**การหาอนุพันธ์โดยลอการิทึม (Logarithmic Differentiation)**

เป็นวิธีหนึ่งที่ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในรูป ผลคูณ ผลหาร และในรูปฟังก์ชันเลขชี้กำลัง โดยมีขั้นตอน ดังนี้

1. ใส่ฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติทั้งสองข้างในสมการ $y = f(x)$
2. หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ $x$
3. แก้สมการหา $\dfrac{dy}{dx}$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.3.15**</u> จงหาอนุพันธ์ของ $y = (\sin x)^{\ln x}$ เมื่อ $0 < x < \pi$

<u>วิธีทำ</u> ใส่ฟังก์ชัน $\ln$ เข้าไปทั้งสองข้างจะได้

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\ln x} = \ln x \cdot \ln(\sin x) \qquad .....(4.3.3)$$

หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ $x$ ทั้งสองข้างของสมการ (4.3.3) จะได้

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}\left[\ln x \cdot \ln(\sin x)\right]$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \ln(\sin x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\cot x \cdot \ln x + \frac{\ln(\sin x)}{x}\right] = (\sin x)^{\ln x}\left[\cot x \cdot \ln x + \frac{\ln(\sin x)}{x}\right] \qquad \square$$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.3.16**</u> จงหาอนุพันธ์ของ $y = \left[(x+1)(x+2)(x+3)\right]/(x+4)$

<u>วิธีทำ</u> ใส่ฟังก์ชัน $\ln$ เข้าไปทั้งสองข้าง จะได้

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln\left(\left[(x+1)(x+2)(x+3)\right]/(x+4)\right) \\ &= \ln(x+1) + \ln(x+2) + \ln(x+3) - \ln(x+4) \end{aligned} \qquad .....(4.3.4)$$

หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ $x$ ทั้งสองข้างของสมการ (4.3.4) จะได้

$$\frac{d}{dx}[\ln y]=\frac{d}{dx}\left[\ln(x+1)+\ln(x+2)+\ln(x+3)-\ln(x+4)\right]$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right]$$

$$=\left[(x+1)(x+2)(x+3)/(x+4)\right]\cdot\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right] \qquad \square$$

**ตัวอย่างที่ 4.3.17** จงหาอนุพันธ์ของ $y=(\cos x)^x - x^{\cos x}$

วิธีทำ ให้ $y_1=(\cos x)^x$ และ $y_2 = x^{\cos x}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}[y_1-y_2]=\frac{dy_1}{dx}-\frac{dy_2}{dx}$

จะหา $\frac{dy_1}{dx}$ และ $\frac{dy_2}{dx}$

จาก $y_1=(\cos x)^x$ ใส่ฟังก์ชัน ln ลงไปทั้งสองข้างจะได้ $\ln y_1=\ln(\cos x)^x = x\cdot\ln\cos x$

หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ $x$ ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{d}{dx}[\ln y_1]=\frac{d}{dx}[x\cdot\ln\cos x]$$

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx}=-x\tan x+\ln(\cos x)$$

$$\frac{dy_1}{dx}=y_1\left[-x\tan x+\ln(\cos x)\right]=(\cos x)^x\left[-x\tan x+\ln(\cos x)\right]$$

จาก $y_2=x^{\cos x}$ ดังนั้น $\ln y_2=\ln x^{\cos x}=\cos x\cdot\ln x$

หาอนุพันธ์โดยปริยายเทียบกับ $x$ ทั้งสองข้าง จะได้

$$\frac{d}{dx}[\ln y_2]=\frac{d}{dx}[\cos x\cdot\ln x]$$

$$\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx}=\frac{\cos x}{x}+\ln x\cdot(-\sin x)$$

$$\frac{dy_2}{dx}=y_2\left[\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right]=x^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right]$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_2}{dx}$$

$$= (\cos x)^x \left[-x\tan x + \ln(\cos x)\right] - x^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right] \qquad \square$$

## แบบฝึกหัดที่ 4.3

1) จงหาค่า $x$ จากสมการต่อไปนี้

(1.1) $5\ln x = 2$

(1.2) $e^{2x+3} - 7 = 0$

(1.3) $5^{\log_5(x^2+2x)} = 3$

(1.4) $\ln(\ln x) = 1$

(1.5) $2\ln x = \ln 2 + \ln(3x-4)$

2) จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

(2.1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x}$

(2.2) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{(1-6x)}$

(2.3) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

(2.4) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} e^{\tan x}$

(2.5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

(2.6) $\lim\limits_{x\to 3^+} \log_{10}(x^2-5x+6)$

(2.7) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos x)$

3) จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(3.1) $f(x) = \ln(x^2+2x+1)$

(3.2) $f(x) = \sin(\ln x^2)$

(3.3) $f(x) = \ln(\tan x)$

(3.4) $f(x) = \log_2\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$

(3.5) $f(x) = \sqrt[5]{\log_{10}(x^3)}$

(3.6) $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

(3.7) $f(x) = x^3\ln(x^2-1)$

(3.8) $f(x) = x^2 \ln(2 + e^{3x})$

(3.9) $f(x) = \ln(x^4 \cos^2 x)$

(3.10) $f(x) = 10^{\sec x}$

(3.11) $f(x) = \ln\left|x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x\right|$

(3.12) $f(x) = \ln(e^x + 2xe^{-x})$

(3.13) $f(x) = \left[\log_3(1 + 3^x)\right]^3$

(3.14) $f(x) = \ln(\ln(\tan x))$

4) จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \ln(x^3 - 7)$ ที่จุด $(2,0)$

5) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้ลอการิทึม

(5.1) $y = (3x-1)^4(x^4 + 4x^3 - 1)^6$

(5.2) $y = \sqrt{x}e^{x^2}(x^2 + 2)^9$

(5.3) $y = \dfrac{\sin^2 x \tan^3 x}{(x+1)^2}$

(5.4) $y = x^{2x}$

(5.5) $y = x^{\sin x^2}$

(5.6) $y = x^{(\cos x)^x}$

(5.7) $y = \dfrac{(x+1)(x^2 + 2x + 1)(x^3 - 1)}{(x+3)(x+2)}$

(5.8) $y = (\ln x)^{\cos x} + (\cos x)^{\ln x}$

(5.9) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 + 1}{x - 2}}$

6) ให้ $y$ นิยามโดยปริยายด้วยสมการ $y = \ln(x^2 + y^2)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

## 4.4 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Functions)

**<u>บทนิยามที่ 4.4.1</u>** ไฮเพอร์โบลิกไซน์ (เขียนแทนด้วย $\sinh$ ) และไฮเพอร์โบลิกโคไซน์ (เขียนแทนด้วย $\cosh$ ) นิยามดังนี้

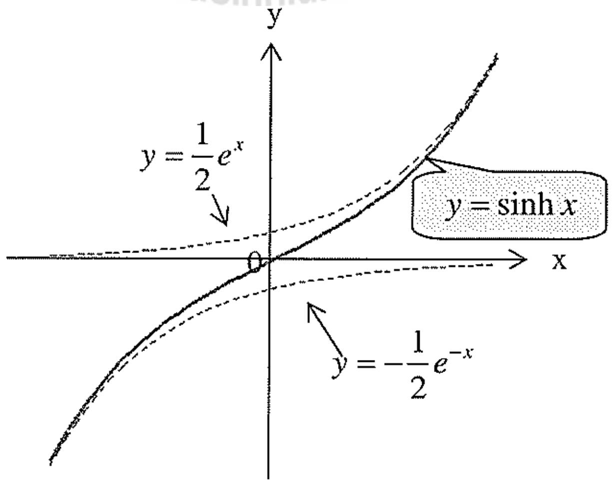
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

โดเมนของทั้งสองฟังก์ชัน คือเซตของจำนวนจริง

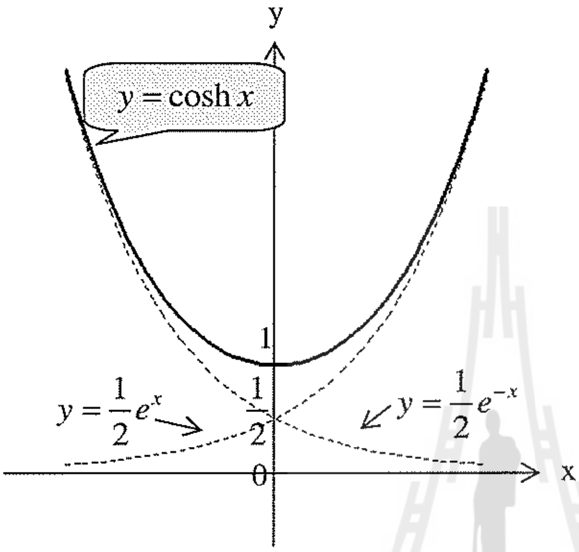
เราสามารถพิจารณา กราฟของไฮเพอร์โบลิกไซน์ และไฮเพอร์โบลิกโคไซน์ จากนิยามในเทอมของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

เนื่องจาก $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \left(-\frac{1}{2}e^{-x}\right)$ ดังนั้น กราฟของ $y = \sinh x$ เกิดจากการบวกกราฟของ $y = \frac{1}{2}e^x$ และ $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ ดังแสดงในรูปที่ 4.4.1




รูปที่ 4.4.1

ทำนองเดียวกัน กราฟของ $y=\cosh x$ เกิดจากการบวกกราฟของ $y=\frac{1}{2}e^{x}$ และ $y=\frac{1}{2}e^{-x}$ ดังแสดงในรูปที่ 4.4.2




รูปที่ 4.4.2

เนื่องจาก $\sinh(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-\sinh x$

และ $\cosh(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cosh x$

ดังนั้น $y=\sinh x$ เป็นฟังก์ชันคี่ (กราฟจะมีสมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด (ดูรูปที่ 4.4.1)) และ $y=\cosh x$ เป็นฟังก์ชันคู่ (กราฟจะมีสมมาตรเทียบกับแกน $y$ (ดูรูปที่ 4.4.2))

นอกจากนั้น $\sinh 0=\dfrac{e^{0}-e^{-0}}{2}=\dfrac{1-1}{2}=0$ และ $\cosh 0=\dfrac{e^{0}+e^{-0}}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1$

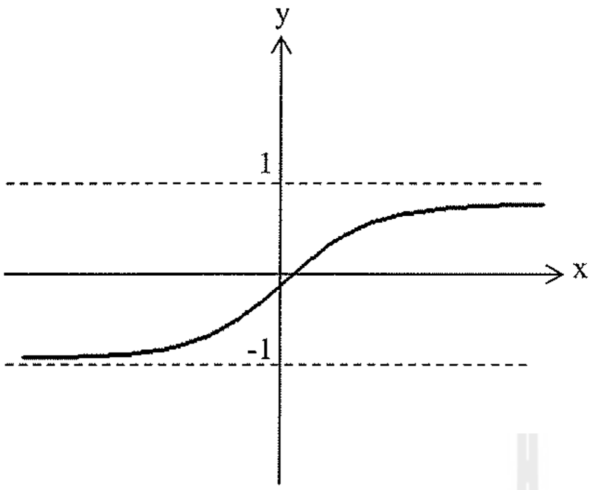
<u>บทนิยามที่ 4.4.2</u>

(1) $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

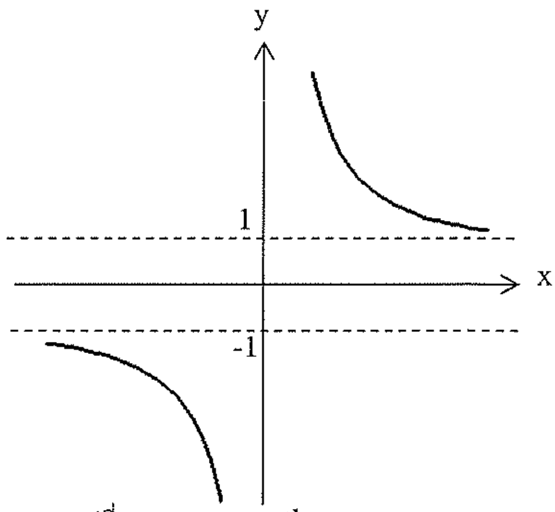
(2) $\operatorname{sech} x=\dfrac{1}{\cosh x}=\dfrac{2}{e^{x}+e^{-x}}$

(3) $\operatorname{csch} x=\dfrac{1}{\sinh x}=\dfrac{2}{e^{x}-e^{-x}},\qquad x\neq 0$

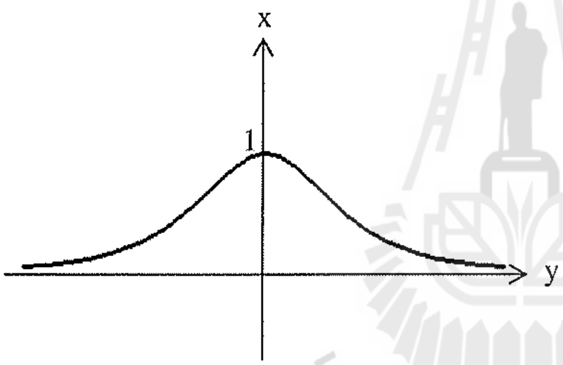
(4) $\coth x=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}},\qquad x\neq 0$



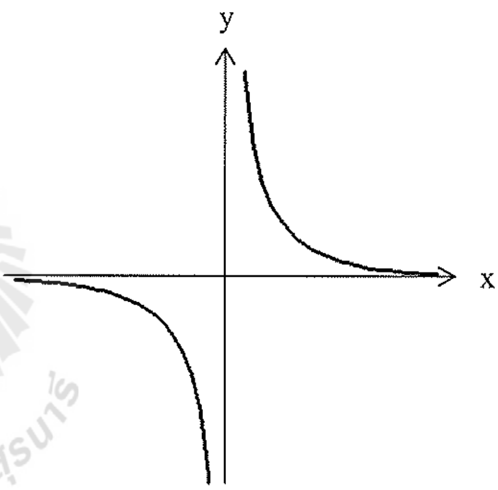

รูปที่ 4.4.3 $y = \tanh x$




รูปที่ 4.4.4 $y = \coth x$




รูปที่ 4.4.5 $y = \operatorname{sech} x$




รูปที่ 4.4.6 $y = \operatorname{csch} x$

**เอกลักษณ์พื้นฐานของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก**

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(3) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(4) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

(5) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$

(6) $\sinh \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$

(7) $\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$

(8) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

(9) $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

(10) $\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

(11) $\tanh \frac{x}{2} = \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x}$

ในการพิสูจน์เอกลักษณ์ข้อ (1) สามารถใช้นิยามของ $\sinh x$ และ $\cosh x$ แสดงได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}
$$

สำหรับการพิสูจน์เอกลักษณ์ข้อ (2) เราสามารถแสดงให้เห็นได้โดย แสดงว่าทางขวามือของสมการมีค่าเท่ากับทางซ้ายมือของสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y&=\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\\&=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4}+\frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-(x+y)}}{4}\\&=\frac{2e^{x+y}-2e^{-(x+y)}}{4}=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}\\&=\sinh(x+y)\end{aligned}$$

สำหรับการพิสูจน์เอกลักษณ์ในข้อ (3) สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ในข้อ (2) และในการพิสูจน์เอกลักษณ์ที่เหลือสามารถใช้เอกลักษณ์ในข้อ (1)-(3) และบทนิยามที่ 4.4.1 และ 4.4.2 ช่วยในการพิสูจน์ได้ (ให้นักศึกษาลองทำเป็นแบบฝึกหัด)

จากกฎพื้นฐานของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกจะสังเกตเห็นว่า กฎบางข้อจะคล้ายกับกฎของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$

คล้ายกับ $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ เป็นต้น

แต่อย่างไรก็ตาม กฎบางข้อของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกก็ต่างกับกฎของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยต่างกันที่เครื่องหมาย เช่น $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ แต่ $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ เป็นต้น

จากความคล้ายของกฎบางประการของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ ก็เป็นเหตุผลหนึ่งที่ชื่อของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกคล้ายกับชื่อของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนอกจากนั้นอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกบางตัวก็คล้ายกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติด้วยเช่นกัน

<u>อนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก</u>

ในการหาอนุพันธ์ของ $y=\sinh x$ และ $y=\cosh x$ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}(\sinh x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cosh x$$

และ
$$\frac{d}{dx}(\cosh x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\sinh x$$

ดังนั้น

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x} \quad \text{และ} \quad \boxed{\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x}$$

และถ้า $u = u(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \cdot \frac{du}{dx}} \quad \text{และ} \quad \boxed{\frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u \cdot \frac{du}{dx}}$$

สำหรับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกอื่น ๆ สามารถหาได้โดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \sinh x$ และ $y = \cosh x$ (ให้นักศึกษาลองทำเป็นแบบฝึกหัด) ได้สูตรดังนี้

(1) $\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

(2) $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

(3) $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

(4) $\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

ถ้า $u = u(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ แล้ว

(5) $\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$

(6) $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \cdot \frac{du}{dx}$

(7) $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u \cdot \frac{du}{dx}$

(8) $\frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u \cdot \frac{du}{dx}$

**ข้อสังเกต** จากสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกจะพบว่า สูตรที่ได้คล้ายกับสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ มีเพียงบางสูตรที่ต่างกันที่เครื่องหมาย ซึ่งได้แก่

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x \qquad \text{แต่} \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

และ

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x \qquad \text{แต่} \qquad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

__ตัวอย่างที่ 4.4.1__ กำหนด $f(x) = \sinh(3x)$ จงหา $f'(x)$

__วิธีทำ__ ให้ $u = 3x$ ดังนั้นจากสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์ และกฎลูกโซ่ จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\sinh(3x) \\ &= \frac{d}{dx}\sinh u \\ &= \cosh u \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \cosh(3x) \cdot \frac{d(3x)}{dx} \\ &= 3\cosh(3x) \end{aligned}$$

□

__ตัวอย่างที่ 4.4.2__ กำหนด $f(x) = \tanh^2(x)$ จงหา $f'(x)$

__วิธีทำ__ ใช้กฎลูกโซ่และสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\tanh^2 x \\ &= 2\tanh x \cdot \frac{d}{dx}\tanh x \\ &= 2\tanh x \cdot \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

□

**ตัวอย่างที่ 4.4.3** กำหนด $y=\tan^{-1}(\sinh x)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\sinh x)\\&=\frac{1}{1+\sinh^2 x}\cdot\frac{d}{dx}\sinh x\\&=\frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}\\&=\frac{\cosh x}{\cosh^2 x}\\&=\frac{1}{\cosh x}=\operatorname{sech} x\end{aligned}$$ □

**ตัวอย่างที่ 4.4.4** กำหนด $y=\dfrac{\tanh x}{1+\operatorname{sech} x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ ใช้กฎผลหาร จะได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{\tanh x}{1+\operatorname{sech} x}\right)\\&=\frac{(1+\operatorname{sech} x)\frac{d}{dx}\tanh x-\tanh x\frac{d}{dx}(1+\operatorname{sech} x)}{(1+\operatorname{sech} x)^2}\\&=\frac{(1+\operatorname{sech} x)\operatorname{sech}^2 x-\tanh x(-\operatorname{sech} x\tanh x)}{(1+\operatorname{sech} x)^2}\\&=\frac{\operatorname{sech}^2 x+\operatorname{sech}^3 x+\operatorname{sech} x\tanh^2 x}{(1+\operatorname{sech} x)^2}\\&=\frac{\operatorname{sech} x\left(\operatorname{sech} x+\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x\right)}{(1+\operatorname{sech} x)^2}\\&=\frac{\operatorname{sech} x\left(\operatorname{sech} x+1\right)}{(1+\operatorname{sech} x)^2}=\frac{\operatorname{sech} x}{1+\operatorname{sech} x}\end{aligned}$$ □

**ตัวอย่างที่ 4.4.5** จงหา $\lim\limits_{x\to+\infty} \coth x$

วิธีทำ

$$\lim_{x\to+\infty} \coth x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$$

$$= \frac{1+0}{1-0} = 1 \qquad \square$$

**ตัวอย่างที่ 4.4.6** กำหนด $y = x\,\mathrm{csch}\,(e^{3x})$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จากกฎผลคูณและกฎลูกโซ่

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}\mathrm{csch}\left(e^{3x}\right) + \mathrm{csch}\left(e^{3x}\right)\frac{dx}{dx}$$

$$= x\left(-\mathrm{csch}\left(e^{3x}\right)\coth\left(e^{3x}\right)\frac{d}{dx}\left(e^{3x}\right)\right) + \mathrm{csch}\left(e^{3x}\right)$$

$$= -x\,\mathrm{csch}\left(e^{3x}\right)\coth\left(e^{3x}\right)e^{3x}\frac{d}{dx}[3x] + \mathrm{csch}\left(e^{3x}\right)$$

$$= -3xe^{3x}\,\mathrm{csch}\left(e^{3x}\right)\coth\left(e^{3x}\right) + \mathrm{csch}\left(e^{3x}\right)$$

$$= \mathrm{csch}\left(e^{3x}\right)\left(1-3xe^{3x}\coth\left(e^{3x}\right)\right) \qquad \square$$

## แบบฝึกหัดที่ 4.4

1) จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้ (ถ้ามี)

(1.1) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh x$

(1.2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \coth x$

(1.3) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sech} x$

(1.4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \coth x$

2) จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(2.1) $y = \cosh^2(4x)$

(2.2) $y = e^{\coth(2x)}$

(2.3) $y = \sec^{-1}\left(\sinh(e^x)\right)$

(2.4) $y = \ln\left(x^2 \tanh x\right)$

(2.5) $y = \dfrac{\cosh x}{1-\sinh x}$

(2.6) $y = \sqrt{x}\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})$

(2.7) $y = \log_2\left(\sinh\left(e^{2x}\right)\right)$

(2.8) $y = \left(\ln x\right)^{\cosh x \cdot \sinh x}$

(2.9) $y = \left(\tanh x\right)^{\operatorname{sech} x}$

(2.10) $y = \dfrac{\sinh(2x)\cdot\cosh(3x+1)\cdot\tanh x^2\cdot\operatorname{sech}(\sqrt{x})}{\left(1+\operatorname{csch} x\right)\coth\left(e^x\right)}$

3) กำหนดให้ $y$ นิยามโดยปริยายด้วยสมการ $x\sinh y + y\cosh x = 2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

4) กำหนดให้ $y$ นิยามโดยปริยายด้วยสมการ $x^3 \tanh y^2 = \ln xy$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

## 4.5 หลักเกณฑ์โลปีตาล (L'Hopital's Rule)

จากในบทที่ 1 ในการหาค่า $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ จะใช้กฎผลหารในการหาค่าลิมิตได้ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ แต่ถ้า $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ อาจจะหาค่าได้ หรือหาค่าไม่ได้

ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ แล้วการหาค่า $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ จะต้องใช้วิธีการทางพีชคณิตจัดรูปฟังก์ชันใหม่ หรือใช้ทฤษฎีบทแซนวิชช่วยในการหาค่าลิมิตผลหารนี้ สำหรับในหัวข้อนี้เราจะใช้หลักเกณฑ์ของโลปีตาลช่วยในการหาลิมิตของผลหาร

**<u>บทนิยามที่ 4.5.1</u>**

ลิมิต $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ จะเรียกว่า รูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ (indeterminate form of type $\dfrac{0}{0}$)
ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
และจะเรียก $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ว่า รูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

ตัวอย่างของลิมิตที่มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{\infty}{\infty}$

<u>ทฤษฎีบทที่ 4.5.2</u> (หลักเกณฑ์โลปีตาล)

ให้ $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $I$ ที่บรรจุ $a$ และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in I$ ถ้า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ แล้ว

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad .....(4.5.1)$$

เมื่อลิมิตทางขวาของสมการ (4.5.1) หาค่าได้ หรือเป็น $\infty$ หรือ $-\infty$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.5.1**</u> จงหา $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0} \sin(2x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0} \sin(3x)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ โดยกฎของโลปีตาลจะได้

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} &\overset{L}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\sin(2x))}{\frac{d}{dx}(\sin(3x))} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos(2x)}{3\cos(3x)} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x)}{\cos(3x)} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

□

**ตัวอย่างที่ 4.5.2** จงหา $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{\cos x-1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 0^-}\sin x = 0 = \lim_{x\to 0^-}(\cos x-1)$ ดังนั้น $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{\cos x-1}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ โดยกฎของโลปีตาลจะได้

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{\cos x-1} &\overset{L}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\frac{d}{dx}(\cos x-1)}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{-\sin x}\\ &= -\lim_{x\to 0^-}\cot x\\ &= +\infty\end{aligned}$$

□

**หมายเหตุ** ในตัวอย่างที่ 4.5.2 ในการหา $\lim_{x\to 0^-}\frac{-\cos x}{\sin x}$ ไม่สามารถใช้กฎโลปีตาลต่อได้ เพราะ $\lim_{x\to 0^-}-\cos x = -1 \neq 0$ ดังนั้น $\lim_{x\to 0^-}\frac{-\cos x}{\sin x}$ ไม่มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$

**ตัวอย่างที่ 4.5.3** จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$

วิธีทำ พิจารณา $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$ และ $\lim_{x\to 0^+}\cot x = +\infty$ ดังนั้น $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\frac{\infty}{\infty}$ โดยกฎของโลปีตาลจะได้

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(\cot x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin^2 x}{x} \qquad \text{(มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ } \tfrac{0}{0}\text{)}$$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}\left(-\sin^2 x\right)}{\frac{d}{dx}(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\sin x\cos x}{1}=-2\cdot\sin 0\cdot\cos 0=0 \qquad \square$$

**หมายเหตุ** จากตัวอย่างที่ 4.5.3 จะเห็นว่า มีการใช้กฎโลปีตาลสองครั้ง นั่นคือ ถ้า $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ยังมีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ แล้วเราสามารถใช้กฎโลปีตาลซ้ำได้ นั่นคือ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{L}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\overset{L}{=}\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

<u>**ตัวอย่างที่ 4.5.4**</u> จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}=0=\lim\limits_{x\to 0}x^2$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ โดยกฎของโลปีตาล จะได้

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}\overset{L}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}}{2x} \quad \text{( มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ } \frac{0}{0}\text{ )}$$

$$\overset{L}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)}{\frac{d}{dx}(2x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}}{2}$$

$$=\frac{-\frac{1}{4}(1+0)^{-\frac{3}{2}}}{2}$$

$$=-\frac{1}{8}$$

□

**ตัวอย่างที่ 4.5.5** จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}{\frac{1}{x}}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=0=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ นั่นคือ $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}{\frac{1}{x}}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ โดยกฎของโลปีตาล จะได้

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x}{\frac{1}{x}} \stackrel{L}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = 1 \qquad \square$$

**รูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$ และ $\infty-\infty$**

<u>บทนิยามที่ 4.5.3</u>

(1) ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)=0$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ แล้วเราจะกล่าวว่า $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$ และสำหรับการหา $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ เราจะเขียน $f(x)g(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ หรือ $f(x)g(x)=\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ เพื่อจัดให้มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ แล้วใช้กฎโลปิตาลช่วยในการหาลิมิต

(2) ถ้า $\lim_{x\to a} f(x)=\infty=\lim_{x\to a} g(x)$ หรือ $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty=\lim_{x\to a} g(x)$ แล้ว $\lim_{x\to a} f(x)-g(x)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\infty-\infty$ และสำหรับการหา $\lim_{x\to a} f(x)-g(x)$ เราจะจัด $f(x)-g(x)$ ให้มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ แล้วใช้กฎโลปิตาลช่วยในการหาลิมิต

**ตัวอย่างที่ 4.5.6** จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ และ $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ ดังนั้น $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$

จัดรูปแบบ $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ ให้อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ แล้วใช้กฎโลปีตาลจะได้

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \text{( มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ } \tfrac{\infty}{\infty} \text{ )}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \qquad \square$$

**ตัวอย่างที่ 4.5.7** จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$ และ $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $0\cdot\infty$

จัดให้อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ แล้วใช้กฎโลปีตาล จะได้

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^3}} \qquad \text{( มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ } \tfrac{0}{0} \text{ )}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

เนื่องจาก เมื่อ $x \to \infty, \frac{1}{x} \to 0$ ดังนั้น $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \to \cos 0 = 1$ ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{3} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \infty$ □

<u>ตัวอย่างที่ 4.5.8</u> จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}\right)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1}$ ดังนั้น $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}\right)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\infty - \infty$ ดังนั้น จัดรูปแบบใหม่ ให้อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ แล้วใช้กฎโลปีตาล จะได้

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x+1) - x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} \qquad (\text{มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ } \tfrac{\infty}{\infty}) \\
&\overset{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(2x^2\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} 2 = 2
\end{aligned}
$$
□

**<u>ตัวอย่างที่ 4.5.9</u>** จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=\infty=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\ln x}$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\infty-\infty$ ฉะนั้น จัดรูปแบบให้อยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ แล้วใช้กฎโลปีตาล จะได้

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x} \qquad \left(\text{มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ } \frac{0}{0}\right)\\
&\overset{L}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x-x+1)}{\frac{d}{dx}((x-1)\ln x)}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}+\ln x}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x-1+x\ln x} \qquad \left(\text{มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ } \frac{0}{0}\right)\\
&\overset{L}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{d}{dx}(1-x)}{\frac{d}{dx}(x-1+x\ln x)}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{1+\frac{x}{x}+\ln x}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{2+\ln x}\\
&= \frac{-1}{2+\ln 1}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

□

**รูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $0^0$, $1^\infty$ และ $\infty^0$**

> **บทนิยามที่ 4.5.4**
>
> (1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $0^0$ ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$
>
> (2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $1^\infty$ ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$
>
> (3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\infty^0$ ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

ในการหาค่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ ที่มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $0^0$, $1^\infty$ และ $\infty^0$ มีขั้นตอนดังนี้

(1) กำหนดให้ $y = f(x)^{g(x)}$

(2) ใส่ลอการิทึมธรรมชาติเข้าไปทั้งสองข้างของข้อ(1) จะได้

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x)\ln f(x)$$

(3) หาค่า $\lim\limits_{x\to a} \ln y$ ถ้าลิมิตมีค่า

(4) ถ้า $\lim\limits_{x\to a} \ln y = L$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} y = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to a} \ln y} = e^L$

(เพราะว่าฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง)

<u>ตัวอย่างที่ 4.5.10</u> จงหาค่า $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} 2x = \infty$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $1^\infty$ ฉะนั้น เราสามารถหาค่าลิมิตได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

(1) ให้ $y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$

(2) ใส่ลอการิทึมธรรมชาติทั้งสองข้าง จะได้ $\ln y = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x} = 2x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

(3) พิจารณา $\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = \lim\limits_{x\to\infty} 2x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{2x}} \qquad \text{( มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ } \frac{0}{0} \text{ )}$$

$$\stackrel{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\right)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 2$$

(4) ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} y = e^2$ □

**<u>ตัวอย่างที่ 4.5.11</u>** จงหาค่า $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\tan x}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} \tan x$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\tan x}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $0^0$ ฉะนั้น สามารถหาค่าลิมิตได้ดังต่อไปนี้

(1) ให้ $y = x^{\tan x}$

(2) ใส่ลอการิทึมธรรมชาติทั้งสองข้าง จะได้ $\ln y = \ln x^{\tan x} = \tan x \cdot \ln x$

(3) พิจารณา $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} \tan x \cdot \ln x$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} \qquad \text{( มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ } \frac{\infty}{\infty} \text{ )}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(\cot x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} \qquad \text{( มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ } \frac{0}{0} \text{ )}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(-\sin^2 x)}{\frac{d}{dx}(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin x\cos x}{1}$$

$$= -2\sin 0\cdot\cos 0 = 0$$

(4) ดังนั้น $\lim_{x\to 0^+} x^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$ □

**<u>ตัวอย่างที่ 4.5.1</u>** จงหาค่า $\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)=\infty$ และ $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ ดังนั้น $\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\infty^0$ ฉะนั้นสามารถหาค่าลิมิตได้ดังต่อไปนี้

(1) ให้ $y=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$

(2) ใส่ลอการิทึมธรรมชาติทั้งสองข้าง จะได้ $\ln y = \ln\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)$

(3) พิจารณา $\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} \qquad \text{( มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ } \frac{\infty}{\infty} \text{ )}$$

$$\overset{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)}{\frac{d}{dx}(x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

(4) ดังนั้น $\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1$ □

## แบบฝึกหัดที่ 4.5

จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}-x}{x^2}$

2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+\tan 2x}{x-\tan 2x}$

3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$

4) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

5) $\lim_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}$

6) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$

7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{x-\sin x}$

8) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{e^{x}-\cos x}$

10) $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

11) $\lim_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\tan^{-1}x}$

12) $\lim_{x\to \infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

13) $\lim_{x\to \infty}e^{-x}\ln x$

14) $\lim_{x\to \infty}x\left(e^{1/x}-1\right)$

15) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x\ln(\sin x)$

16) $\lim_{x\to \infty}(x-1)e^{-x^2}$

17) $\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\ln x}$

18) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{x}-1}\right)$

19) $\lim_{x\to \infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

20) $\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}$

21) $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\sec x}$

22) $\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\ln x}$

23) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$

24) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$

# บทที่ 5

# การหาปริพันธ์

# (Integration)

## 5.1 ปฏิยานุพันธ์ และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

**<u>บทนิยามที่ 5.1.1</u>** ฟังก์ชัน $F$ จะเรียกว่า **ปฏิยานุพันธ์** (antiderivative) ของฟังก์ชัน $f$ ถ้า $F'(x)=f(x)$ สำหรับทุกๆ $x$ ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน $f$

**ตัวอย่างเช่น**

(1) $F(x)=\dfrac{x^6}{6}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=x^5$ บนช่วง $(-\infty,\infty)$ เพราะ

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^6}{6}\right]=x^5=f(x)$$

(2) $F(x)=\dfrac{\sin(2x)}{2}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=\cos(2x)$ บนช่วง $(-\infty,\infty)$

เพราะ $F'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\sin(2x)}{2}\right]=\cos(2x)=f(x)$

(3) $F(x)=\dfrac{\sin(2x)}{2}+1$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=\cos(2x)$ บนช่วง $(-\infty,\infty)$

เพราะ $F'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\sin(2x)}{2}+1\right]=\cos(2x)=f(x)$

(4) $F(x)=\dfrac{\sin(2x)}{2}+c$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)=\cos(2x)$ บนช่วง $(-\infty,\infty)$

เพราะ $F'(x)=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\sin(2x)}{2}+c\right]=\cos(2x)=f(x)$ (เมื่อ $c$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ )

จากข้อ (2), (3) และข้อ (4) จะเห็นได้ว่า ถ้า $F$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f$ บนช่วง $I$ แล้ว ฟังก์ชัน $F(x)+C$ เมื่อ $C$ เป็นค่าคงตัว จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f$ บนช่วง $I$ ด้วย

เพราะว่า $\dfrac{d}{dx}\big(F(x)+C\big)=F'(x)=f(x)$ ทุก $x\in I$

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.1.2</u> ถ้าฟังก์ชัน $F$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f$ บนช่วง $I$ แล้ว ฟังก์ชัน $G$ จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f$ บนช่วง $I$ ก็ต่อเมื่อ $G(x)=F(x)+C$ สำหรับทุก ๆ $x\in I$ และ $c$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เราเรียก $F(x)+C$ ว่า **ปฏิยานุพันธ์ทั่วไป** (general antiderivative) ของ $f$ บนช่วง $I$

<u>พิสูจน์</u> $(\Rightarrow)$ ให้ฟังก์ชัน $F$ และ $G$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f$ บนช่วง $I$ ให้ $H$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $H(x)=G(x)-F(x)$ ดังนั้น $H$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(a,b)$ เมื่อ $a,b\in I$ และ $a<b$ ฉะนั้นโดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (Mean Value Theorem) จะได้

$$H'(k)=\frac{H(b)-H(a)}{b-a} \quad \text{สำหรับบางค่าคงตัว } k\in(a,b)$$

เนื่องจาก $H'(c)=G'(c)-F'(c)=f(c)-f(c)=0$ ดังนั้น $H(b)=H(a)$ สำหรับทุก $a,b\in I$ แสดงว่า $H$ เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว นั่นคือ $H(x)=C$ เพราะฉะนั้น $G(x)=F(x)+C$ สำหรับบางค่าคงตัว $C$

$(\Leftarrow)$ ให้ $G$ เป็นฟังก์ชัน ที่นิยามโดย $G(x)=F(x)+C$ โดยที่ $F$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f$ และ $C$ เป็นค่าคงตัว แล้ว $G'(x)=\dfrac{d}{dx}\big(F(x)+C\big)=F'(x)=f(x)$ สำหรับทุก $x\in I$ ดังนั้น $G$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f$ □

**<u>ตัวอย่างที่ 5.1.1</u>** จงหาปฏิยานุพันธ์ทั่วไป ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x) = x^2$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\right] = x^2 = f(x)$ ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชัน $f$ คือ $\frac{x^3}{3} + C$ เมื่อ $C$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

□

(2) $f(x) = x^n$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = x^n$ ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชัน $f$ คือ $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $C$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ

□

(3) $f(x) = \sin(3x)$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\frac{d}{dx}\left[\frac{-\cos(3x)}{3}\right] = \sin(3x) = f(x)$ ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชัน $f$ คือ $\frac{-\cos(3x)}{3} + C$ เมื่อ $C$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ

□

(4) $f(x) = 2^x$ เมื่อ $k$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\frac{d}{dx}\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right] = 2^x = f(x)$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของฟังก์ชัน $f$ คือ $\frac{2^x}{\ln 2} + C$ เมื่อ $C$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ

□

**<u>บทนิยามที่ 5.1.3</u>** จะเรียก ปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ $f$ ว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** (indefinite integral) ของ $f$ ซึ่งจะเขียนแทน ด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$

เพราะฉะนั้น ถ้า $F$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ $f$ แล้ว $\int f(x)dx = F(x)+C$

อ่านว่า " ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $f$ เทียบกับ $x$ คือ $F(x)+C$ "

เราจะเรียกสัญลักษณ์ $\int$ ว่า **เครื่องหมายปริพันธ์ (integral sign)**

เรียก $f(x)$ ว่า **ปริพันธ์ (integrand)**

เรียก $x$ ว่า **ตัวแปรของการหาปริพันธ์ (variable of integration)**

เรียก $C$ ว่า **ค่าคงตัวของการหาปริพันธ์ (constant of integration)**

จากตัวอย่างที่ 5.1.1 จะได้ว่า

(1) $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + C$

(2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(3) $\int \sin(3x)dx = \dfrac{-\cos(3x)}{3} + C$

(4) $\int 2^x dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$ เมื่อ $C$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

**หลักเกณฑ์พื้นฐานของการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต**

ให้ $F$ เป็นปฏิยานุพันธ์ใด ๆ ของฟังก์ชัน $f$ ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)+C\big)=f(x) \qquad \text{หรือ} \qquad \int f(x)dx=F(x)+C$$

ฉะนั้น

$$\boxed{\frac{d}{dx}\Big(\int f(x)dx\Big)=f(x)} \qquad .....(5.1.1)$$

และ

$$\boxed{\int \frac{d}{dx}f(x)dx=f(x)+C} \qquad .....(5.1.2)$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.1.2</u>

(1) $\frac{d}{dx}\Big(\int x^4dx\Big)=x^4$

(2) $\int \frac{d}{dx}\big(\sec^2 x\big)dx=\sec^2 x+C$ เมื่อ $C$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

<u>สูตรพื้นฐานของการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต</u>

| สูตรการหาปริพันธ์ | สูตรการหาอนุพันธ์ | |
|---|---|---|
| (1) $\int 0\,dx=C$ | $\frac{dC}{dx}=0$ | |
| (2) $\int 1dx=x+C$ | $\frac{d}{dx}x=1$ | |
| (3) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ | $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$ | $(n\neq -1)$ |
| (4) $\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$ | $\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert=\frac{1}{x},$ | $x\neq 0$ |

(5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\quad \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(7) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ $\quad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

(8) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ $\quad \frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

(9) $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + C$ $\quad \frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x$

(10) $\int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + C$ $\quad \frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x$

(11) $\int e^x dx = e^x + C$ $\quad \frac{d}{dx}e^x = e^x$

(12) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$

(13) $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$ $\quad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$

(14) $\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$ $\quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

(15) $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$ $\quad \frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

(16) $\int \operatorname{sech} x \tanh x\, dx = -\operatorname{sech} x + C$ $\quad \frac{d}{dx}(-\operatorname{sech} x) = \operatorname{sech} x \tanh x$

(17) $\int \operatorname{csch} x \coth x\, dx = -\operatorname{csch} x + C$ $\quad \frac{d}{dx}(-\operatorname{csch} x) = \operatorname{csch} x \coth x$

(18) $\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + C$ $\quad \frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

<u>ตัวอย่างที่ 5.1.3</u>

(1) $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$ เมื่อ $C$ คือค่าคงตัวใด ๆ

(2) $\int \left(\frac{1}{x}\right)^5 dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$ เมื่อ $C$ คือค่าคงตัวใด ๆ

(3) $\int \tan x \cos x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x dx = \int \sin x dx = -\cos x + C$ เมื่อ $C$ คือค่าคงตัวใด ๆ

(4) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$ เมื่อ $C$ คือค่าคงตัวใด ๆ □

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.1.4</u>

(1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ เมื่อ $k$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

(2) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(3) $\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

(4) $\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))dx = c_1\int f_1(x)dx + c_2\int f_2(x)dx + \ldots + c_n\int f_n(x)dx$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

<u>พิสูจน์</u> (1) ให้ $F$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f$ ดังนั้น $\frac{d}{dx}\left(kF(x)\right)=kF'(x)=kf(x)$
โดยบทนิยามที่ 5.1.3 จะได้ $\int kf(x)dx=kF(x)+C$ เมื่อ $C$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ
และจาก $k\int f(x)dx=k\left(F(x)+C_1\right)=kF(x)+kC_1$ เมื่อ $C_1$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ
เลือก $C=kC_1$ ดังนั้นจะได้ $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ □

(2) ให้ $F$ และ $G$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f$ และ $g$ ตามลำดับ ดังนั้น $\frac{d}{dx}\left(F(x)+G(x)\right)=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$ โดยบทนิยามที่ 5.1.3 จะได้
$\int f(x)dx+\int g(x)dx=F(x)+c_1+G(x)+c_2=F(x)+G(x)+c_1+c_2$
เมื่อ $c_1$ และ $c_2$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ ถ้าเลือก $C=c_1+c_1$ แล้วจะได้
$\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ □

(3) โดยข้อ (1) และ (2) จะได้

$$\begin{aligned}\int\left(f(x)-g(x)\right)dx &= \int\left(f(x)+(-1)g(x)\right)dx\\ &= \int f(x)dx+\int(-1)g(x)dx\\ &= \int f(x)dx-\int g(x)dx\end{aligned}$$ □

(4) พิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และใช้ข้อ (1) และ (2) ช่วยในการพิสูจน์ (แบบฝึกหัด) □

<u>ตัวอย่างที่ 5.1.4</u> จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int\left(\sin x+2x^3+5\right)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\int\left(\sin x+2x^3+5\right)dx &= \int\sin x\,dx+2\int x^3\,dx+5\int 1dx\\ &= \left(-\cos x+C_1\right)+2\left(\frac{x^4}{4}+C_2\right)+5\left(x+C_3\right)\\ &= -\cos x+\frac{x^4}{2}+5x+\left(C_1+2C_2+5C_3\right)\\ &= -\cos x+\frac{x^4}{2}+5x+C\end{aligned}$$

เมื่อ $C=C_1+2C_2+5C_3$ □

**หมายเหตุ** เพื่อความสะดวกและไม่ผิดกฎทางคณิตศาสตร์ เราสามารถนำค่าคงตัว ที่เกิดจากการหาปริพันธ์แต่ละฟังก์ชัน มารวมกันเป็นค่าคงตัว $C$ เพียงตัวเดียวได้

**<u>ตัวอย่างที่ 5.1.5</u>** จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int\left(\dfrac{x^2-2x^4}{x^4}\right)dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{x^2-2x^4}{x^4}\right)dx &= \int\frac{x^2}{x^4}\,dx-\int\frac{2x^4}{x^4}\,dx\\ &= \int x^{-2}\,dx-2\int 1\,dx\\ &= \frac{x^{-2+1}}{-2+1}-2x+C=-\frac{1}{x}-2x+C\end{aligned}$$ □

**<u>ตัวอย่างที่ 5.1.6</u>** จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{\sqrt{x}}dx$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned}\int\frac{4x^3-2x^2+5x}{\sqrt{x}}dx &= \int\frac{4x^3-2x^2+5x}{x^{1/2}}dx=\int\left(\frac{4x^3}{x^{1/2}}-\frac{2x^2}{x^{1/2}}+\frac{5x}{x^{1/2}}\right)dx\\ &= 4\int x^{5/2}\,dx-2\int x^{3/2}\,dx+5\int x^{1/2}\,dx\\ &= 4\left(\frac{2}{7}x^{7/2}\right)-2\left(\frac{2}{5}x^{5/2}\right)+5\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)+C\\ &= \frac{8}{7}x^{7/2}-\frac{4}{5}x^{5/2}+\frac{10}{3}x^{3/2}+C\end{aligned}$$ □

**ตัวอย่างที่ 5.1.7** จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int (\sec x + \tan x)^2 dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int (\sec x + \tan x)^2 dx &= \int \left(\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x\right) dx \\ &= \int \sec^2 x dx + 2\int \sec x \tan x dx + \int \tan^2 x dx \\ &= 2\int \sec^2 x dx + 2\int \sec x \tan x dx - \int 1 dx \\ &= 2\tan x + 2\sec x - x + C\end{aligned}$$

□

**การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า** (Integration by Substitution)

สมมติให้ $F$ เป็นปฏิยานุพันธ์ใด ๆ ของฟังก์ชัน $f$ และให้ $g$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))\, g'(x)$$

ดังนั้น จากบทนิยามที่ 5.1.3 จะได้

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \qquad .....(5.1.3)$$

จาก $F$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f$ ดังนั้นได้ว่า

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \qquad .....(5.1.4)$$

ให้ $u = g(x)$ และ $\frac{du}{dx} = g'(x)$ ดังนั้น ค่าเชิงอนุพันธ์ของ $g$ เทียบกับ $x$ คือ $du = g'(x)dx$
แทนค่า $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$ ลงใน (5.1.4) จะได้

$$\boxed{\int f(u)du = F(u) + C} \qquad .....(5.1.5)$$

ขั้นตอนของการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ที่ได้กล่าวข้างบนโดยการแทนค่า $u = g(x)$ และ $du = g'(x)dx$ เราเรียกว่า **วิธีการแทนค่าด้วยตัวแปร** $u$

พิจารณาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int (x^2+5)^{20} 2x dx$

ถ้าให้ $u = x^2 + 5$ แล้ว $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[x^2 + 5\right] = 2x$ ซึ่งจะได้ว่า $du = 2xdx$
ดังนั้น หาค่าปริพันธ์ได้

$$\int \left(x^2 + 5\right)^{20} 2xdx = \int u^{20} du = \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{\left(x^2 + 5\right)^{21}}{21} + C$$

**ทฤษฎีบทที่ 5.1.5** ให้ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และมีเรนจ์บนช่วง $I$ ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้บนช่วง $I$ แล้ว

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

**หมายเหตุ** ในการหาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต โดยวิธีแทนค่าด้วยตัวแปร $u$ ในทฤษฎีบทที่ 5.1.5 นั้น เราจะต้องเลือกตัวแปร $u$ ที่เหมาะสมด้วย ถึงจะหาค่าปริพันธ์ได้

**ตัวอย่างที่ 5.1.8** จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int 2x \sin\left(x^2 - 1\right) dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2 - 1$ ดังนั้น $du = \frac{d}{dx}\left[x^2 - 1\right] dx = 2xdx$
เพราะฉะนั้น หาค่าปริพันธ์ได้

$$\begin{aligned} \int 2x \sin\left(x^2 - 1\right) dx &= \int \sin u\, du \\ &= -\cos u + C \\ &= -\cos\left(x^2 - 1\right) + C \end{aligned}$$

□

**ตัวอย่างที่ 5.1.9** จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 5}} dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3 - 5$ ดังนั้น $du = \frac{d}{dx}\left[x^3 - 5\right] dx = \left(3x^2\right) dx$ หรือ $\frac{du}{3} = x^2 dx$
เพราะฉะนั้น หาค่าปริพันธ์ได้

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-5}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^{1/2}}\,du = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}du$$
$$= \frac{1}{3}\left(2u^{1/2}\right)+C$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3-5}+C \qquad \square$$

**ตัวอย่างที่ 5.1.10** จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $\int x^2 e^{x^3+1}dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^3+1$ ดังนั้น $du = \frac{d}{dx}\left[x^3+1\right]dx = 3x^2dx$ หรือ $\frac{du}{3} = x^2dx$

เพราะฉะนั้น หาปริพันธ์ได้

$$\int x^2 e^{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3+1}+C \qquad \square$$

**ตัวอย่างที่ 5.1.1** จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $\int \sin^2(3x)\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin^2(3x) = \frac{1-\cos(6x)}{2}$ ดังนั้น

$$\int \sin^2(3x)\,dx = \int \frac{1-\cos(6x)}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{\cos(6x)}{2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(6x)dx$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\int \cos u\,du$$

$u = 6x,\quad du = 6dx$ หรือ $dx = \frac{du}{6}$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin u + C$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin(6x) + C \qquad \square$$

**ตัวอย่างที่ 5.1.12** จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $\int \frac{1-\sin x}{(x+\cos x)^2}dx$

วิธีทำ ให้ $u = x+\cos x$ ดังนั้น $du = \frac{d}{dx}[x+\cos x]dx = (1-\sin x)dx$

เพราะฉะนั้น หาปริพันธ์ได้

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\sin x}{(x+\cos x)^2}dx &= \int \frac{1}{u^2}du \\ &= \int u^{-2}du \\ &= -\frac{1}{u}+C \\ &= -\frac{1}{x+\cos x}+C\end{aligned}$$

□

**ตัวอย่างที่ 5.1.13** จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $\int \sin^3(5x+1)\cos(5x+1)dx$

วิธีทำ ให้ $u = 5x+1$ ดังนั้น $du = \frac{d}{dx}[5x+1]dx = 5dx$ หรือ $\frac{du}{5} = dx$

เพราะฉะนั้น

$$\int \sin^3(5x+1)\cos(5x+1)dx = \frac{1}{5}\int \sin^3 u\,\cos u\,du$$

ให้ $v = \sin u$ ดังนั้น $dv = \frac{d}{du}\sin u\,du = \cos u\,du$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int \sin^3(5x+1)\cos(5x+1)dx &= \frac{1}{5}\int \sin^3 u\,\cos u\,du \\ &= \frac{1}{5}\int v^3 dv \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{v^4}{4}\right)+C \\ &= \frac{\sin^4 u}{20}+C \\ &= \frac{\sin^4(5x+1)}{20}+C\end{aligned}$$

□

<u>**ตัวอย่างที่ 5.1.14**</u> จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-3}}dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = x-3$ ดังนั้น $du = \frac{d}{dx}[x-3]dx = dx$

จาก $x = u+3$ ดังนั้น $x^2 = (u+3)^2 = u^2+6u+9$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x-3}}dx &= \int \frac{u^2+6u+9}{\sqrt{u}}\,du \\ &= \int \left(u^{3/2}+6u^{1/2}+9u^{-1/2}\right)du \\ &= \frac{2}{5}u^{5/2}+4u^{3/2}+18u^{1/2}+C \\ &= \frac{2}{5}(x-3)^{5/2}+4(x-3)^{3/2}+18(x-3)^{1/2}+C \qquad \square\end{aligned}$$

<u>**ตัวอย่างที่ 5.1.15**</u> จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = \ln x$ ดังนั้น $du = \frac{1}{x}dx$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx &= \int u^2 du \\ &= \frac{u^3}{3}+C \\ &= \frac{(\ln x)^3}{3}+C \qquad \square\end{aligned}$$

**ตัวอย่างที่ 5.1.16** จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ $\int \frac{\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$

วิธีทำ ให้ $u=\sqrt{x}$ ดังนั้น $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx$ นั่นคือ $2du=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

เพราะฉะนั้น

$$\int \frac{\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=\int 2\operatorname{sech}^2 u\,du$$

$$=2\tanh u+C=2\tanh\left(\sqrt{x}\right)+C \qquad \square$$

## แบบฝึกหัดที่ 5.1

1) จงหาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

(1.1) $y = \int \frac{x^4 - x^3 + x^2}{x^3} dx$

(1.2) $y = \int \left( \frac{5}{x^{\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} \right) dx$

(1.3) $y = \int \frac{\ln 3x}{x} dx$

(1.4) $y = \int \left( e^{-2x} + e^{5x-1} \right) dx$

(1.5) $y = \int x \cos(x^2 + 1) dx$

(1.6) $y = \int 3^{\cos x} \sin x dx$

(1.7) $y = \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

(1.8) $y = \int (2x-1)(3-x^2) dx$

(1.9) $y = \int \sec x(\tan x - 2\cos x) dx$

(1.10) $y = \int x^2 \sqrt{2-x} dx$

(1.11) $y = \int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)^4} dx$

(1.12) $y = \int t \cos(t^2) dt$

(1.13) $y = \int \sqrt{\sin \pi x} \cos \pi x \, dx$

(1.14) $y = \int \sqrt{1 + \sqrt{1+x}} dx$

## 5.2 ผลบวกและสัญลักษณ์ซิกมา

พิจารณาผลบวก $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$ จะเห็นว่า แต่ละเทอมของผลบวกเขียนอยู่ในรูป $k^3$ เมื่อ $k=1,2,3,4,5,6$ เราสามารถเขียนแทนจำนวน $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$ โดยใช้สัญลักษณ์ซิกมา ได้ดังนี้ $\sum_{k=1}^{6} k^3$

ซึ่งจะเรียกว่า " ผลรวมของ $k^3$ เมื่อ $k$ มีค่าตั้งแต่ $1$ จนถึง $6$"

$$\sum_{k=1}^{6} k^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$$

สำหรับกรณีทั่ว ๆ ไป ถ้ากำหนดให้ $f(k)$ เป็นฟังก์ชันของ $k$ และให้ $m,n$ เป็นจำนวนเต็มที่ $m \le n$ แล้ว

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m)+f(m+1)+\ldots+f(n)}$$

เราเรียกสัญลักษณ์ $\sum$ ว่า ซิกมา (sigma) ซึ่งแทนผลรวม

$k$ คือ ดัชนีของผลรวม (index of summation)

$m$ คือ ขีดจำกัดล่างของผลรวม (lower limits of summation)

$n$ คือ ขีดจำกัดบนของผลรวม (upper limits of summation)

ถ้า $f(k)=c$ สำหรับทุก $k=1,2,3,\ldots,n$ และ $c$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้ว

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$$
$$= \underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{n \text{ terms}} = nc$$

ดังนั้น

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c = nc}$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.2.1</u>

1. $\sum_{k=1}^{3} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$

2. $\sum_{k=5}^{7} (2k+1) = (2(5)+1) + (2(6)+1) + (2(7)+1)$

$= 11 + 13 + 15 = 39$

3. $\sum_{k=1}^{5} k\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + 3\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 4\cdot\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) + 5\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

$= 0 - 2 + 0 + 4 + 0 = 2$

4. $\sum_{k=1}^{3} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{3}{3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{23}{12}$

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.2.1</u>

1.) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (เมื่อ $c$ ไม่ได้ขึ้นอยู่กับดัชนี $k$ )

2.) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

3.) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

4.) $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

5.) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6.) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

7.) $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n\ term} = nc$

**ตัวอย่างที่ 5.2.2** จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^{25} k(k+2)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{25} k(k+2) = \sum_{k=1}^{25}\left(k^2+2k\right) &= \sum_{k=1}^{25} k^2 + 2\sum_{k=1}^{25} k \\ &= \frac{25(26)(51)}{6} + 2\left[\frac{25(26)}{2}\right] \\ &= 6175\end{aligned}$$

□

**ตัวอย่างที่ 5.2.3** จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^{30}(k+1)^3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30}(k+1)^3 &= \sum_{k=1}^{30}\left(k^3+3k^2+3k+1\right) \\ &= \sum_{k=1}^{30} k^3 + 3\sum_{k=1}^{30} k^2 + 3\sum_{k=1}^{30} k + \sum_{k=1}^{30} 1 \\ &= \left(\frac{30(31)}{2}\right)^2 + \left(\frac{3(30)(31)(61)}{6}\right) + \left(\frac{3(30)(31)}{2}\right) + 30 \\ &= 246015\end{aligned}$$

□

**ตัวอย่างที่ 5.2.4** จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{20} 2i(i-5)$

วิธีทำ

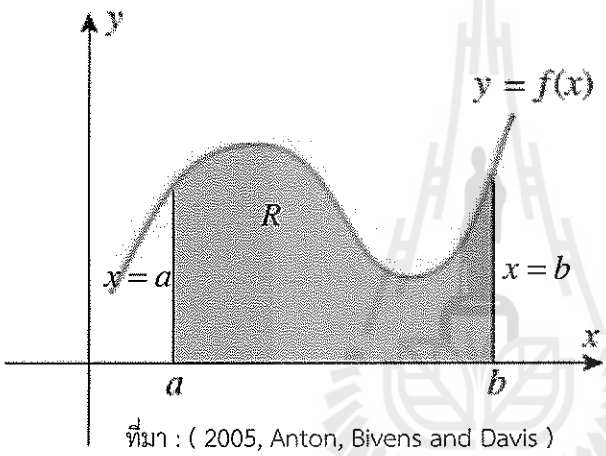
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{20} 2i(i-5) = \sum_{i=1}^{20}\left(2i^2-10i\right) &= 2\sum_{i=1}^{20} i^2 - 10\sum_{i=1}^{20} i \\ &= 2\left(\frac{20(20+1)(40+1)}{6}\right) - 10\left(\frac{20(20+1)}{2}\right) \\ &= \frac{20(21)(41)}{3} - 100(21) \\ &= 5740 - 2100 = 3640\end{aligned}$$

□

## 5.3 พื้นที่ (Area)

ในบทที่ 1 ได้กล่าวถึงปัญหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ บนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $f(x) \geq 0$ ว่าจะสามารถหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งได้อย่างไร และเกี่ยวข้องกับลิมิตอย่างไร สำหรับในหัวข้อนี้เราจะพูดถึงรายละเอียดของการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งนี้

พิจารณาบริเวณ $R$ ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน $x$ เส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ดังรูปที่ 5.3.1

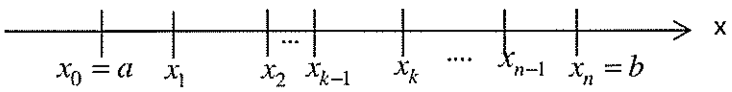



รูปที่ 5.3.1

ที่มา : ( 2005, Anton, Bivens and Davis )

ให้ $A(R)$ คือพื้นที่ของบริเวณ $R$ เราสามารถหาค่า $A(R)$ ได้ดังนี้

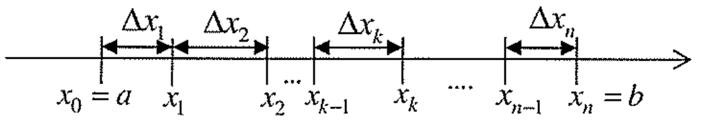
1.) แบ่ง $[a,b]$ เป็นช่วงย่อย ๆ $n$ ช่วงด้วยจุดแบ่ง $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ (ดูรูปที่ 5.3.2)




รูปที่ 5.3.2

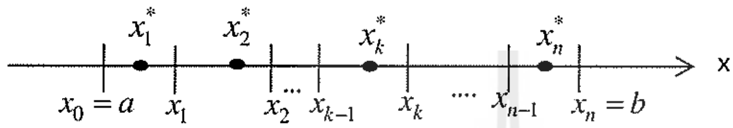
โดยเราเรียก $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ ว่าผลแบ่งกั้น (partition) ของ $[a,b]$
ดังนั้น ช่วงย่อยทั้ง $n$ ช่วงที่แบ่ง $[a,b]$ คือ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ เราจะเรียกช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ ว่าช่วงย่อยที่ $k$ สำหรับ $k = 1, 2, .., n$

2.) ให้ $\Delta x_k$ แทนความยาวของช่วงย่อยที่ $k$ นั่นคือ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ สำหรับ $k = 1, 2, \ldots, n$




รูปที่ 5.3.3

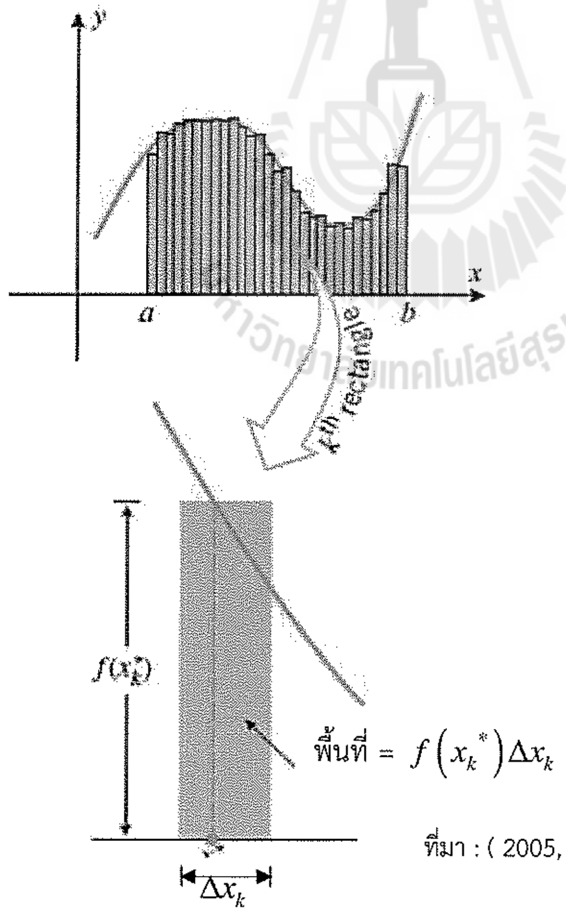
3.) ให้ $x_k^*$ เป็นจุดใด ๆ ในช่วงย่อยที่ $k$ นั่นคือ $x_{k-1} \le x_k^* \le x_k$ เมื่อ $k = 1, 2, ..., n$




รูปที่ 5.3.4

4.) คำนวณค่า $f\left(x_k^*\right)\Delta x_k$ = พื้นที่ของสี่เหลี่ยมมุมฉากบนช่วง $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ (ดูรูปที่ 5.3.5(b))

(a)




รูปที่ 5.3.5 (b)

ที่มา : ( 2005, Anton, Bivens and Davis )