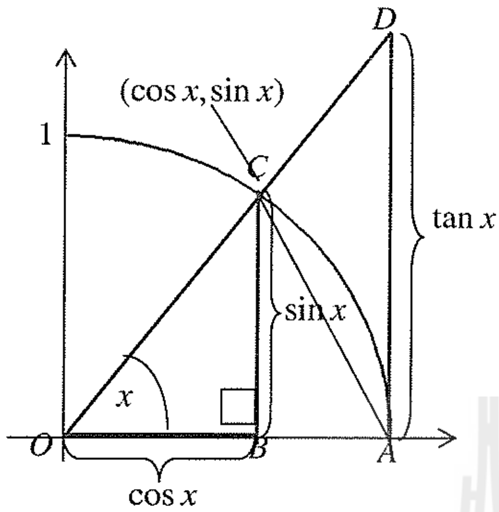
(5) การพิสูจน์คล้ายข้อ (4) ให้นักศึกษาทำเป็นแบบฝึกหัด

(6) พิจารณาจากรูป 1.3.5 เมื่อ $0<x<\pi/2$ เราจะได้สมการดังต่อไปนี้

พื้นที่ของสามเหลี่ยม $OAC=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|BC|=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x=\frac{\sin x}{2}$

พื้นที่ของเซกเตอร์ $OAC=\frac{x}{2\pi}$(พื้นที่ของวงกลม)$=\frac{x}{2\pi}\pi=\frac{x}{2}$

พื้นที่ของสามเหลี่ยม $OAD=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|AD|=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$



รูปที่ 1.3.5

จากรูปที่ 1.3.5 เราจะเห็นได้ชัดว่า

พื้นที่ของสามเหลี่ยม $OAC <$ พื้นที่ของเซกเตอร์ $OAC <$ พื้นที่ของสามเหลี่ยม OAD

ดังนั้น $\dfrac{\sin x}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x}$ สำหรับ $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ .....(1.3.13)

เนื่องจาก $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\dfrac{\sin x}{2} > 0$ เพราะฉะนั้น สามารถนำ $\dfrac{\sin x}{2}$ หารตลอดทั้งอสมการ

(1.3.13) จะได้ $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ หรือ $1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$

เนื่องจาก $\cos(-x) = \cos x$ และ $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ สำหรับ $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$

จาก $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 = \lim\limits_{x\to 0} 1$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทแซนวิชจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(7) เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ ดังนั้นใช้กฎผลหารหาค่าลิมิตไม่ได้ ดังนั้นเราจะใช้วิธีการทางพีชคณิตช่วย ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x}{x} &= \left(\frac{1-\cos x}{x}\right)\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)\\ &= \frac{1-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}\\ &= \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}\\ &= \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\end{aligned}$$

จาก $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ และ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x+\lim\limits_{x\to 0}1}=\dfrac{0}{1+1}=0$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)\\ &= 1\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

(8) จาก $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ และ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ และ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$ □

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.13</u> จงหา $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$

<u>วิธีทำ</u> สำหรับ $x\neq 0$ จะได้ว่า

$$\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

ดังนั้น $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

(โดยทฤษฎีบท 1.3.8 ข้อ (6)) □

จากตัวอย่างนี้จึงสรุปได้ว่า $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1}$

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.14</u> จงหา $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4}{3}\\ &= \frac{4}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\end{aligned}$$

ให้ $u=4x$ จะได้ว่า เมื่อ $x\to 0$ ค่าของ $u\to 0$ ด้วยเช่นกัน ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x} &= \frac{4}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\\ &= \frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

□

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.15</u> จงหา $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{6x}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{6x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{6x}\cdot\sin 2x\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{6}\cdot\sin 2x\\ &= \frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin 2x\\ &= \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 0 \qquad (\text{เมื่อ } x\to 0 \text{ ดังนั้น } 2x\to 0)\\ &= 0\end{aligned}$$

□

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.16</u> จงหา $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos^2 x)}{x}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\sin x}{x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x\\ &= -1\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

□

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.17</u> จงหา $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin\left(x^2\right)}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u=x^2$ เราจะได้ว่า เมื่อ $x\to 0$ ค่าของ $u\to 0$ ด้วยเช่นกัน ดังนั้น

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin\left(x^2\right)} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u} = 1$$

□

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.18</u> จงหา $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 5x}{\tan^2 7x}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 5x}{\tan^2 7x} &= \left(\lim_{x\to 0}\ \frac{\tan 5x}{\tan 7x}\right)^2\\ &= \left(\lim_{x\to 0}\ \frac{\tan 5x}{5x}\cdot\frac{5x}{7x}\cdot\frac{7x}{\tan 7x}\right)^2\\ &= \left(\frac{5}{7}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\tan 7x}{7x}}\right)^2\\ &= \left(\frac{5}{7}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\right)^2 = \frac{25}{49}\end{aligned}$$

(เมื่อ $x\to 0$ จะได้ $5x\to 0$ และ $7x\to 0$)

<u>ตัวอย่างที่ 1.3.19</u> จงหา $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้เราไม่สามารถหาค่าลิมิตโดยใช้กฎผลคูณได้ เนื่องจาก $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ หาค่าไม่ได้ (ดูรูปที่ 1.3.6) เพราะเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ค่าของ $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ มีค่าแกว่งกวัดอยู่ระหว่าง -1 และ 1 ดังนั้น เราจะหาค่าของ $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ โดยประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทแซนวิช

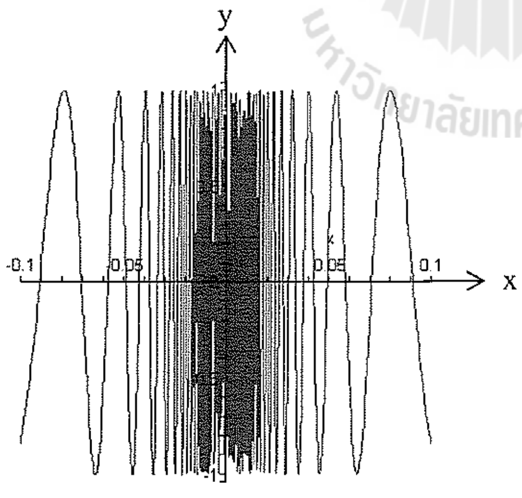
เนื่องจาก $\quad -1 \le \cos\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \quad$ เมื่อ $x \ne 0$

ดังนั้น $\quad -x^2 \le x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2 \quad$ สำหรับทุก $x \ne 0$

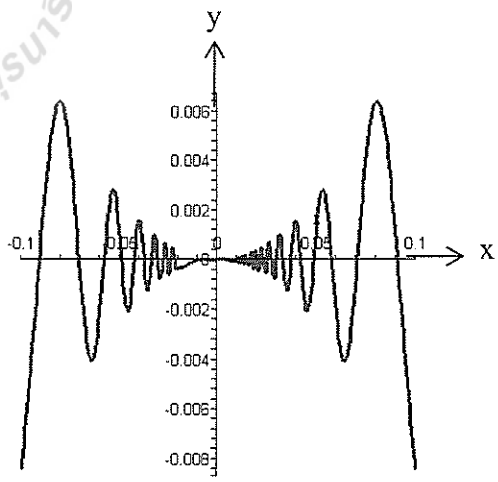
นอกจากนี้ $\lim_{x\to 0}\left(-x^2\right) = 0 = \lim_{x\to 0}\left(x^2\right)$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบทแซนวิช

$$\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \qquad \text{(ดูรูปที่ 1.3.7)} \qquad \square$$



รูปที่ 1.3.6 กราฟ $y = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$



รูปที่ 1.3.7 กราฟ $y = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1) กำหนดให้ $\lim_{x\to a} f(x) = -3$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a} h(x) = 8$
จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ถ้าลิมิตหาค่าได้ และถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ให้อธิบายเหตุผลด้วย

(1.1) $\lim_{x\to a}[f(x)+h(x)]$ (1.2) $\lim_{x\to a}[f(x)]^2$

(1.3) $\lim_{x\to a}\sqrt[3]{f(x)}$ (1.4) $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}$

(1.5) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)}$ (1.6) $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$

(1.7) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ (1.8) $\lim_{x\to a}\frac{2f(x)}{h(x)-f(x)}$

2) จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้โดยใช้กฎของลิมิต

(2.1) $\lim_{x\to -2}(3x^4+2x^2-x+1)$ (2.2) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+1}{x^2+6x-4}$

(2.3) $\lim_{x\to 3}(x^2-4)(x^3+5x-1)$ (2.4) $\lim_{x\to 1}(\frac{1+2x}{x^4+3x^2+1})^3$

(2.5) $\lim_{x\to -2}\sqrt{3x^4+2x+5}$

3) จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(3.1) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ (3.2) $\lim_{x\to -4}\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

(3.3) $\lim_{t\to -3}\frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$ (3.4) $\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-16}{h}$

(3.5) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$ (3.6) $\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^4-1}{h}$

(3.7) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

(3.8) $\lim\limits_{t\to 9}\dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

(3.9) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

(3.10) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

(3.11) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

(3.12) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2+t})$

(3.13) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

(3.14) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

(3.15) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t})$

(3.16) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x^4+9x^2}+5x}{x+4}$

(3.17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x-2|x|}{3x-|x|}$

(3.18) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{x+2x^2}{|2x+1|}$

(3.19) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^-}\dfrac{5+|2x-3|}{x^2-x+1}$

4) จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(4.1) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+1, & x<2\\ x^3+1, & x\geq 2\end{cases}$

(4.2) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases}2x\cos x, & x<0\\ x^3+2x, & x\geq 0\end{cases}$

(4.3) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ เมื่อ $\begin{cases}2x+1, & x<-1\\ 4, & -1<x<1\\ 3x+1, & x>1\end{cases}$

(4.4) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases}6-2x, & x>3\\ \sqrt{9-x^2}, & |x|<3\end{cases}$