



รหัสโครงการ : SUT 1-103-88-14-01

รายงานการวิจัย  
ตัวแบบการควบคุมน้ำเสียโดยวิธีไฟไนท์อีลีเมนต์  
A Model of Water Pollution Control  
Using Finite Element Method

ผู้วิจัย

หัวหน้าโครงการ : รองศาสตราจารย์ ดร.สุวรรณ ถังมณี  
สาขาวิชาคณิตศาสตร์  
สำนักวิชาวิทยาศาสตร์  
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
ปีงบประมาณ พ.ศ. 2538  
ผลงานวิจัยเป็นความรับผิดชอบของหัวหน้าโครงการวิจัยแต่ผู้เดียว

กันยายน 2541

## กิติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี ที่ให้ทุนวิจัย เพื่อดำเนินการวิจัยนี้ ขอขอบคุณสำนักงานโครงการส่งน้ำและบำรุงรักษาลำตะคอง, กรมชลประทาน และหน่วยควบคุมมลพิษ จังหวัดนครราชสีมา ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์ข้อมูลที่เป็นเกี่ยวกับลำตะคอง เพื่อทำการวิเคราะห์เปรียบเทียบข้อมูลที่ได้จากการคำนวณและข้อมูลที่วัดจริง ขอขอบคุณอาจารย์ ดร.จงจินต์ ผลประเสริฐ ที่ได้ให้ข้อมูลที่จำเป็นและข้อเสนอแนะที่มีประโยชน์ต่อการวิจัยนี้

## บทคัดย่อ

ในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้สร้างตัวแบบการควบคุมน้ำเสียในแหล่งน้ำที่ค่อนข้างจะเป็นแหล่งน้ำปิด (nearly closed water area) การกระจายของของเสียวัดจากปริมาณ COD ณ จุดต่าง ๆ ในแหล่งน้ำเป็นไปตามสถานะสงบนิ่ง (steady state) ของสมการการพาและการแพร่กระจาย (convection - diffusion equation) โดยอาศัยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ สามารถคำนวณหาความเข้มข้นของ COD ณ จุดต่าง ๆ ในแหล่งน้ำได้ ด้วยเหตุที่ปริมาณ COD ณ จุดต่าง ๆ ในแหล่งน้ำเกิดจากการแพร่กระจายของเสียที่ไหลลงสู่แหล่งน้ำจากจุดที่อยู่ริมฝั่ง (boundary) เมื่อทราบว่า ณ จุดบางจุดในแหล่งน้ำมีปริมาณ COD สูงกว่าปริมาณที่มาตรฐานสากลกำหนดซึ่งทำให้น้ำเกิดเน่าเสีย ไม่เหมาะในการนำไปใช้บริโภค หรือประกอบกิจการเกษตร จำเป็นจะต้องลดปริมาณ COD ในแหล่งน้ำ ค่าใช้จ่ายในการปฏิบัติการเพื่อลดปริมาณ COD ของแหล่งที่ปล่อยน้ำเสียลงสู่แหล่งน้ำ ถูกนำมาคำนวณเพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด และสามารถควบคุมปริมาณของเสีย (COD) ในแหล่งน้ำ ณ จุดต่าง ๆ ที่กำหนดให้มีค่าไม่เกินกว่าค่ามาตรฐาน วิธีคำนวณเพื่อลดปริมาณ COD ณ จุดต่าง ๆ พร้อมทั้งการคำนวณให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดดังกล่าว ได้นำเอาวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์และวิธีโปรแกรมเชิงเส้นมาประยุกต์ การวิจัยนี้ได้ทดลองกับแหล่งน้ำลำตะคอง จังหวัดนครราชสีมา ซึ่งจากข้อมูลพบว่า มีบางจุดในแหล่งน้ำมีปริมาณ COD เกินกว่าค่ามาตรฐาน ผลการวิจัยชี้ให้เห็นว่า สามารถลดปริมาณ COD ณ จุดสังเกตการ 8 จุดในแหล่งน้ำได้ โดยการลดปริมาณของเสียที่ไหลลงสู่แหล่งน้ำ ณ จุดริมฝั่ง 18 จุด ภายใต้งบเงินใช้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

## Abstract

A model for water pollution control of nearly closed water area is described. The principal constraints are to attain the Chemical Oxygen Demand (COD) standards. The finite element method is used for the derivation of linear constraints of the constrained optimization problem. The objective function is the total volume of removal COD concentration discharging into the water. The model is applied to Lamtakong Reservoir, which is a nearly closed water area in Nakhon - Ratchasima province, Thailand.

## CONTENTS

	<b>Page</b>
กิตติกรรมประกาศ	i
Abstract	ii , iii
Introduction	1
Model Formulation	2
Finite Element Method	3
The Objective Function	5
Optimal Control Problem	5
Application to Lamtakong Reservoir	6
Finite Element Discretization	7
Conclusion	10
Reference	13
ประวัตินักวิจัยและหน่วยงานที่สังกัด	14

## LIST OF TABLES

<b>Table 1 :</b>	COD Concentration, Weight and Computational Results	9
<b>Table 2 :</b>	Computational Data	7
<b>Table 3 :</b>	COD Concentration Regions	7
<b>Table 4 :</b>	Concentration at stage and after the control stage at observations points	10

## LIST OF ILLUSTRATIONS

Fig 1 :	Problem Definition	2
Fig 2 :	Location (Lamtakong Reservoir)	6
Fig 3 :	Finite Element Discretization	8
Fig 4 :	COD Distribution at the existing stage	11
Fig 5 :	COD Distribution after the control of inflow	12

A Model of Water Pollution Control  
using Finite Element Method

Suwon Tangmanee  
School of Mathematics  
Suranaree University of Technology  
Nakhon - Ratchasima, Thailand

**Abstract**

A model for water pollution control of nearly closed water area is described. The principal constraints are to attain the Chemical Oxygen Demand (COD) standards. The finite element method is used for the derivation of linear constraints of the constrained optimization problem. The objective function is the total volume of removal COD concentration discharging into the water. The model is applied to Lamtakong Reservoir, which is a nearly closed water area in Nakhon - Ratchasima province, Thailand.

**Introduction**

The combination of linear programming and finite element methods has shown to be an effective tool for constrained optimization problems. Since the finite element method is not only suitable for solving the problems with irregular boundaries but also a useful technique for the derivation of linear constraints of the optimization problem. Several investigators have solved the water pollution control or the thermal diffusion control by this method.

In this paper the numerical model is shown to apply to the water pollution control of nearly closed water area. This model requires the permanent current and substance dispersion patterns. Although tidal residual current is generally used as permanent current, it is difficult to simulate the actual current. The required one is complex. For simplicity the present study employs the current due to the influence of river discharge. Regarding the substance dispersion, the model based on two dimensional dispersion equation is used for the calculation of COD concentration. For the numerical simulations, of dispersion equation, the finite element discretization is employed. We assume that the current is smaller than the substance dispersion. Because the smaller the size of finite elements the better the accuracy, as far as the current is

concerned. Moreover, the current is one of the most important factors to determined the dispersion phenominon.

The model present in this paper makes it possible to apply to the water pollution control of a lake or nearly closed water area.

### Model Formulation

To get constraints of the linear programming, the formulation of the substance dispersion model using the finite element method is applied. The dispersion of the COD is described by the diffusion-convection equation on COD in an arbitrary domain  $\Omega$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} - D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + RC - Q = 0 \quad (1)$$

where  $C = C(x,y)$  is a concentration of COD at the point  $(x,y)$  in  $\Omega$ ,  $u$  and  $v$  are flow velocity in X and Y directions respectively.  $D_x$  and  $D_y$  are dispersion coefficients in X and Y directions.  $R$  is the substance decaying rate, and  $Q$  is the increasing rate of substance concentration due to a source.

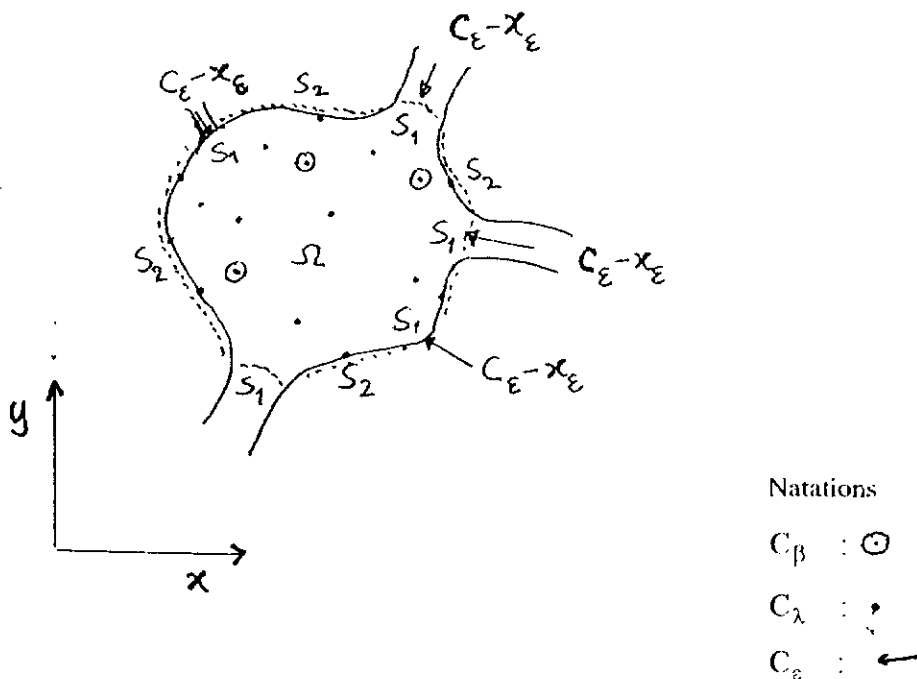


Fig 1. Problem Definition

Figure 1 shows a typical domain  $\Omega$ , with the boundary  $\partial\Omega$  can be classified into two types. They are  $S_1$  with specified COD concentration and  $S_2$  with specified flux of concentration.

The boundary conditions on  $S_1$  and  $S_2$  are :

$$C = c_0 \quad \text{on} \quad S_1 \text{-----} (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial n} = T_0 \quad \text{on} \quad S_2 \text{-----} (3)$$

Where  $C_0$  and  $T_0$  are the given values,  $\frac{\partial C}{\partial n}$  is the normal derivative on the boundary  $S_2$ , it is the flux concentration on  $S_2$

The equation (3) may be described as

$$\frac{\partial C}{\partial n} = q_x \ell + q_y m,$$

where  $q_x$  and  $q_y$  are flux in x - and y - directions,  $\ell$  and  $m$  are direction cosines of the unit outward normal to  $S_2$

### **Finite Element Method for Solving the Problem (1) (2) and (3)**

The domain  $\Omega$  is divided into triangular elements. The Galerkin method is then used for the formulation of the finite element, using a piecewise linear interpolation base on three-node triangular elements. The degrees of freedom of the problem are the values of  $C$  at the angular point of the triangles. This method reduced the problem (1), (2) and (3) into a linear system of equations with the unknowns vector  $C$  and the corresponding matrices

$$K_{\alpha\beta\gamma} U_\beta C_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma} V_\beta C_\gamma + S_{\alpha\gamma} C_\gamma + H_{\alpha\gamma} C_\gamma = F_\alpha \text{-----} (4)$$

where  $F_\alpha$  is a vector corresponding to the integrations involve the function  $Q$  over the triangular elements. The matrices  $K_{\alpha\beta\gamma}$ ,  $S_{\alpha\gamma}$  and  $H_{\alpha\gamma}$  are matrices obtained by the integrations to the convection, diffusions and the decaying rate RC respective. The subscripted  $\alpha, \beta, \gamma$  are indicated of values corresponding to unknowns at vertices of the triangular points of the triangles where  $\beta$  is indicating to the numbers of observation points. The equation (4) can be splitted into the following form :



$$\begin{aligned}
& K_{\alpha\gamma\beta} U_\gamma C_\beta + K_{\alpha\gamma\lambda} U_\gamma C_\lambda + K_{\alpha\gamma\varepsilon} U_\gamma C_\varepsilon \\
& + K_{\alpha\gamma\beta} V_\gamma C_\beta + K_{\alpha\gamma\lambda} V_\gamma C_\lambda + K_{\alpha\gamma\varepsilon} V_\gamma C_\varepsilon \\
& + S_{\alpha\beta} C_\beta + S_{\alpha\lambda} C_\lambda + S_{\alpha\varepsilon} C_\varepsilon \\
& + H_{\alpha\beta} C_\beta + H_{\alpha\lambda} C_\lambda + H_{\alpha\varepsilon} C_\varepsilon = F_\alpha \text{-----} (5)
\end{aligned}$$

where  $\beta$  indicated the observation nodes

$\varepsilon$  indicated the inflow points

$\lambda$  indicated the points which is not an observation and is not an inflow.

The points corresponding to  $\beta$ ,  $\varepsilon$  and  $\lambda$  are shown in the figure 1.

Let  $x_\varepsilon$  be the removal COD concentration at nodal point  $\varepsilon$  as shown in fig. 1, and let  $(C_\varepsilon - x_\varepsilon)$  be a concentration of control inflow, where  $x_\varepsilon$  be a control. Then by arrangement procedure the equation (5) leads to:

$$E_{\alpha\beta} C_\beta = E_{\alpha\lambda} C_\lambda + E_{\alpha\varepsilon} (C_\varepsilon - X_\varepsilon) + F_\alpha \text{-----} (6)$$

Where :

$$\left. \begin{aligned}
E_{\alpha\beta} &= K_{\alpha\gamma\beta} U_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta} V_\gamma + S_{\alpha\beta} + H_{\alpha\beta} \\
E_{\alpha\lambda} &= -(K_{\alpha\gamma\lambda} U_\gamma + K_{\alpha\gamma\lambda} V_\gamma + S_{\alpha\lambda} + H_{\alpha\lambda}) \\
E_{\alpha\varepsilon} &= -(K_{\alpha\gamma\varepsilon} U_\gamma + K_{\alpha\gamma\varepsilon} V_\gamma + S_{\alpha\varepsilon} + H_{\alpha\varepsilon})
\end{aligned} \right\} \text{-----} (7)$$

Multiplying both sides of equation (6) by the inverse matrix of left-hand side coefficient matrix equation for  $C_\beta$ , we obtained

$$\begin{aligned}
C_\beta &= E_{\alpha\beta}^{-1} \{ E_{\alpha\lambda} C_\lambda + E_{\alpha\varepsilon} (C_\varepsilon - x_\varepsilon) + F_\alpha \} \\
&= j_\beta - t_\beta - A_{\beta\varepsilon} x_\varepsilon + h_\beta \text{-----} (8)
\end{aligned}$$

The principal constraints at the observation points of the problem are to be satisfied COD standards. Therefore, water quality constraints at observation points are

$$C_\beta \leq C_\beta^a \text{-----} (9)$$

where  $C_\beta^a$  is the allowable (standard) COD concentration. Substitute the equation (8) into equation (9), the constraints of this problem become :

$$A_{\beta\epsilon}x_{\epsilon} \geq j_{\beta} + t_{\beta} + h_{\beta} - C_{\beta}^a \quad \text{----- (10)}$$

or

$$A_{\beta\epsilon}X_{\epsilon} \geq b_{\beta} \quad \text{----- (10a)}$$

### The objective function

In case of the water pollution control in a river basin is studied, the objective function, which can be expressed by the sum of the operation cost of treatment plants in the region, is usually used. But in some cases that water pollution control in on estuary and a coastal zone is studied it may difficult how to choose the most suitable objective function.

In this paper, for sake of simplicity, the objective function is chosen to be a linear function of the form.

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_{j=1}^n w_j x_j \\ &= W^T x \quad \text{----- (11)} \end{aligned}$$

where  $W$  is an  $n$ -vector representing weight to estimate the rate of each municipality discharging wastes and  $J$  is the total value of COD concentration to reduce at the inflow points.

### Optimal Control Problem

The objective function and the constraints are presented as follows:

$$\min \sum_{j=1}^n w_j x_j \quad \text{----- (12)}$$

$$\text{subj. to } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{----- (13)}$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{----- (14)}$$

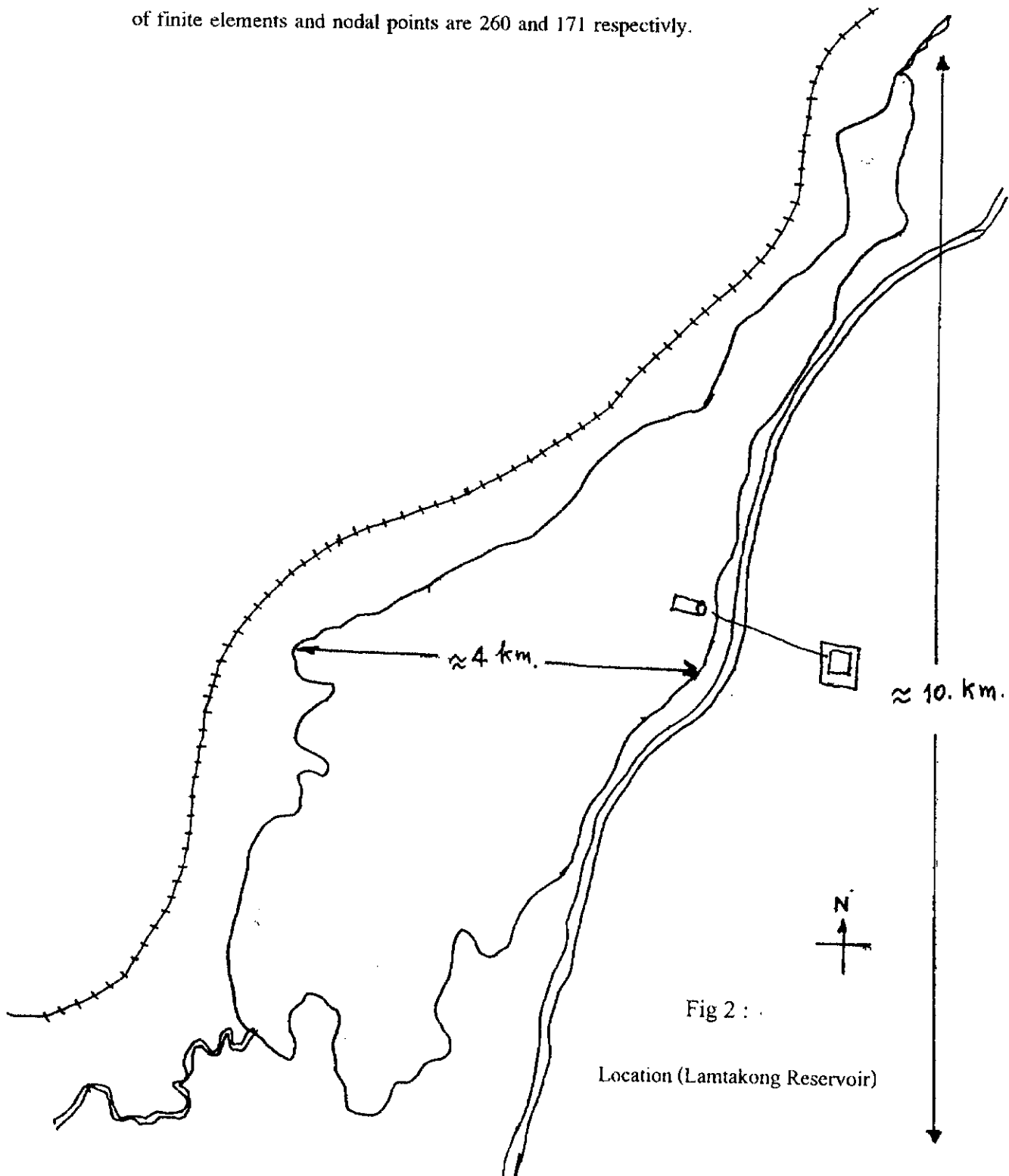
Where the equation (13) denotes the equation (10),  $l_j$  and  $u_j$  are the lower and the upper bounds of control variables which are treatment concentrations of COD,  $m$  is the number of observation points of water quality and  $n$  is the number of points of inflow.

Solving equations (12), (13) and (14) by simplex method. The optimal removal concentration  $x_j$  of the control inflow  $j$  are obtained.

### Application to Lamtakong Reservoir

A brief water quality assesment to Lamtakong reservoir is treated, of which configuration is shown in fig. 2. Lamtakong Reservoir is the typical nearly closed water area with the distance of about 10 km in the direction of south-north, with about 4 km widest in the direction east west, and about 0.4 km. narrowest, with the mean water depth of 8 m. There are not many points achieved the COD standards.

The finite element idealization used for analysis of COD is shown in Fig.3. The numbers of finite elements and nodal points are 260 and 171 respectively.



**Finite element discretization:** Eighteen points along the coastal line discharge effluent into Lamtakong Reservoir. The data of COD concentration including the effluent discharges of these points are summarize in Table,1. Flow velocities are known functions (Table 2). The first step, using of these data COD concentration in the domain at existing stage is calculated. As the boundary conditions, COD concentration is specified zero on the coast line boundary. The flux of concentration is also specified zero on the coast line boundary. The value of dispersion coefficients  $D_x$  and  $D_y$  is determined in terms of the numerical simulations. Table 2 summarizes the constants used in this computation.  $B_1 - B_8$  in fig.4 denote the observation points wich have to be reduced COD concentrations to less than 7.0 . We assume that the upper bound of the removal COD concentration at each inflow is 60% of the existing COD and the lower bound at each inflow is equal to zero.

Fig. 4 shows the concentration distribution of the COD at the existing stage, which violate the standards at several observation points. Using the above results, it is posible to formulate the optimal control problem that takes the standards COD satisfy and makes the appropriate objective function minimize. The weight  $W_j$  of the control inflows are given in table 1. Since COD concentration at the points  $E_4, E_6, E_7, E_{13}, E_{14}$  and  $E_{15}$  are less than the minimum of the control concentration at  $B_1 - B_8$  ( $5.0 \leq B_\beta \leq 7.0$ ), they are not considered as the control inflows.

**Table 2** Computational Data

$D_x$	2.5	$m^2/sec.$
$D_y$	2.5	$m^2/sec.$
R	1.0	$day^{-1}$
Q	0.0	mg/day

**Table 3** COD concentration regions (figures 4 and 5)

Region	COD concentration (mg/L)
1	0 - 3
2	3.1 - 5
3	5.1 - 7
4	7.1 - 9
5	9.1 - 11

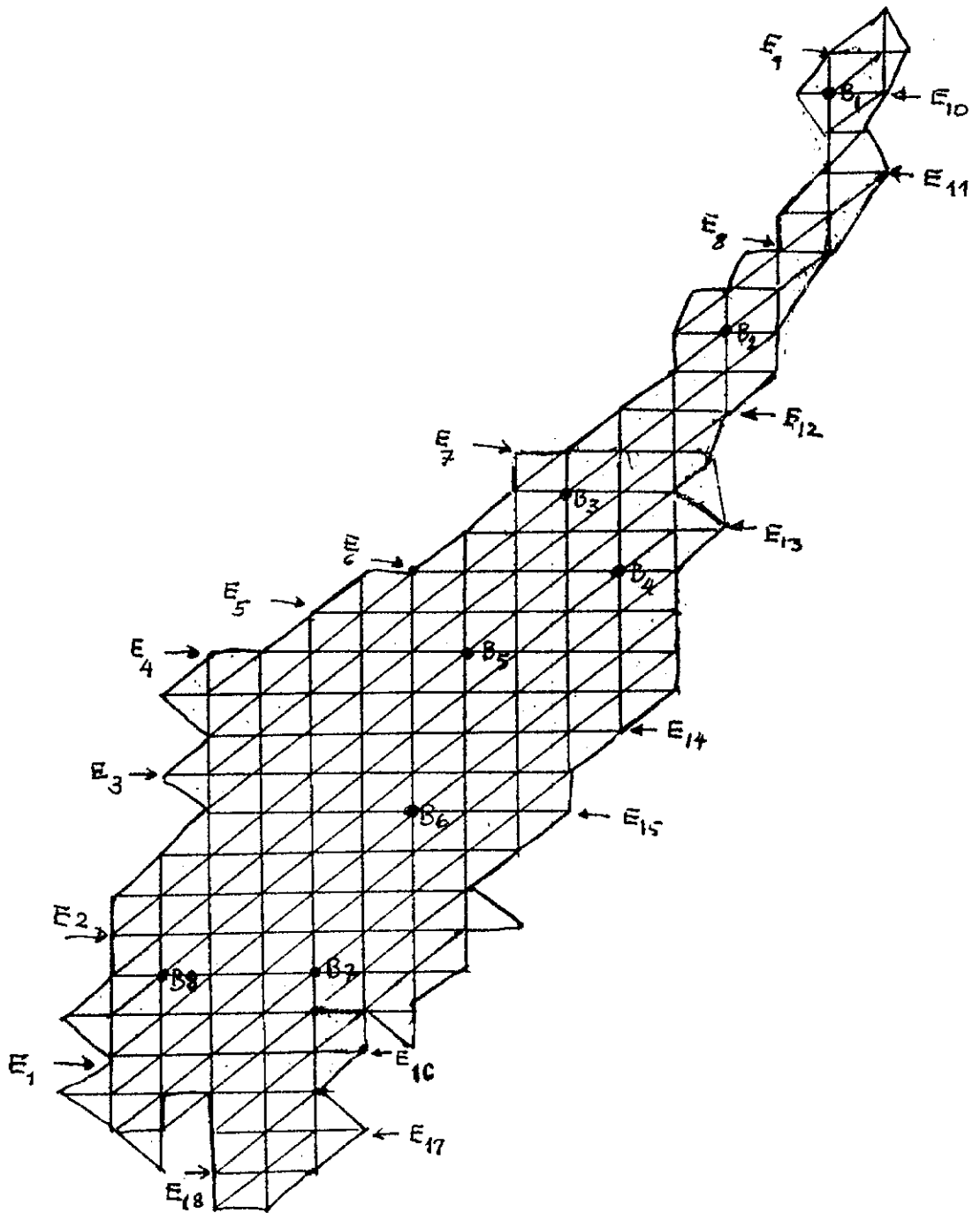


Fig 3 : Finite Element Discretization

Table 1 COD concentration, Weight and Computational Result at 18 points (E<sub>1</sub>-E<sub>18</sub>)

Inflow	E <sub>1</sub>	E <sub>2</sub>	E <sub>3</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>5</sub>	E <sub>6</sub>	E <sub>7</sub>	E <sub>8</sub>	E <sub>9</sub>
COD (mg/L)	9.2	6.3	4.6	3.6	4.2	4.0	7.2	8.3	8.5
W <sub>j</sub>	1.5	1.1	-	-	-	-	1.0	1.2	1.1
X <sub>g</sub> (mg/L)	1.7	1.1	-	-	-	-	0	1.0	1.2
Desirable COD (mg/L)	7.5	5.3	4.6	3.6	4.2	4.0	7.2	7.3	7.3

Inflow	E <sub>10</sub>	E <sub>11</sub>	E <sub>12</sub>	E <sub>13</sub>	E <sub>14</sub>	E <sub>15</sub>	E <sub>16</sub>	E <sub>17</sub>	E <sub>18</sub>
COD (mg/L)	9.2	10.0	9.4	2.0	2.5	3.0	9.5	10.5	11.3
W <sub>j</sub>	1.5	1.6	1.1	-	-	-	1.4	1.3	0.8
X <sub>g</sub> (mg/L)	1.6	1.8	1.5	-	-	-	1.3	1.8	2.5
Desirable COD (mg/L)	7.6	8.2	7.9	2.0	2.5	3.0	8.2	8.7	8.8

**Table 4** COD concentration at existing stage and after the control stage at the observation points ( $B_1 - B_8$ )

Observation points	COD concentration	
	Existing stage	After control stage
B		
$B_1$	9.5	7.0
$B_2$	8.5	6.5
$B_3$	6.5	5.0
$B_4$	8.0	6.5
$B_5$	9.2	7.0
$B_6$	8.2	6.3
$B_7$	9.5	7.0
$B_8$	7.5	6.5

Fig. 5 shows the concentration distribution of COD after the control of the inflow computed by the finite element method. The optimal removal COD concentration at each control inflow is shown in Table 1. According to the result, the COD concentration (less than 7.0 mg/L) are satisfied the observation points.

### Conclusions

A method of the water pollution control is presented. The formulation of the problem is based on the combination of linear programming and the finite element method. The model is assumed to be the steady state formulation. Further improvements to be extended to the unsteady state flow problem.

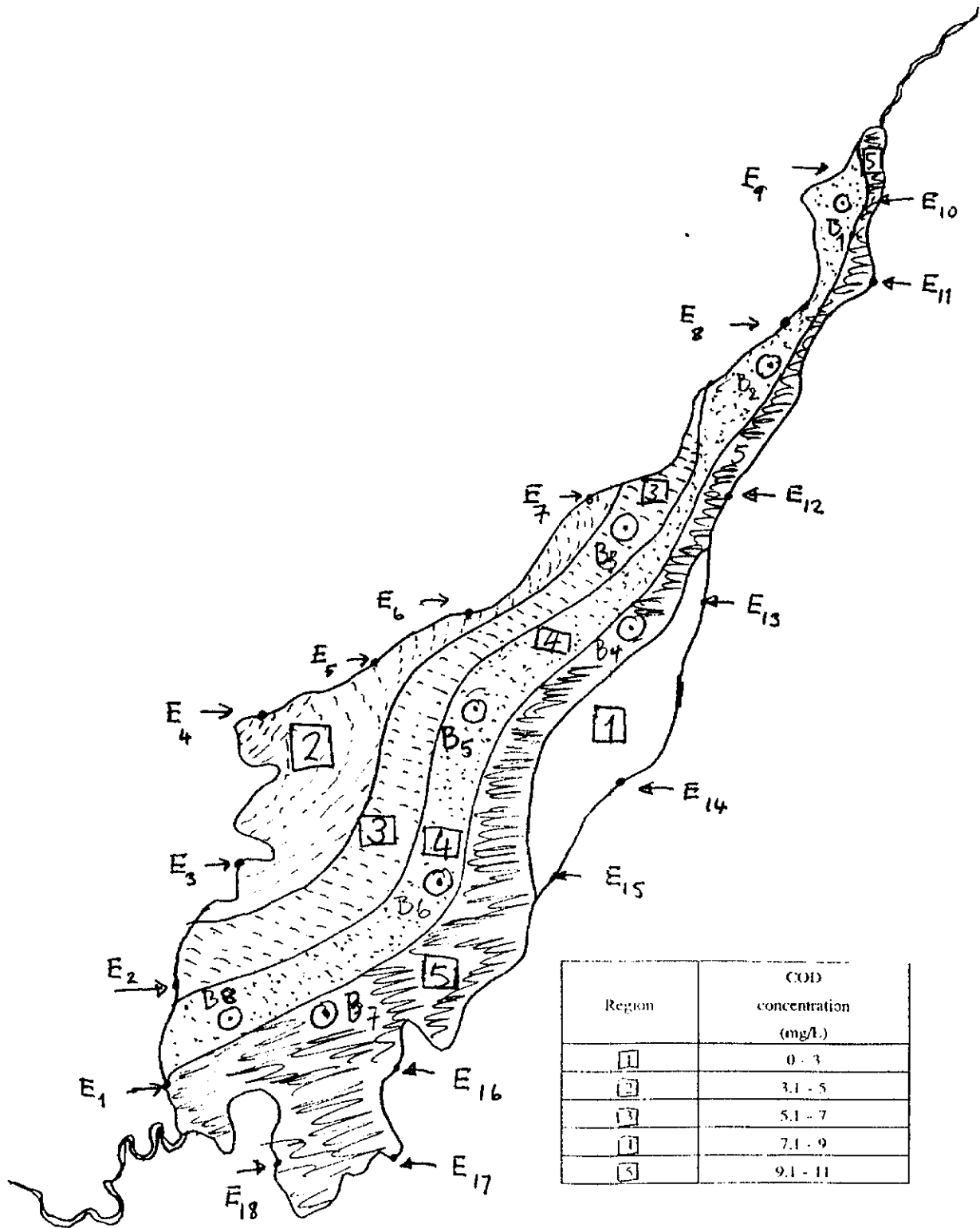


Fig 4 : COD Distribution at the existing stage



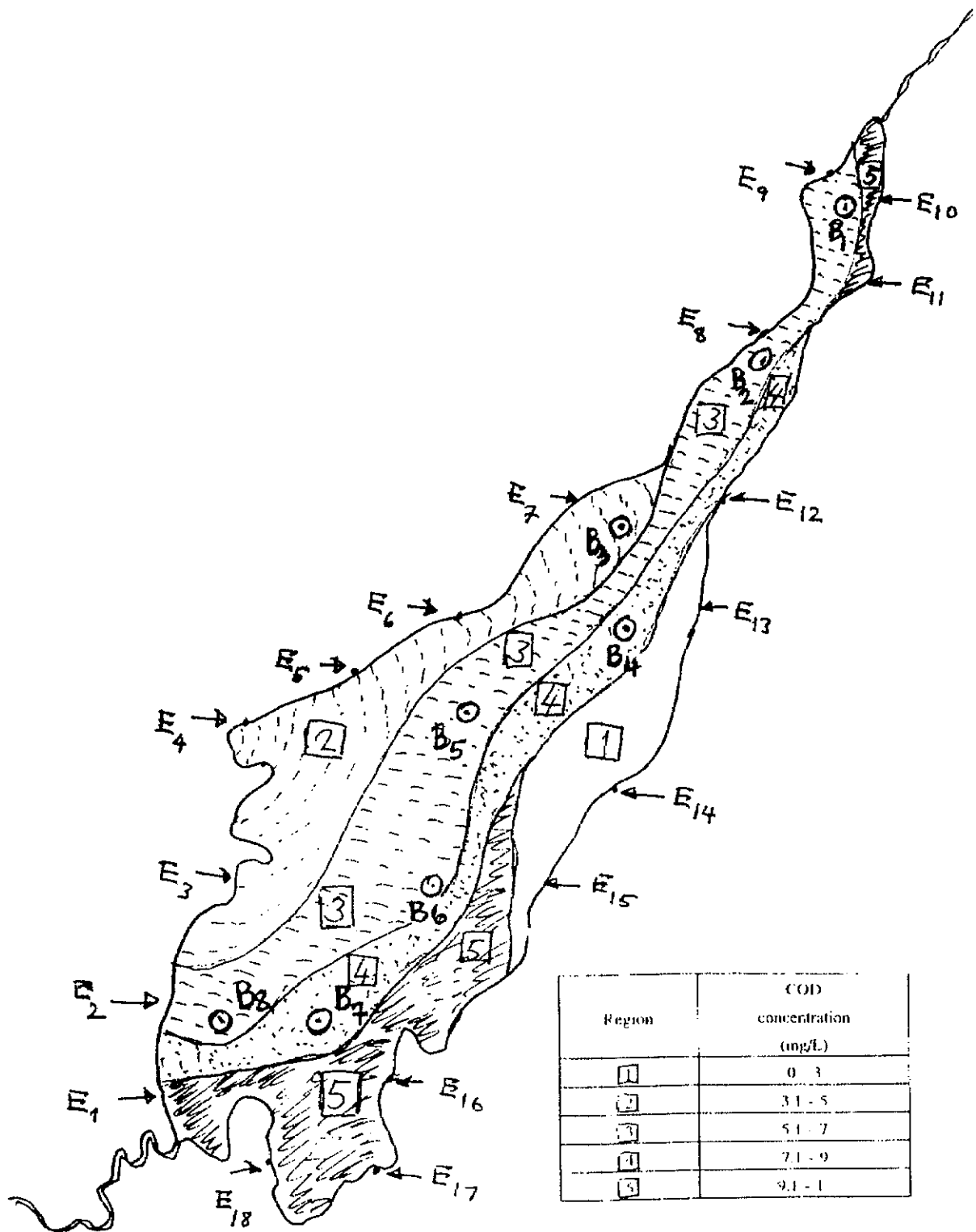


Fig 5 : COD Distribution after the control of inflow

## References

- [1.] Futagami, "The FE (Finite Element) and DP (Dynamic Programming) Method in Optimization of Field Problems." Finite Element Flow Analysis. University of Tokyo Press. pp. 717-724, 1982.
- [2.] Revelle.C.S. Loucks D.p and Lynn.W.R. Linear Programming Applied to Water Quality Management. Water Resources Research. Vol 4. No.1 1968 pp. 1-9.
- [3.] O. Fujiwara, and S. Ohgaki. "River Quality Management Under Stochastic Streamflow." Journal of the Environmental Engineering. ASCE, Vol. 112. No.2. 1986, pp. 185-198.
- [4.] G.B. Dantzing "Linear Programming and Extensions" Princeton Univ Press. 1963.
- [5.] S. Tangmanee, "Finite Element Method for Equation of Mixed Type, Associate with wave equations". SEAMS bulletin of Mathematics, vol 19, No.3 (1995), 87-94.
- [6.] S. Tangmanee, Finite Element Apporximation to a Model problem of Transonic Flow" ICTP, Trieste, Preprint IC/86/346.
- [7.] S. Tangmanee, "A Unified Numerical Approximation for Linear Differential Equations" Proceeding of the AMC 90 Hong Kong. pp. 452-462.
- [8.] รายงานฉบับสุดท้าย "โครงการการจัดการด้านสิ่งแวดล้อมเพื่อฟื้นฟูแหล่งน้ำบริเวณลุ่มน้ำลำตะคอง" เสนอจังหวัดนครราชสีมา บริษัท เอ็นไวรอนเมนทอล แคร้ เซ็นเตอร์ จำกัด ร่วมกับ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี มีนาคม 2539

# ประวัตินักวิจัย

ชื่อ-สกุล	นายสุวธรรม ถังมณี		
วัน เดือน ปี เกิด	22 ตุลาคม 2483		
การศึกษา	ปริญญาตรี	ทางคณิตศาสตร์	จาก จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
	ปริญญาโท	ทางคณิตศาสตร์	จาก จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
	ปริญญาเอก	คณิตศาสตร์ประยุกต์ (การวิเคราะห์เชิงตัวเลข, Numerical Analysis) จาก Trinity College, University of Dublin, Ireland, U.K.	

## ประวัติการทำงาน

- ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ พ.ศ. 2508 - 2535
- สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี พ.ศ. 2536 - ปัจจุบัน

ตำแหน่งทางวิชาการ                      รองศาสตราจารย์

## งานวิจัยที่ทำสำเร็จแล้ว

- ที่ได้ตีพิมพ์ในต่างประเทศ ทั้งในวารสารวิชาชีพและในการประชุมนานาชาติ 10 เรื่อง
- ที่ตีพิมพ์ในประเทศไทย 8 เรื่อง
- ที่ยังไม่ได้ตีพิมพ์ 2 เรื่อง

## งานวิจัยที่กำลังทำวิจัย

- โครงการเสริมสร้างและพัฒนาการวิจัยทางคณิตศาสตร์ในประเทศไทย
- แบบจำลองเชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาคาร์ไหลแทนที่ของของเหลวที่ไม่ผสมกัน  
กรณีโรงงานอุตสาหกรรมขุดเจาะน้ำมัน
- Unified Numerical Approximation to Differential Equations

## การงานพิเศษเชิงวิชาการนอกเหนือจากงานประจำ

- Associate Member, International Center for Theoretical Physics, ICTP. Trieste, Italy, 1982-1988.
- Director : Center for promotion of Mathematical Research of Thailand. พ.ศ. 2524-2530
- President : Southeast Asian Mathematical Society (SEAMS), 1994-1995.
- Chair person : Subcommittee "The Strengthening and Development of mathematics Research in Thailand", National Research Council of Thailand, 1993-present.
- Chief Editor : The Mathematical Review Journal of Thailand.