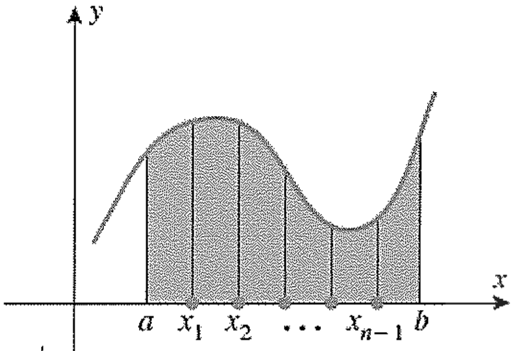
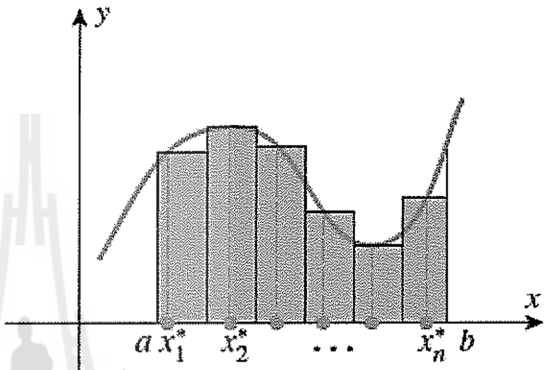
5.) ให้ $A(R_n)$ แทนผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้น

$$A\left(R_n\right)=f\left(x_1^*\right)\Delta x_1+f\left(x_2^*\right)\Delta x_2+\cdots+f\left(x_n^*\right)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)\Delta x_k$$

ดังนั้น ให้ $A\left(R_n\right)$ เป็นพื้นที่โดยประมาณของบริเวณ R (ดูรูปที่ 5.3.6 (b))



รูปที่ 5.3.6 (a)



รูปที่ 5.3.6 (b)

6.) ให้ $\|P\|$ เป็นค่าสูงสุดของ Δx_k สำหรับ $k=1,2,\ldots,n$ เราเรียก $\|P\|$ ว่า นอร์ม (norm) ของผลแบ่งกั้น P

ถ้า $\lim\limits_{\|P\|\to 0} A\left(R_n\right)$ หาค่าได้ และไม่ขึ้นอยู่กับวิธีการแบ่งช่วงย่อยของ $[a,b]$ และการเลือก x_k^* แล้วพื้นที่ของบริเวณ R คือ

$$A(R)=\lim_{n\to+\infty} A\left(R_n\right)=\lim_{\|P\|\to 0} A\left(R_n\right)=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)\Delta x_k \qquad .....(5.3.1)$$

(ดูรูปที่ 5.3.5(a))

<u>บทนิยามที่ 5.3.1</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และถ้า $f(x)\geq 0$ สำหรับทุกๆ $x\in[a,b]$ แล้วพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$, แกน x และเส้นตรง $x=a$ และ $x=b$ คือ

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x$$

หมายเหตุ (1) ถ้าเราให้ M_k คือค่าของ $f(x)$ ที่มากที่สุดในช่วงย่อยที่ k และให้ m_k แทนค่าของ $f(x)$ ที่น้อยที่สุดในช่วงย่อยที่ k แล้วเราจะเรียก

$$A(U_n) = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n$$

ว่า **ผลบวกบน (upper sum)**

และเรียก $A(L_n) = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n$ ว่า **ผลบวกล่าง (lower sum)**

(2) $A(L_n) \le A(R_n) \le A(U_n)$

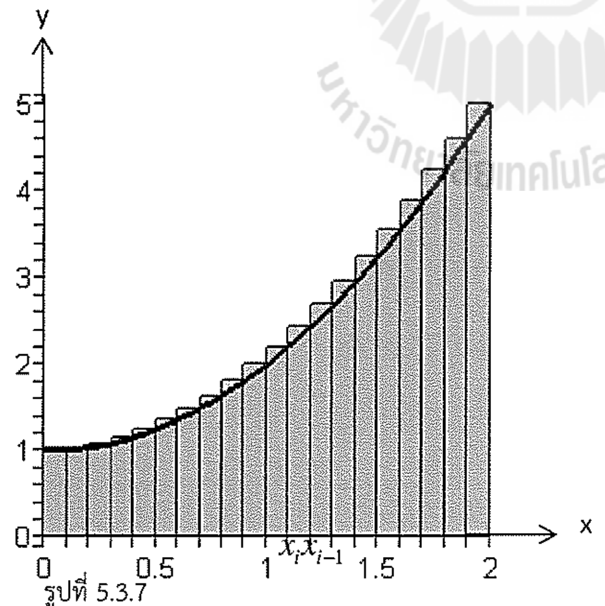
<u>ตัวอย่างที่ 5.3.1</u> จงหาพื้นที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ กับแกน X บนช่วง $[0,2]$

<u>วิธีทำ</u> (1) แบ่งช่วง $[0,2]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน ยาวช่วงละ

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

ดังนั้น $x_0 = 0,\ x_1 = 0 + \frac{2}{n} = \frac{2}{n},\ x_2 = 0 + 2\left(\frac{2}{n}\right) = 2\left(\frac{2}{n}\right) \ldots,\ x_i = 0 + i\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2i}{n}$

$(i = 0,1,\ldots,n)$



รูปที่ 5.3.7

(2) เลือก $x_i^* = x_i$ = จุดปลายขวาของช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ ดังนั้น

$$f(x_i^*) = f(x_i) = x_i^2 + 1 = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 1$$

(3) เนื่องจากความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ i เท่ากับ $\frac{2}{n}$ ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลียมผืนผ้ารูปที่ i เท่ากับ $f(x_i^*)\Delta x_i = \left(\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 1\right)\left(\frac{2}{n}\right)$ และผลรวมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า n รูปเท่ากับ

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 1\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{4i^2}{n^2}\right) + 1\right) = \left(\frac{2}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}1\right)$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2$$

โดยทฤษฎีบทที่ 5.2.1(5) จะได้ว่า

$$A_n = \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 2$$

$$= \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right) + 2$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} + 2 = \frac{14}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้งคือ

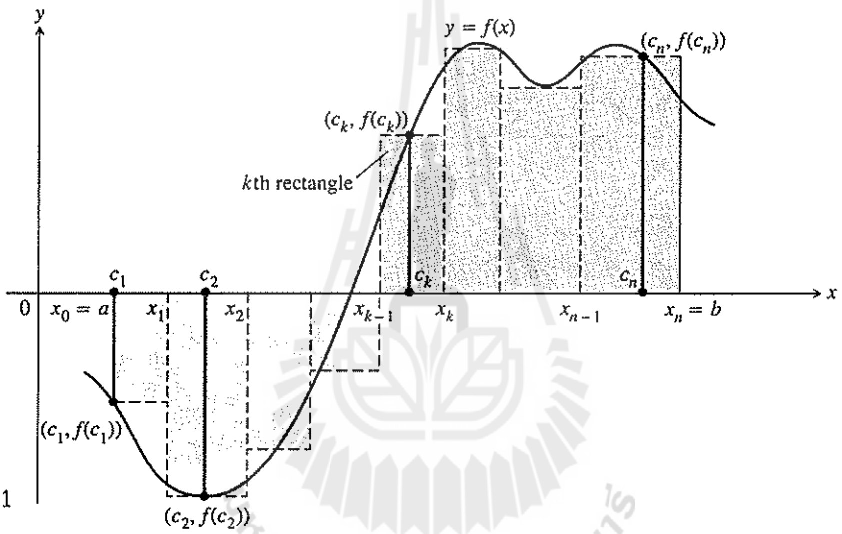
$$A = \lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{14}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{14}{3}$$

ดังนั้น พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ กับแกน X บนช่วง $[0, 2]$ เท่ากับ $\frac{14}{3}$ ตารางหน่วย □

5.4 ปริพันธ์จำกัดเขต (The Definite Integral)

<u>ผลบวกรีมันน์</u> (Riemann Sums)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ และให้ P เป็นผลแบ่งกั้นของช่วง $[a,b]$ ด้วยจุดแบ่ง $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ ให้ Δx_k แทนความกว้างในช่วงย่อยที่ k และให้ c_k เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ในช่วงย่อยที่ k เมื่อ $k = 1, 2, ..., n$ ดังนั้น $f(c_k)$ มีค่าเป็นบวก หรือมีค่าเป็นลบ หรือมีค่าเท่ากับศูนย์ (ดูรูปที่ 5.4.1)



รูปที่ 5.4.1

ที่มา: (1998, Thomas, Finney and Weir)

พิจารณาในแต่ละช่วงย่อยที่ k เมื่อ $k = 1, 2, ..., n$ จะเห็นได้ว่า ค่าของผลคูณ $f(c_k)\Delta x_k$ มีค่าเป็นบวก หรือเป็นลบ หรือเป็นศูนย์จะขึ้นอยู่กับเครื่องหมายของ $f(c_k)$

ถ้า $f(c_k) > 0$ แล้ว ค่าของผลคูณ $f(c_k)\Delta x_k$ ก็คือ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูงเท่ากับ $f(c_k)$ และมีความกว้างเท่ากับ Δx_k นั่นเอง (ดูรูปที่ 5.4.1)

ถ้า $f(c_k) < 0$ แล้ว ค่าของผลคูณ $f(c_k)\Delta x_k$ ก็คือ จำนวนลบของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูงเท่ากับ $-f(c_k)$ และมีความกว้างเท่ากับ Δx_k (ดูรูปที่ 5.4.1)

ดังนั้น ผลรวมของผลคูณทั้งหมดคือ $$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \qquad .....(5.4.1)$$

ซึ่งเราเรียกผลบวก S_P ว่า **ผลบวกรีมันน์ของฟังก์ชัน f บนช่วงปิด** $[a,b]$

บทนิยามที่ 5.4.1

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ และให้ P เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ กำหนดด้วย $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

ให้ Δx_k เป็นความกว้างของช่วงย่อยที่ k และ c_k เป็นจุดใดๆบนช่วงย่อยที่ k เมื่อ $k = 1,2,\ldots,n$ แล้ว ผลบวก

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k, \qquad x_{k-1} \le c_k \le x_k \qquad .....(5.4.2)$$

เรียกว่า **ผลบวกรีมันน์ (Riemann Sum)** ของ f สำหรับผลแบ่งกั้น P

ปริพันธ์จำกัดเขต

บทนิยามที่ 5.4.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ และให้ P เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ ด้วยจุดแบ่ง $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ให้ c_k เป็นจุดใดๆ ในช่วงย่อยที่ k และ Δx_k เป็นความกว้างในช่วงย่อยที่ k สำหรับ $k = 1,2,\ldots,n$ แล้ว **ปริพันธ์จำกัดเขต** ของ f จาก a ถึง b มีนิยามดังนี้

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_P = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \qquad .....(5.4.3)$$

เมื่อลิมิตนี้สามารถหาค่าได้ และไม่ขึ้นอยู่กับวิธีการแบ่ง $[a,b]$ และการเลือก c_k

กล่าวได้ว่า f เป็น**ฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้**บน $[a,b]$ เมื่อลิมิตในสมการ (5.4.3) หาค่าได้

จากบทนิยามที่ 5.4.2

สัญลักษณ์ $\int$ เรียกว่า เครื่องหมายปริพันธ์

จำนวน a เรียกว่า **ลิมิตล่าง** (lower limit) ของการหาปริพันธ์

จำนวน b เรียกว่า **ลิมิตบน** (upper limit) ของการหาปริพันธ์

$f(x)$ เรียกว่า **ปริพันธ์** (integrand)

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.4.3</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว ฟังก์ชัน f หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ นั่นคือ $\int_a^b f(x)dx$ หาค่าได้

หมายเหตุ ค่าปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ เป็นค่าตัวเลขค่าหนึ่งซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x ดังนั้น สามารถแทนด้วยตัวแปรอื่น ๆ ได้ เช่น

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$$

ซึ่งจะเรียกตัวแปร x,u และ t ว่า**ตัวแปรดัมมี่**

<u>บทนิยามที่ 5.4.4</u>

(1) ถ้า a อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f แล้วนิยาม $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) ถ้า f หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

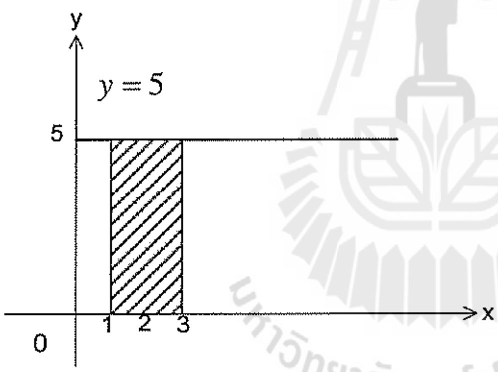
<u>ทฤษฎีบทที่ 5.4.5</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว พื้นที่บริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ แกน x และเส้นตรง $x=a$ และ $x=b$ กำหนดโดย

$$\text{พื้นที่} = \int_a^b f(x)dx$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.4.1</u> จงหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_1^3 5\,dx$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\int_1^3 5\,dx$ = พื้นที่ของสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูง 5 หน่วย และกว้าง 2 หน่วย

$= 5 \times 2 = 10$ (ดูรูปที่ 5.4.2)



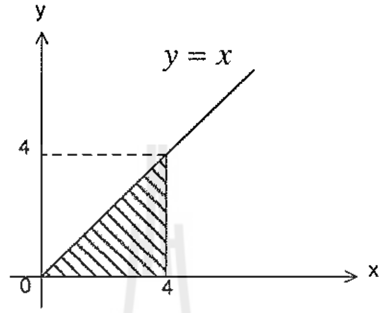
□

รูปที่ 5.4.2

ตัวอย่างที่ 5.4.2 จงหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_0^4 x\,dx$

วิธีทำ วาดกราฟของ $f(x)=x$ ได้ดังรูป (ดูรูปที่ 5.4.3)

ดังนั้น $\int_0^4 x\,dx$ = พื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$



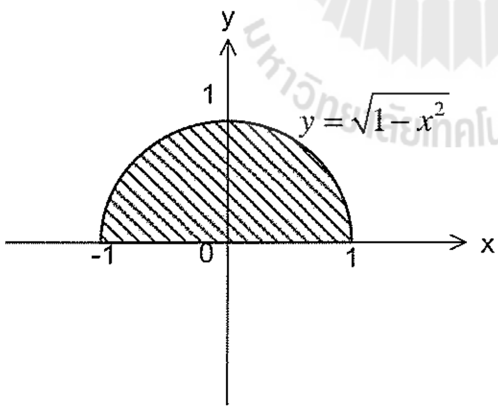
รูปที่ 5.4.3

□

ตัวอย่างที่ 5.4.3 จงหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$

วิธีทำ วาดกราฟ $y=\sqrt{1-x^2}$ ได้ดังรูป (ดูรูปที่ 5.4.4)

ดังนั้น $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ = พื้นที่ของครึ่งวงกลมที่มีรัศมียาว 1 หน่วย = $\frac{\pi(1)^2}{2}=\frac{\pi}{2}$ □



รูปที่ 5.4.4

สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต

กำหนดให้ปริพันธ์จำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ และ $\int_a^b g(x)dx$ หาค่าได้ แล้ว

1.) $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2.) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3.) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

4.) $\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

5.) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6.) ถ้า $f(x) \ge 0$ บนช่วง $[a,b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

7.) ถ้า $f(x) \ge g(x)$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

8.) ถ้า $m \le f(x) \le M$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a,b]$ แล้ว

$m(b-a) \le \int_a^b f(x) \le M(b-a)$

9.) $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$ เมื่อ $a < b$

10.) $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ เมื่อ $a < b$

ตัวอย่างที่ 5.4.4

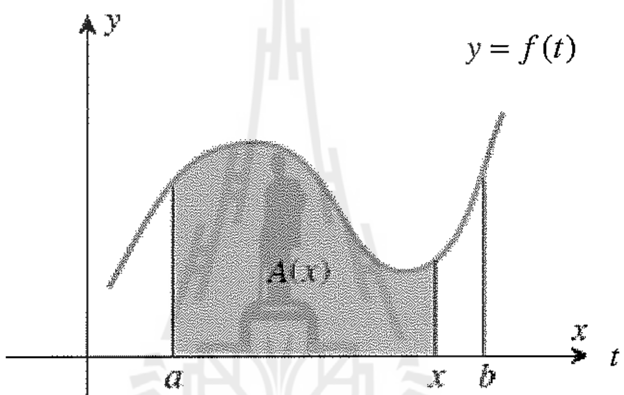
(1) $\int_2^2 x^2 dx = 0$

(2) $\int_1^0 (1-x)dx = -\int_0^1 (1-x)dx = -\left(\int_0^1 1\,dx - \int_0^1 x\,dx\right) = -\left((1(1-0)) - \left(\frac{1^2-0^2}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$

5.5 ทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of Calculus)

ในการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตโดยการใช้บทนิยามที่ 5.4.2 หรือนำสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขตมาใช้ในการหาค่าปริพันธ์ของบางฟังก์ชันอาจจะมีความยุ่งยาก ดังนั้นในหัวข้อต่อไปนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส ซึ่งเราจะสามารถนำมาใช้ช่วยในการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตได้

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งมีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in[a,b]$



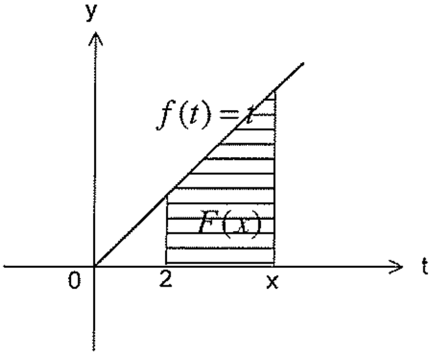
รูปที่ 5.4.1

ที่มา: (2005, Anton, Bivens and Davis)

จะเห็นว่า $\int_a^x f(t)\,dt$ คือพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y=f(t)$ กับแกน t บนช่วง $[a,x]$ ทุก ๆ ค่า $x\in[a,b]$ ซึ่งค่าของพื้นที่นั้นขึ้นอยู่กับค่าของ x เพราะฉะนั้นถ้าให้ $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ทุก ๆ $x\in[a,b]$ จะได้ว่า $A'(x)=f(x)$ ทุก ๆ $x\in[a,b]$

เพราะฉะนั้น $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad \text{ทุก } x\in[a,b]$$

<u>ตัวอย่างที่ 5.5.1</u> ให้ $f(t)=t$ และ $a=2$ ดังนั้น $F(x)=\int_2^x tdt=\frac{x^2-2^2}{2}=\frac{x^2}{2}-2$



เพราะฉะนั้น $F'(x)=\frac{d}{dx}\int_2^x tdt=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2}-2\right]=x=f(x)$ □

ทฤษฎีบทมูลฐานบทที่หนึ่งของแคลคูลัส

(The First Fundamental Theorem of Calculus)

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.5.1</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ c เป็นค่าคงตัวที่อยู่ในช่วง $[a,b]$ ให้ $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ ทุก $x\in[a,b]$ จะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง $[a,b]$ โดยที่

$$F'(x)=f(x)$$

นั่นก็คือ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f และ $\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt=f(x)$ ทุก $x\in[a,b]$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ จะพิสูจน์ว่า $F'(x)=f(x)$

ให้ x และ $x+h$ อยู่ในช่วงเปิด (a,b) ฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt \\
&= \left(\int_a^{x} f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt \right) - \int_a^{x} f(t)dt \\
&= \int_x^{x+h} f(t)dt
\end{aligned}
$$

สำหรับ $h \neq 0$ จะได้ว่า $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt$

สมมติให้ $h>0$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[x,x+h]$ ดังนั้น จะมี l และ u ที่อยู่ใน $[x,x+h]$ ซึ่ง $f(l)=m$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และ $f(u)=M$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

ดังนั้น $mh \le \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt \le Mh$ หรือ $f(l)h \le \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt \le f(u)h$

เนื่องจาก $h>0$ ดังนั้น

$$f(l) \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \le f(u) \quad \text{หรือ} \quad f(l) \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le f(u) \qquad .....(5.5.1)$$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่าอสมการ (5.5.1) เป็นจริง ในกรณีที่ $h<0$

ให้ $h \to 0$ จะได้ $l \to x$ และ $u \to x$ เพราะว่า $l,u \in [x,x+h]$

จาก f ต่อเนื่องที่ x ดังนั้น

$$\lim_{h\to 0} f(l) = \lim_{l\to x} f(l) = f(x) \quad \text{และ} \quad \lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x)$$

โดยทฤษฎีบทแซนวิช จะได้ว่า $F'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ □

<u>ตัวอย่างที่ 5.5.2</u>

1.) ถ้า $F(x) = \displaystyle\int_1^x \left(3t^2-1\right)dt$ แล้ว $F'(x) = 3x^2-1$

2.) ถ้า $F(x) = \displaystyle\int_3^x \left(\sqrt{t^2+3t+1}\right)dt$ แล้ว $F'(x) = \sqrt{x^2+3x+1}$

3.) ถ้า $F(x) = \displaystyle\int_a^x \cos\left(t^3\right)dt$ แล้ว $F'(x) = \cos(x^3)$ □

<u>ตัวอย่างที่ 5.5.3</u> จงหาค่าของ $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \int_{2}^{\sqrt{x}} \sin t dt$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = \sqrt{x}$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int_{2}^{\sqrt{x}} \sin t dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_{2}^{u} \sin t dt\right]$

$$= \frac{d}{du}\left[\int_{2}^{u} \sin t dt\right] \cdot \frac{du}{dx} = \sin u \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x}$$

$$= \sin\left(\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$ □

<u>ตัวอย่างที่ 5.5.4</u> กำหนดให้ $F(x) = \int_{x}^{1} t^2 \cos t \, dt$ จงหา $F'(x)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $F(x) = \int_{x}^{1} t^2 \cos t \, dt = -\int_{1}^{x} t^2 \cos t \, dt$

ดังนั้น $F'(x) = \frac{d}{dx}\left[-\int_{1}^{x} t^2 \cos t \, dt\right] = -\frac{d}{dx}\left[\int_{1}^{x} t^2 \cos t \, dt\right] = -x^2 \cos x$ □

<u>ตัวอย่างที่ 5.5.5</u> กำหนดให้ $y = \int_{x}^{x^3} \sqrt{t^2+4} \, dt$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\int_{x}^{x^3} \sqrt{t^2+4} dt = \int_{x}^{0} \sqrt{t^2+4} dt + \int_{0}^{x^3} \sqrt{t^2+4} dt = -\int_{0}^{x} \sqrt{t^2+4} dt + \int_{0}^{x^3} \sqrt{t^2+4} dt$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_{x}^{x^3} \sqrt{t^2+4} dt\right] = \frac{d}{dt}\left[-\int_{0}^{x} \sqrt{t^2+4} dt + \int_{0}^{x^3} \sqrt{t^2+4} dt\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[-\int_{0}^{x} \sqrt{t^2+4} dt\right] + \frac{d}{dt}\left[\int_{0}^{x^3} \sqrt{t^2+4} dt\right]$$

$$= \left(-\sqrt{x^2+4}\right) + \left(3x^2\sqrt{\left(x^3\right)^2+4}\right)$$

$$= 3x^2\sqrt{x^6+4} - \sqrt{x^2+4}$$ □

ทฤษฎีบทมูลฐานบทที่สองของแคลคูลัส (The second Fundamental Theorem of Calculus)

<u>ทฤษฎีบทที่ 5.5.2</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ใด ๆ ของ f บน $[a,b]$ (นั่นคือ $F'(x)=f(x)$) แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad .....(5.5.2)$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทมูลฐานบทที่หนึ่งของแคลคูลัส จะได้ว่า $G'(x)=f(x)$ หรือ G เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน f

จาก F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ดังนั้น $F(x)=G(x)+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ใด ๆ สำหรับ $x\in(a,b)$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \big(G(b)+C\big)-\big(G(a)+C\big) \\ &= \left(\int_a^b f(t)dt + C\right)-\left(\int_a^a f(t)dt + C\right) \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

หมายเหตุ เราเขียนแทน $F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)$ หรือ $\big[F(x)\big]_a^b = F(b)-F(a)$ ดังนั้นจากสมการ (5.5.2) จะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big]_a^b$

<u>**ตัวอย่างที่ 5.5.6**</u> จงหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_1^2 \left(x^2+1\right)dx$

วิธีทำ

$$\int_1^2 \left(x^2+1\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x+C\right]_{x=1}^{x=2}$$
$$=\left(\frac{2^3}{3}+2+C\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1+C\right)$$
$$=\frac{10}{3}$$
□

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 5.5.6 จะเห็นว่าค่าคงที่ C จะลบกันหมดไป ดังนั้นเราจึงอาจจะละค่าคงที่ C ได้ในการหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขต

ตัวอย่างที่ 5.5.7 จงหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

วิธีทำ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_{x=0}^{x=\pi/2}$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0 = 1-0=1$$
□

ตัวอย่างที่ 5.4.9 จงหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_{-1}^{3}\left|1-x^2\right|dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\left|1-x^2\right| = \begin{cases} 1-x^2, & x\in[-1,1] \\ -\left(1-x^2\right), & x\in(1,3] \end{cases}$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{3}\left|1-x^2\right|dx &= \int_{-1}^{1}\left|1-x^2\right|dx+\int_{1}^{3}\left|1-x^2\right|dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx+\int_{1}^{3}-\left(1-x^2\right)dx \\
&= \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1}-\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^{x=3} \\
&= \left[\left(1-\frac{1^3}{3}\right)-\left((-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)\right]-\left[\left(3-\frac{3^3}{3}\right)-\left(1-\frac{1^3}{3}\right)\right] \\
&= 8
\end{aligned}
$$

□

5.6 ปริพันธ์จำกัดเขตและการแทนค่า

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ แสดงการหาค่าปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยตัวแปร เพื่อช่วยในการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต ซึ่งเหมือนกับการหาค่าปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยตัวแปร เพื่อช่วยในการหาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ซึ่งได้กล่าวมาแล้ว

ทฤษฎีบทที่ 5.6.1 ให้ g เป็นฟังก์ชันซึ่งอนุพันธ์ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ f มีความต่อเนื่องบนเรนจ์ของ g

ถ้า $u = g(x)$ แล้ว $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$

หมายเหตุ $du = g'(x)dx$

ตัวอย่างที่ 5.6.1 จงหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2+1}dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2+1$ จะได้ $du = 2xdx$

เมื่อ $x=-1$ จะได้ $u=(-1)^2+1=2$ และเมื่อ $x=2$ จะได้ $u=(2)^2+1=5$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2+1}dx &= \int_2^5 \sqrt{u}du = \int_2^5 u^{\frac{1}{2}}du \\ &= \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=2}^{u=5} = \frac{2}{3}\left[5^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right]\end{aligned}$$

□

<u>ตัวอย่างที่ 5.6.2</u> ขจงหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_{1}^{2} \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x+1}}dx$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = x^3+2x+1$ จะได้ $du = \left(3x^2+2\right)dx$

เมื่อ $x=1$ จะได้ $u = 1^3+2(1)+1 = 4$ และถ้า $x=2$ จะได้ $u = 2^3+2(2)+1 = 13$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{2} \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x+1}}dx &= \int_{4}^{13} \frac{1}{\sqrt{u}}du = \int_{4}^{13} u^{-1/2}\,du \\
&= \left[2\sqrt{u}\right]_{u=4}^{u=13} \\
&= 2\sqrt{13} - 2\sqrt{4} = 2\sqrt{13} - 4
\end{aligned}$$ □

<u>ตัวอย่างที่ 5.6.3</u> จงหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin t\right)^3 \cos t dt$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $u = 1-\sin t$ จะได้ $du = -\cos t\,dt$ หรือ $-du = \cos t\,dt$

เมื่อ $t = -\frac{\pi}{2}$ จะได้ $u = 1-\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 2$ และถ้า $t = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $u = 1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin t\right)^3 \cos t dt &= \int_{2}^{0} u^3(-du) = \int_{0}^{2} u^3(du) \\
&= \left[\frac{u^4}{4}\right]_{u=0}^{u=2} = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4
\end{aligned}$$ □

ตัวอย่างที่ 5.6.4 จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต $\int_1^2 \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$ จะได้ $du = \frac{1}{x} dx$

เมื่อ $x = 1$ จะได้ $u = \ln 1 = 0$ และถ้า $x = 2$ จะได้ $u = \ln 2$

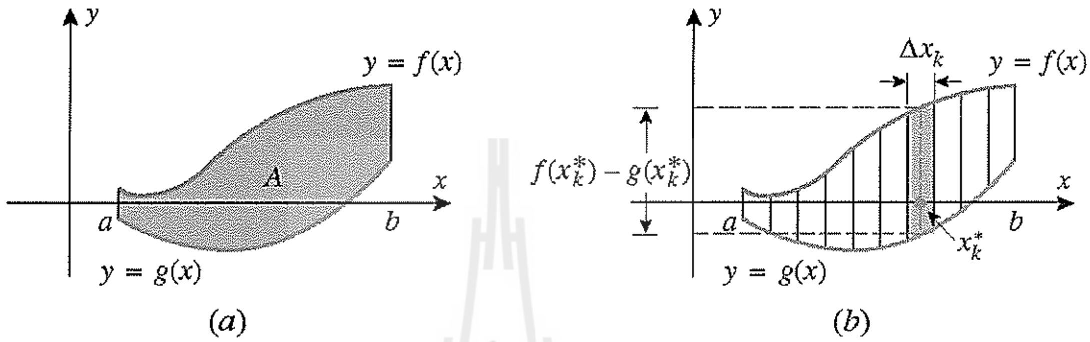
เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\sin(\ln x)}{x} dx &= \int_0^{\ln 2} \sin u \, du = \left[-\cos u\right]_{u=0}^{u=\ln 2} \\ &= \left(-\cos(\ln 2)\right) - \left(-\cos 0\right) \\ &= 1 - \cos(\ln 2)\end{aligned}$$

□

5.7 พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

ให้ R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$, $y=g(x)$, เส้นตรง $x=a$ และเส้นตรง $x=b$ (ซึ่ง $g(x)\le f(x)$ บนช่วง $[a,b]$) (ดูรูปที่ 5.7.1 (a))



รูปที่ 5.7.1 ที่มา: (2005, Anton, Bivens and Davis)

สามารถหาพื้นที่ของบริเวณ R ได้ดังนี้

ให้ P เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ ด้วยจุดแบ่ง $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ และให้ x_k^* เป็นจุดใด ๆ ใน $[x_{k-1},x_k]$ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ k คือ ΔA_k =สูง × กว้าง $=\left[f\left(x_k^*\right)-g\left(x_k^*\right)\right]\Delta x_k$

พื้นที่โดยประมาณของบริเวณ R คือ $S_n=\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(x_k^*\right)-g\left(x_k^*\right)\right]\Delta x_k$

ซึ่งเป็นผลรวมรีมันน์ของฟังก์ชัน $f-g$

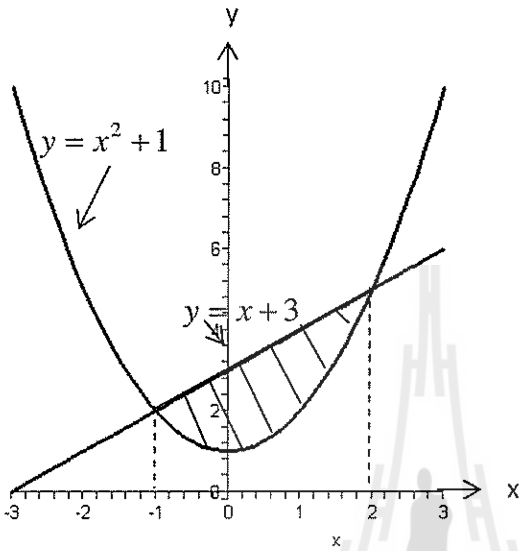
ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณ R คือ

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(x_k^*\right)-g\left(x_k^*\right)\right]\Delta x_k=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(x_k^*\right)-g\left(x_k^*\right)\right]\Delta x_k$$

$$=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

ตัวอย่างที่ 5.7.1 จงหาพื้นที่ของบริเวณ ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ และ $y = x + 3$

วิธีทำ



รูปที่ 5.7.2

จุดตัดของเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ กับ $y = x + 3$ คือ $(-1,2)$ และ $(2,5)$

จะได้ว่าพื้นที่ $= \int_{-1}^{2} \left((x+3) - (x^2+1) \right) dx$ (ดูรูปที่ 5.7.2)

$$= \int_{-1}^{2} \left(x - x^2 + 2 \right) dx$$

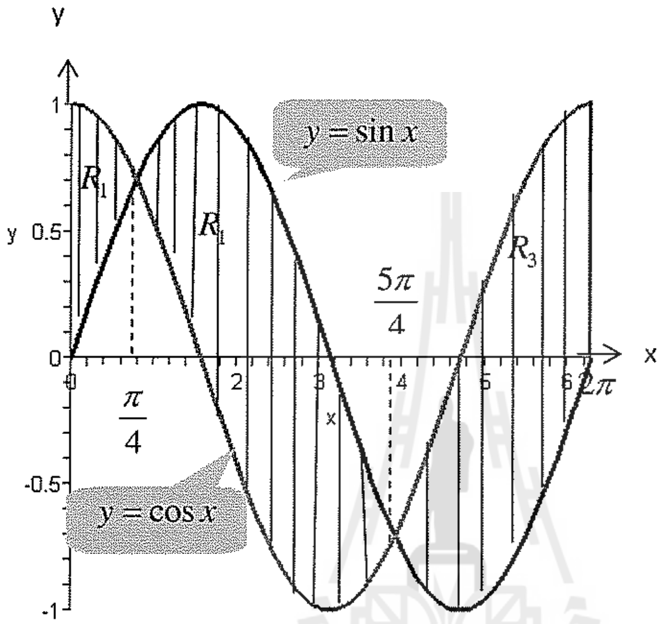
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{x=-1}^{x=2}$$

$$= \left[\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} + 2(2) \right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 2(-1) \right]$$

$= \frac{9}{2}$ ตารางหน่วย □

<u>ตัวอย่างที่ 5.7.2</u> จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sin x$, $y = \cos x$ เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$

<u>วิธีทำ</u>



จะได้ว่าพื้นที่ $= R_1 + R_2 + R_3$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x)dx$$

$$= \left[\sin x + \cos x\right]_{x=0}^{x=\pi/4} + \left[-\cos x - \sin x\right]_{x=\pi/4}^{x=5\pi/4} + \left[\sin x + \cos x\right]_{x=5\pi/4}^{x=2\pi}$$

$$= \left[\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - (\sin 0 + \cos 0)\right] + \left[\left(-\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$+ \left[(\sin 2\pi + \cos 2\pi) - \left(\left(\sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$= 2\sqrt{2}$ ตารางหน่วย □

แบบฝึกหัดที่ 5.2

1) จงหาค่าของผลรวมต่อไปนี้

(1.1) $\sum_{k=1}^{5}\left(k^2-k\right)$

(1.2) $\sum_{n=1}^{6}\sin n\pi$

(1.3) $\sum_{k=1}^{101}\left(7k+3\right)$

(1.4) $\sum_{k=1}^{30}k(k-1)(k+2)$

(1.5) $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^3}{n^2}$

2) จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y=f(x)$ กับแกน X บนช่วงที่กำหนดให้ โดยให้ผลแบ่งกั้น P แบ่งช่วงที่กำหนดให้ ออกเป็น n ช่วง ย่อย ๆ เท่ากัน และเลือก $x_i^*=x_i$ ทุก ๆ $i=1,2,3,\ldots,n$

(2.1) $f(x)=\frac{x}{2};$ $[1,4]$

(2.2) $f(x)=5-x;$ $[0,5]$

(2.3) $f(x)=4-\frac{1}{4}x^2;$ $[0,3]$

(2.4) $f(x)=1-x^3;$ $[-3,-1]$

3) จงหา $F'(x)$ เมื่อกำหนดให้

(3.1) $F(x)=\int_0^x\left(t^3+t-1\right)dt$

(3.2) $F(x)=\int_x^3\left(\sin\left(t^2\right)+t\right)dt$

(3.3) $F(x)=\int_{x^3}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{t^2+t+3}\right)dt$

4) กำหนดให้ $F(x)=\int_{4}^{x}\sqrt{t^2+9}\,dt$ จงหา

(4.1) $F(4)$ (4.2) $F'(4)$ (4.3) $F''(4)$

5) จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

(5.1) $\int_{-1}^{1}\left(3x^2+x+1\right)dx$

(5.2) $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

(5.3) $\int_{1}^{2}\left(\frac{x^3+3\sqrt{x}+x-1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

(5.4) $\int_{0}^{\pi/3}\left(2x-\sec x\tan x\right)dx$

(5.5) $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(x+\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$

(5.6) $\int_{-3}^{2}\left|3x^2+x\right|dx$

(5.7) $\int_{-1}^{2}\sqrt{2+|x|}\,dx$

(5.8) $\int_{0}^{1}(2x+1)^5\,dx$

(5.9) $\int_{0}^{4}3x\sqrt{25-x^2}\,dx$

(5.10) $\int_{-1}^{2}(x+2)(x-1)dx$

(5.11) $\int_{-\pi/3}^{2\pi/3}\frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}\,dx$

(5.12) $\int_{0}^{1}x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

(5.13) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2}{\left(x^3+1\right)^3}\,dx$

(5.14) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin x\left(\cos x+1\right)^5 dx$

(5.15) $\int_{0}^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\sec^2 x\,dx$

(5.16) $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dx$

6) กำหนดให้ $\int_{1}^{4} f(x)dx = 5$ จงหา $\int_{0}^{1} f(3x+1)dx$

7) กำหนดให้ $\int_{0}^{4} f(x)dx = 1$ จงหา $\int_{-2}^{0} xf(x^2)dx$

8) จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งต่าง ๆ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(8.1) $y = x^2,\quad y=\sqrt{x},\quad x=\frac{1}{4},\quad x=1$

(8.2) $y = x^3-4x,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=3$

(8.3) $y = x^2,\quad y=x+2$

(8.4) $y = 2+|x-1|,\quad y=-\frac{1}{5}x+7$

(8.5) $y=x,\quad y=4x,\quad y=-x+2$

(8.6) $y=x^3-4x^2+3x,\quad y=0$

(8.7) $y=x^2-4,\quad y=8-2x^2$

เฉลยแบบฝึกหัด

บทที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง

<u>แบบฝึกหัดที่ 1.2</u>

1) 1.1) 5   1.2) 9   1.3) $-\sqrt[3]{3}$ 1.4) $-\frac{1}{3}$ 1.5) $-\frac{3}{8}$

1.6) 0   1.7) หาค่าไม่ได้   1.8) $-\frac{6}{11}$

2) 2.1) 59   2.2) $\frac{3}{4}$ 2.3) 205   2.4) $\frac{27}{125}$ 2.5) 7

3) 3.1) 5   3.2) $\frac{3}{5}$ 3.3) $\frac{6}{5}$ 3.4) 8   3.5) $\frac{3}{2}$

3.6) 2   3.7) 12   3.8) 6   3.9) $\frac{1}{2}$ 3.10) $\frac{1}{6}$

3.11) $-\frac{1}{16}$ 3.12) 1   3.13) 108   3.14) $-\frac{1}{9}$ 3.15) $-\frac{1}{2}$

3.16) $-\frac{16}{5}$ 3.17) หาค่าไม่ได้   3.18) หาค่าไม่ได้   3.19) $\frac{20}{7}$

4) 4.1) 9   4.2) 0   4.3) หาค่าไม่ได้, 4   4.4) 0

5) 5.1) $\frac{5}{3}$ 5.2) $\frac{1}{27}$ 5.3) 0   5.4) 0   5.5) 0

5.6) 0   5.7) 0   5.8) $\frac{1}{2}$ 5.9) 0   5.10) 0

5.11) $\frac{1}{2}$ 5.12) $\frac{12}{5}$

<u>แบบฝึกหัดที่ 1.3</u>

1) 1.1) 2   1.2) 4   1.3) -4   1.4) 1   1.5) $2\sqrt{2}$

1.6) 0   1.7) หาค่าไม่ได้

2) 2.1) $-\infty$ 2.2) $+\infty$ 2.3) หาค่าไม่ได้ 2.4) $-\infty$ 2.5) $-\infty$

2.6) $+\infty$ 2.7) -1 2.8) $+\infty$ 2.9) หาค่าไม่ได้ 2.10) 0

2.11) $-\infty$ 2.12) $+\infty$ 2.13) 1 2.14) $-\infty$ 2.15) $\frac{1}{3}$

2.16) $+\infty$ 2.17) 0

3) 3.1) $+\infty$ 3.2) -5

4) เส้นกำกับแนวยืน คือ เส้นตรง $x=3$ และ $x=-3$, เส้นกำกับแนวนอนคือเส้นตรง $y=1$

__แบบฝึกหัดที่ 1.4__

1) 1.1) ไม่ 1.2) ต่อเนื่อง 1.3) ต่อเนื่อง 1.4) ต่อเนื่อง

1.5) ไม่ต่อเนื่อง 1.6) ต่อเนื่อง

3) ไม่ต่อเนื่องเพราะ $f(2)$ หาค่าไม่ได้

5) k=0

7) มี

9) 6

10) 10.1) $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$ 10.3) $(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,\infty)$ 10.5) $\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$

บทที่ 2 อนุพันธ์

__แบบฝึกหัดที่ 2.1__

1) 1.1) $y+x-3=0$ 1.3) $y+x-5=0$ 1.5) $y+54x-27=0$

3) 3.1) 8 เมตร/วินาที, -24 เมตร/วินาที

3.3) 2.5 วินาที, -40 เมตร/วินาที

5) $-\frac{10,000}{3}$, $-\frac{25,000}{9}$, $-\frac{5,000}{3}$, 0

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1) 1.1) $3x^2+4x-1$ 1.3) $(x+1)\left(\frac{4x^2+\sqrt{x}}{2x}\right)+x^2+\sqrt{x}$

1.5) $\left(\frac{x^2-2}{x^4}\right)\left(1+18x^5\right)+\left(1+3x^5\right)\left(\frac{8-2x^2}{x^4}\right)$

1.7) $\dfrac{\left(x^3-x\right)\left(\frac{5\sqrt{x^3}}{2}+\frac{3\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)-\sqrt{x}\left(x^2+x-1\right)\left(3x^2-1\right)}{\left(x^3-x^2\right)^2}$

3) a=4, b=-4

5) $2y-x+1=0,\quad 2y-x-7=0$

แบบฝึกหัดที่ 2.3

1) 15

2) 2.1) $81x^2-108x+42$ 2.3) $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ 2.5) $-3\sin x\cos^2 x$

3) 3.1) $-\frac{2\sin\left(2\sqrt{t}\right)\cos\left(2\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}$ 3.3) $\dfrac{-\sin\left(\frac{t}{t+1}\right)}{2(t+1)^2\sqrt{\cos\left(\frac{t}{t+1}\right)}}$

4) 4.1) $\frac{3\cos(6x)\left(2-3\sin^2(6x)\right)}{\sqrt{2x-\sin^3(6x)}}$ 4.3) $2x^3\cos(5x)\cdot\left(2\cos(5x)-5x\sin(5x)\right)$

4.5) $-\sin x\cdot\sin(2x-1)+2\cos x\cdot\cos(2x-1)$ 4.7) $\frac{64x\left(2+x^2\right)^7}{\left(2-x^2\right)^9}$

5) $y+\pi x-\frac{\pi^2}{2}=0$

7) $\frac{2}{x+1}$

8) 8.1) $y-2=0$ 8.3) $72y-x-180=0$

แบบฝึกหัดที่ 2.4

1) 1.1) $-\dfrac{4x^3+6xy+y}{3x^2+3y^2+x}$ 1.3) $\dfrac{x^4-4x^3y+4x^2y^2+y}{x}$

1.5) $$\frac{-6xy\cot^2\left(x^2y+y\right)\left(1+\cot^2\left(x^2y+y\right)\right)-1}{\left[x^2+1\right]\cdot\left[-3\cot^2\left(x^2y+y\right)-3\cot^4\left(x^2y+y\right)\right]}$$

2) 2.1) $\dfrac{-2y^2-8x^2}{y^5}$ 2.3) $\dfrac{\sin y}{\left(\cos y-1\right)^3}$

3) 3.1) $y+x-2=0$ 3.3) $2y-9x+5=0$

5) 5.1) $n!$ 5.3) $\dfrac{(-1)^{n+1}\prod\limits_{i=1}^{n-2}2i+1}{2^n\left(x^{n-\frac{1}{2}}\right)},\quad n\geq 3$

บทที่ 3 การประยุกต์ของอนุพันธ์

แบบฝึกหัดที่ 3.1

1) 1.1) ค่าสูงสุดคือ 5, ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

1.3) ค่าต่ำสุดคือ 1, ค่าสูงสุดคือ 50, ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

1.5) ค่าต่ำสุดคือ -1, ค่าสูงสุดคือ 2, ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ -1, ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ 0

2) 2.1) $x=-\dfrac{2}{5}$ 2.3) $x=-2,\ x=0$

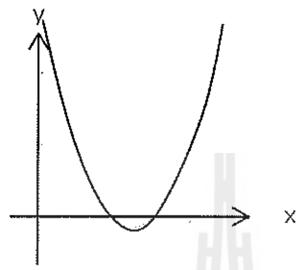
2.5) $x=\dfrac{n\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว

3) 3.1) (a) $x=\dfrac{5}{2}$ (b) f เพิ่มบนช่วง $\left[\dfrac{5}{2},\infty\right)$ และลดบนช่วง $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$

(c) ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $-\frac{1}{4}$ (d) ไม่มี

(e) f เว้าหงายบนช่วง $(-\infty,\infty)$

(f)

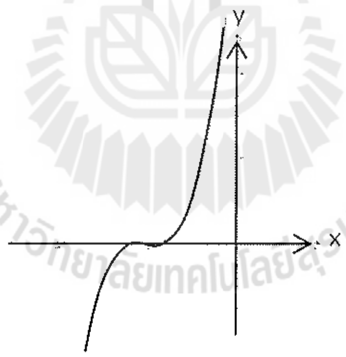


3.3) (a) $x=-2$ (b) f เพิ่มบนช่วง $(-\infty,\infty)$

(c) ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (d) $x=-2$

(e) f เว้าหงายบนช่วง $(-2,\infty)$ และ f เว้าคว่ำบนช่วง $(-\infty,-2)$

(f)

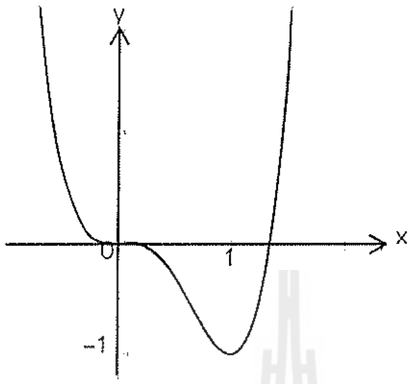


3.5) (a) $x=0,\ x=1$ (b) f เพิ่มบนช่วง $[1,\infty)$ และลดบนช่วง $(-\infty,1]$

(c) ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -1 (d) $x=0,\ x=\frac{2}{3}$

(e) f เว้าหงายบนช่วง $(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{3},0\right)$ และ f เว้าคว่ำบนช่วง $\left(0,\frac{2}{3}\right)$

(f)



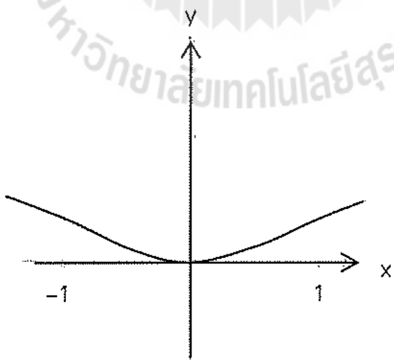
3.7) (a) $x=0$ (b) f เพิ่มบนช่วง $[0,\infty)$ และลดบนช่วง $(-\infty,0]$

(c) ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 0 (d) $x=-\sqrt{\frac{2}{3}},\ x=\sqrt{\frac{2}{3}}$

(e) f เว้าหงายบนช่วง $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ และ f เว้าคว่ำบนช่วง

$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\infty\right)$

(f)



4) 4.1) ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ -1, จุดเปลี่ยนเว้าคือ $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ และ $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$,

f เพิ่มบนช่วง $[\pi,2\pi]$ และลดบนช่วง $[0,\pi]$,

f เว้าหงายบนช่วง $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ และ f เว้าคว่ำบนช่วง $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

4.3) ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์, จุดเปลี่ยนเว้าคือ $(0,0)$,

f เพิ่มบนช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

f เว้าหงายบนช่วง $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ และ f เว้าคว่ำบนช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

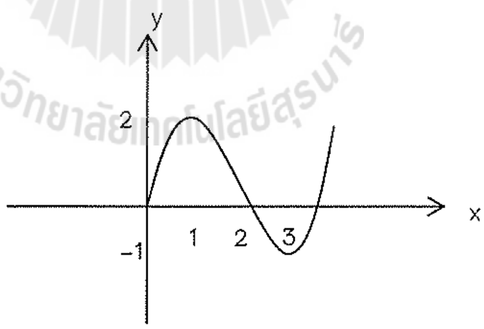
4.5) ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $-\frac{1}{2}$, ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $\frac{1}{2}$

จุดเปลี่ยนเว้าคือ $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

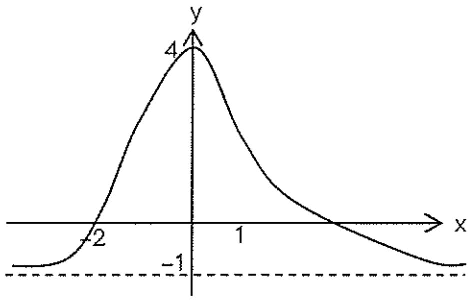
f เพิ่มบนช่วง $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ และลดบนช่วง $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,

f เว้าหงายบนช่วง $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ และ f เว้าคว่ำบนช่วง $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

5) 5.1)



5.3)



<u>แบบฝึกหัดที่ 3.2</u>

1) รัศมีของบอลลูนลดลงด้วยอัตรา $\dfrac{3}{676\pi}$ ฟุตต่อนาที

   พื้นที่ผิวลดลงด้วยอัตรา $\dfrac{6}{13}$ ตารางฟุตต่อนาที

2) ความสูงของระดับน้ำลดลงด้วยอัตรา $\dfrac{1}{3\pi}$ เมตรต่อวินาที

3) 3.1) ปริมาตรเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 36π ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที

   3.2) รัศมีเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\dfrac{1}{2\pi}$ ฟุตต่อนาที

4) น้ำไหลออกด้วยอัตรา $3-0.02\pi$ ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที

5) เงาบนกำแพงลดลงด้วยอัตรา $\dfrac{75}{24}$ ฟุตต่อวินาที

<u>แบบฝึกหัดที่ 3.3</u>

1) 20,000 ตารางเมตร

2) $\dfrac{L}{2}$ หน่วย

3) $\dfrac{20,000}{6}\sqrt{\dfrac{10}{3\pi}}$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

4) 300

5) 8 ตารางนิ้ว

6) 2,700 ตารางหน่วย

7) ควรขายมันสำปะหลังเมื่อสิ้นสัปดาห์ที่ 10

แบบฝึกหัดที่ 3.4

1) 1.1) $dy = 3\cos(3x+3)\,dx$

1.3) $dy = \left(1 + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

1.5) $dy = 3\sec^2 x(\tan x + 1)^2\,dx$

2) 2.1) $dy = 1.5$

3) 3.1) $dy = 34,\ \ \Delta y = 67$

4) 4.1) 7.21428 4.3) 5.99167

บทที่ 4 ฟังก์ชันอดิศัยและหลักเกณฑ์โลปีตาล

แบบฝึกหัดที่ 4.1

1) 1.1) $D_f = R_{f^{-1}} = (-\infty,\infty),\quad R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty,\infty)$ และ $f^{-1}(x) = x+1$

1.3) $D_f = R_{f^{-1}} = [1,\infty),\quad R_f = D_{f^{-1}} = [0,\infty)$ และ $f^{-1}(x) = x^2+1$

1.5) $D_f = R_{f^{-1}} = (-\infty,\infty),\quad R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty,\infty)$ และ $f^{-1}(x) = (x-1)^3$

1.7) $D_f = R_{f^{-1}} = (-\infty,-1)\cup(-1,\infty),\quad R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty,1)\cup(1,\infty)$ และ $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$

1.9) $D_f = R_{f^{-1}} = [0,\infty),\quad R_f = D_{f^{-1}} = (-1,1]$ และ $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$

3) $\dfrac{1}{6}$

แบบฝึกหัดที่ 4.2

1) 1.1) $\frac{\pi}{7}$ 1.3) $\frac{2\pi}{7}$

2) 2.1) $\sqrt{1-x^2}$ 2.3) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ 2.5) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

3) 3.1) $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ 3.3) $\frac{2x}{1+x^4}$ 3.5) $-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

3.7) $-\frac{1}{(1+x^2)(\tan^{-1}x)^2}$ 3.9) 0 3.11) $\frac{9(2+\sin^{-1}(3x))^2}{\sqrt{1-9x^2}}$

3.13) $\frac{5\cos 5x}{1+(\sin 5x)^2}$ 3.15) $\cot^{-1}(x^2+x+2)-\frac{2x^2+x}{1+(x^2+x+2)^2}$

4) 4.1) $\frac{(1+y^2)}{x}\left(\cos x-\tan^{-1}y-3x^2\right)$

5) 5.1) $\sqrt{2}x-1+\frac{\pi}{4}$

แบบฝึกหัดที่ 4.3

1) 1.1) $x=e^{2/5}$ 1.3) $x=1,-3$ 1.5) $x=2,4$

2) 2.1) 0 2.3) ∞ 2.5) 1 2.7) 0

3) 3.1) $f'(x)=\frac{2}{x+1}$ 3.3) $f'(x)=\frac{\sec^2 x}{\tan x}$

3.5) $f'(x)=\frac{3\left(\log_{10}x^3\right)^{-4/5}}{5x\ln 10}$ 3.7) $f'(x)=\frac{2x^4}{x^2-1}+3x^2\ln\left(x^2-1\right)$

3.9) $f'(x)=\frac{4}{x}-2\tan x$ 3.11) $f'(x)=\frac{5x^4+16x^3-9x^2+4x-1}{x^5+4x^4-3x^3+2x^2-x}$

3.13) $f'(x)=\frac{3^{x+1}\left(\log_3\left(1+3^x\right)\right)^2}{1+3^x}$

4) $y=12x-24$

5) 5.1) $y' = \left[(3x-1)^4\left(x^4+4x^{3-1}\right)^6\right]\left[\dfrac{12}{3x-1}+\dfrac{24x^3+72x^2}{x^4+4x^3-1}\right]$

5.3) $y' = \left[\dfrac{\sin^2 x\tan^3 x}{(x+1)^2}\right]\left[2\cot x+3\sec^2 x\cot x-\dfrac{2}{x+1}\right]$

5.5) $y' = x^{\sin x^2}\left[\dfrac{\sin x^2}{x}+2x\ln x\cos x^2\right]$

5.7) $y' = \dfrac{(x+1)\left(x^2+2x+1\right)\left(x^3-1\right)}{(x+3)(x+2)}\left[\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{3x^2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+2}\right]$

5.9) $y' = \sqrt[3]{\dfrac{\left(x^2+1\right)}{(x-2)}}\left[\dfrac{2x}{3\left(x^2+1\right)}-\dfrac{1}{3(x-2)}\right]$

6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2+y^2-2y}$

<u>แบบฝึกหัดที่ 4.4</u>

1) 1.1) 1 1.3) 0

2) 2.1) $y' = 8\sinh(4x)\cosh(4x)$ 2.3) $y' = \dfrac{e^x\cosh\left(e^x\right)}{\left|\sinh\left(e^x\right)\right|\sqrt{\sinh^2\left(e^x\right)-1}}$

2.5) $y' = \dfrac{1+\sinh x}{(1-\sinh x)^2}$ 2.7) $y' = \dfrac{2e^{2x}\coth e^{2x}}{\ln 2}$

2.9) $y' = (\tanh x)^{\operatorname{sech} x}\left[\operatorname{csch} x\operatorname{sech}^2 x-\operatorname{sech} x\tanh x\ln(\tanh x)\right]$

3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\sinh y-y\sinh x}{x\cosh y+\cosh x}$

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-3yx^3\tanh(y^2)}{2y^2x^4\operatorname{sech}^2(y^2)-1}$

แบบฝึกหัดที่ 4.5

1) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{1}{2}$ 5) 0 7) 6 9) 0 11) ∞

13) 0 15) 0 17) 1 19) 0 21) 0 23) $-\frac{1}{2}$

บทที่ 5 การหาปริพันธ์

แบบฝึกหัดที่ 5.1

1.1) $y=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x|+c$

1.3) $y=\frac{1}{2}(\ln 3x)^2+c$

1.5) $y=\frac{1}{2}\sin(x^2+1)+c$

1.7) $y=2\sqrt{\ln x}+c$

1.9) $y=\sec x-2x+c$

1.11) $y=\frac{-2}{3(\sqrt{x}+3)^3}+c$

1.13) $y=\frac{2}{3\pi}(\sin \pi x)^{3/2}+c$

แบบฝึกหัดที่ 5.2

1) 1.1) 40 1.3) 36,360 1.5) $\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}$

2) 2.1) $\frac{15}{4}$ 2.3) $\frac{39}{4}$

3) 3.1) $F'(x)=x^3+x-1$ 3.3) $F'(x)=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+3}}{2\sqrt{x}}-3x^2\sqrt{x^6+x^3+3}$

4) 4.1) $F(4)=0$ 4.3) $F''(4)=\frac{4}{5}$

5) 5.1) 4 5.3) $\frac{3\cdot 2^{11/3}}{11}+\frac{18\cdot 2^{7/6}}{7}+\frac{3\cdot 2^{5/3}}{5}-\frac{3\cdot 2^{2/3}}{2}-\frac{1497}{770}$

5.5) $\frac{\pi^2}{9}+2\sqrt{3}$ 5.7) $2\sqrt{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{16}{3}$

5.9) 98   5.11) $\sqrt{10}-\sqrt{6}$

5.13) $-\infty$ 5.15) $\frac{2}{3}$

6) 5

7) $-\frac{1}{2}$

8) 8.1) $\frac{49}{192}$ 8.3) $\frac{9}{2}$ 8.5) $\frac{3}{5}$ 8.7) 32

บรรณานุกรม

1. Anton H., Bivens I., Davis S., **Calculus**, 8th Edition, John Wiley & Sons, USA, 2005.
2. Bittinger L. M., **Calculus and its applications**, 7th Edition, Addison – Wesley, USA, 1999.
3. Edwards H. C., and Penney E. D., **Calculus**, 6th Edition, Prentice – Hall Inc., New – Jersey, 2002.
4. Edwards L., **Calculus**, 9th Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, USA, 2010.
5. Ellis R., and Gulick D., **Calculus with analytic geometry**, Alternate Edition, Harcourt - Brace Jovanovich, Florida, 1988.
6. Garner E. L., **Calculus and analytic geometry**, Dellen Publishing Company, A division of Macmillan Inc., California, 1988.
7. Holder I. L., DeFranza, J., and Pasachpff M. J., **Calculus**, 2th Edition, Brooks/Cole, USA, 1994.
8. Lang S., **A first course in calculus**, 5th Edition, Springer – Verlag, New York, 1986.
9. Larson R., and Edwards B. H., **Calculus**, Brooks/Cole, Cengage Learning, USA, 2010.
10. Repka J., **Calculus with analytic geometry**, Wm. C. Brown Communications Inc., USA, 1994.
11. Ryan M., **Calculus Workbook for Dummies**, Wiley Publishing Inc., Indiana, 2005.
12. Stewart J., **Calculus**, 5th Edition., Brooks/Cole- Thomson Learning, USA, 2009.
13. Swokowski E. W., Olinick M., Pence D. (with the assistance of Jeffery A. Cole), **Calculus**, 6th Edition, PWS Publish Company, Boston, 1994.
14. Thomas B. G., and Finney L. R., **Calculus and analytic geometry**, 9th Edition, Addison – Wesley Publishing Company, Paris, 1998.
15. Varberg D., Purcell J. E., and Rigdon E. S., **Calculus**, 8th Edition, International Edition, Prentice – Hall, New Jersey, 2000.

16. Yuen F., and Yuan W., **Calculus**, Springer – Verlag, Singapore, 2000.
17. คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย **แคลคูลัส 1** พิมพ์ครั้งที่ 4 สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย กรุงเทพมหานคร 2552
18. ประภาศรี อัศวกุล **แคลคูลัส 1** พิมพ์ครั้งที่ 9 ศูนย์บรรณสารและสื่อการศึกษา มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี นครราชสีมา 2552
19. ลำดวน ยอดยิ่ง **แคลคูลัส 1-1** พิมพ์ครั้งที่ 2 ส. เอเชียเพรส(1989) จำกัด กรุงเทพมหานคร 2549