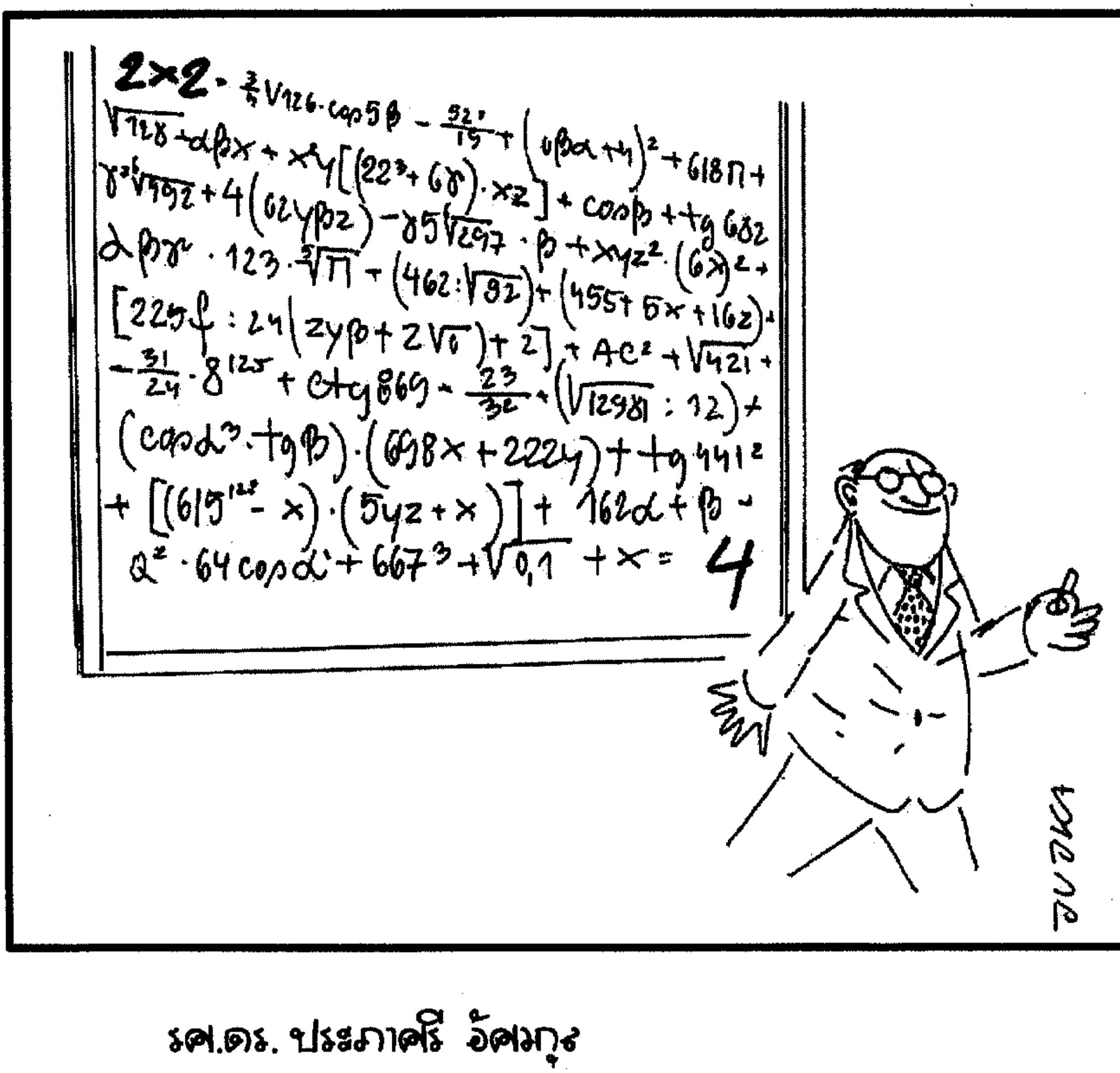
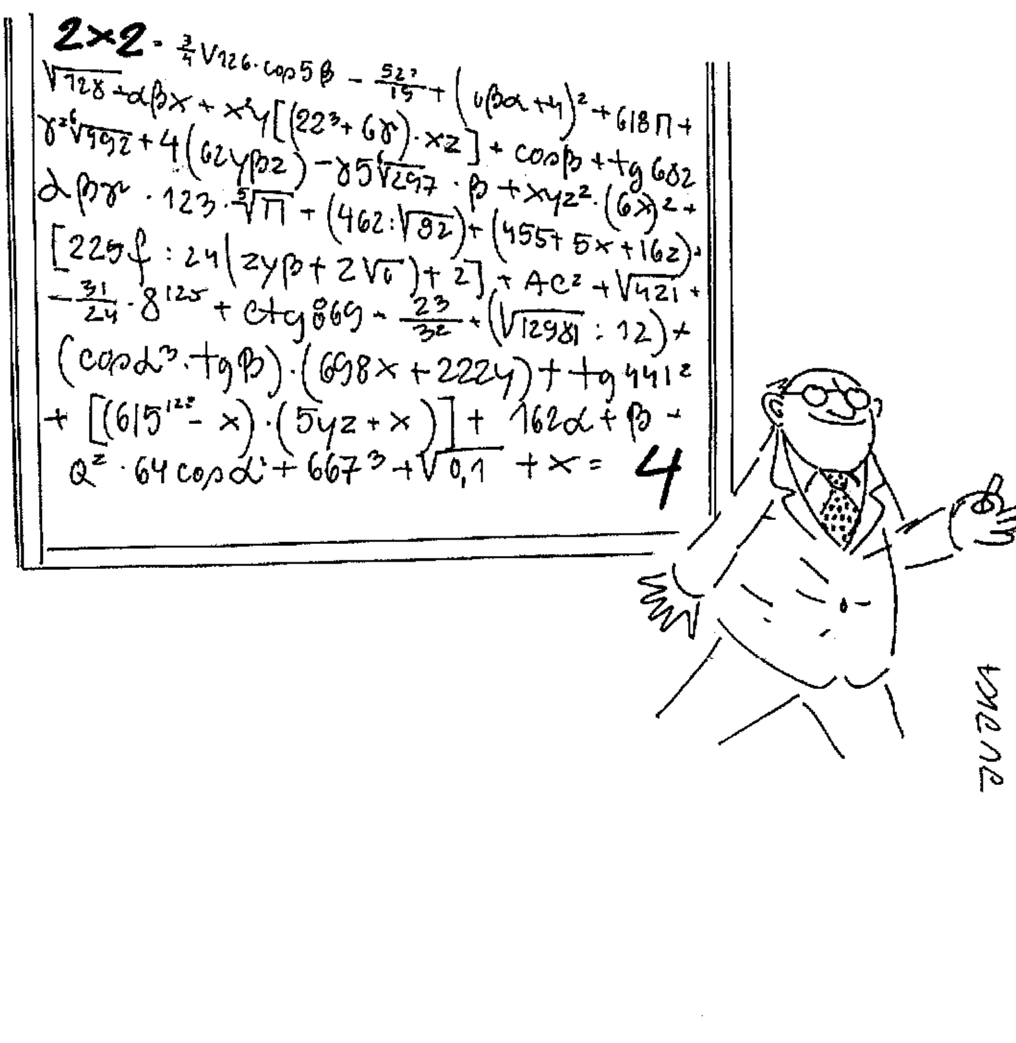
NUMERICAL METHODS FOR COMPUTER



รศ.ดร. ประภาศรี อัศวกุล
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

เอกสารประกอบการสอน

38.-



ภาพหน้าปกจาก http://www.pims.math.ca/pi/

คำนำ

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้รับการพัฒนาขึ้น เพื่อใช้เป็นอุปกรณ์ในการแก้ปัญหา ในกรณีที่ระเบียบวิธีเชิงทฤษฎีไม่สามารถครอบคลุมเงื่อนไขในปัญหาที่เกิดขึ้นได้ โดยเน้นความเป็นไปได้ ความเหมาะสม ความสามารถในการปรับแปลงให้ใช้ในสถานการณ์ต่างๆ ได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในปัจจุบันนี้ ต้องคำนึงความเป็นไปได้และเรื่องประสิทธิภาพ เมื่อนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาเขียนโปรแกรมเพื่อการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ ประการหลังนี้เองที่ทำให้เกิดแนวทางใหม่ของการวิจัยและพัฒนา นั่นคือ การคิดค้นเพื่อให้ได้มาซึ่งระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ที่สามารถนำมาเขียนโปรแกรมและมีความเหมาะสมกับสถาปัตยกรรมของคอมพิวเตอร์แบบต่างๆ กล่าวได้ว่า ความก้าวหน้าของเทคโนโลยีคอมพิวเตอร์มีอิทธิพลสำหรับทิศทางของการวิจัยและพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอย่างไม่หยุดยั้ง ความสำคัญคือ ระเบียบเชิงตัวเลขไม่ใช่สิ่งที่พัฒนาขึ้นให้อยู่บนแผ่นกระดาษเท่านั้น แต่ต้องสามารถปรับแปลงเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อทดสอบและพิสูจน์ความถูกต้องในการแก้ปัญหาได้

แนวทางและหลักการของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ใช้พัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลข มีรากฐานมาจากวิชาทางคณิตศาสตร์ระดับพื้นฐานถึงระดับสูง กล่าวคือ แคลคูลัส พีชคณิตเชิงเส้น สมการเชิงอนุพันธ์ การวิเคราะห์เชิงจริงและเชิงซ้อน โทโพโลยี (Topology) และการวิเคราะห์ฟังก์ชันนอล (Functional analysis) เป็นต้น โดยการผสมผสานทฤษฎีและสมบัติทางคณิตศาสตร์ในวิชาเหล่านี้ กล่าวได้ว่า ทฤษฎีและสมบัติทางคณิตศาสตร์ทำหน้าที่เป็นสถาปนิกออกแบบและผลิตระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่างๆ นอกจากนี้ยังมีการคิดค้นทฤษฎีใหม่ๆ อันเป็นผลสืบเนื่องจากการพัฒนาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยตรง เพื่อพิสูจน์เกี่ยวกับความสมเหตุสมผล (validity) การลู่เข้า (convergence) ความเสถียร (stability) ขอบเขตของค่าผิดพลาด(error bound) เป็นต้น ผลการพิสูจน์จากทฤษฎียังสามารถยืนยันโดยอาศัยการเปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ได้อีกด้วย

ผู้สอนจัดเตรียมเอกสารประกอบการสอนชุดนี้ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของเนื้อหาวิชาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับคอมพิวเตอร์ โดยครอบคลุมหัวข้อ การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น การหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตเชิงตัวเลข และการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ เพื่อให้นักศึกษาใช้เป็นแนวทางในการศึกษาหัวข้อเหล่านี้ และสามารถศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมจากแหล่งค้นคว้าอื่นๆ ผู้สอนหวังเป็นอย่างยิ่งว่านักศึกษาจะสามารถใช้หลักการและแนวทางของวิชานี้ในเกิดประโยชน์ในการค้นคว้าและแก้ปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ของนักศึกษาต่อไป

ประภาศรี อัศวกุล

9 กุมภาพันธ์ 2548

ภาพจากหนังสือ **LET NEWTON BE** โดย **Fauvel** ***et al*****., Oxford.**

ระบบสมการเชิงเส้น

Systems of linear equations

ระบบสมการเชิงเส้น n สมการ ของตัวไม่ทราบค่า (unknowns) n ตัว $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad (*)$$

ปัญหา หาค่าของ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ซึ่ง สอดคล้อง $(*)$

สัญกรณ์ เมทริกซ์ และ เวกเตอร์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

[illegible]

$$Ax = b \qquad (**)$$

การหาผลเฉลยของ $(**)$ แบ่งเป็น 2 วิธีใหญ่ ๆ คือ

1. Direct methods เป็นวิธีหาผลเฉลย x โดยใช้การดำเนินการ (operations) เป็นจำนวนจำกัดครั้ง

แนวคิด

$$Ax = b \qquad (1)$$

แปลงเป็น

$$A^* x = b^* \qquad (2)$$

โดยสมการ (2) หาค่า x ได้ "ง่าย"

เช่น A^* เป็น เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper tringular matrix)

เมทริกซ์เฉียง

กรณี A มีลักษณะ หรือมี "โครงสร้าง" พิเศษ

A เป็น "structured matrix"

A เป็นเมทริกซ์เฉียง (diagonal matrix)

เช่น

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$x_1 = \frac{4}{3}$ และ $x_2 = -\frac{5}{2}$

ระบบสมการคือ

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 \quad &= 4 \\ -2x_2 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

รูปทั่วไปคือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ผลเฉลยคือ

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$

A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม (triangular matrix)

เช่น

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ -x_2 &= 7 \end{aligned}$$

หรือเขียนในรูป

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{7}{-1} = -7$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(5 - 2x_2\right) = \frac{1}{3}\left(5 - 2(-7)\right) = -3$$

$\Rightarrow$ หาค่า x_2 ได้ก่อน แล้วจึงหาค่า x_1

เรียกว่า การแทนค่าย้อนหลัง (backward substitution)

P. Asawakun

รูปทั่วไป

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ & O & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ผลเฉลยหาค่าได้โดยการแทนค่า <u>ย้อนหลัง</u>

$$\Rightarrow \quad x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

เช่น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = b_3/a_{33}$$

$$x_2 = \left(b_2 - a_{23}x_3\right)/a_{22}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11}$$

<u>Algorithm</u> Back substitution

```
Back ( A, b, n, x )
x_n = b_n/a_nn
For i = n-1, n-2, ..., 1
    s = b_i
    For j = i+1, i+2, ..., n
        s = s - a_ij x_j
    end
    x_i = s/a_ii
end
```

<u>การบ้าน</u>

หา flops ของ backward substitution

ในทำนองเดียวกัน ถ้าระบบสมการอยู่ในรูป

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \\ \vdots & & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ใช้การแทนค่าข้างหน้า (forward substitution)

หาค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\Rightarrow \quad x_1 = b_1/a_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - a_{11}x_1)/a_{22}$$

$$\vdots$$

A อยู่ในรูปทั่วไป

วิธีกำจัดแบบเกาส์ (Gaussian elimination)

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855)

แนวคิด

A ถูกแปลงเป็น U (upper triangular)

$$Ax = b \longrightarrow Ux = b^*$$

ใช้การดำเนินการแบบแถว (row opereations)

(หรือ หาเมทริกซ์ B คูณทางซ้ายของ A แล้วให้ผลที่ได้เป็นดังนี้

$$BAx = Bb$$

และ $BA = U$)

การดำเนินการแบบแถว (Row operations)

1. การสลับแถว $\quad R_i \longleftrightarrow R_j$

   (แถว i สลับกับแถว j)

2. การคูณด้วยค่าคงที่ $\quad cR_i$

   (คูณแถว i ด้วยค่าคงที่ c)

3. การเอาตัวคูณของแถวหนึ่งรวมกับอีกแถวหนึ่ง

$$cR_i + R_j \longrightarrow R_j$$

R_i เป็นแถวตัวหลัก (pivotal row)

แถว R_j ถูกแทนใหม่

การดำเนินการแบบแถวทำเป็นระบบดังแผนภาพ

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x^1 & x^1 & x^1 \\ 0 & x^1 & x^1 & x^1 \\ 0 & x^1 & x^1 & x^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x^1 & x^1 & x^1 \\ 0 & 0 & x^2 & x^2 \\ 0 & 0 & x^2 & x^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x^1 & x^1 & x^1 \\ 0 & 0 & x^2 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} w + x + y + z &= 3 \\ 2w - x - y + 2z &= 12 \\ w + 3x - 2y - z &= -9 \\ -w - x + y + 4z &= 17 \end{aligned}$$

วิธีทำ (1) เขียน augmented matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & -9 \\ -1 & -1 & 1 & 4 & 17 \end{array}\right] \leftarrow \text{pivotal row}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 20 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \\ R_1 + R_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 20 \end{array}\right] \quad \frac{2}{3}R_2 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{21}{5} & \frac{84}{5} \end{array}\right] \quad \frac{2}{5}R_3 + R_4$$

$\Rightarrow$

$\frac{21}{5} z = \frac{84}{5} \Rightarrow z = 4$

$-5y - 2z = -8 \Rightarrow y = 0$

$-3x - 3y + 0 = 6 \Rightarrow x = -2$

$w + x + y + z = 3 \Rightarrow w = 1$

$\Rightarrow$ ผลเฉลยคือ $w = 1,\ x = -2,\ y = 0,\ z = 4$

Algorithm Forward elimination

```
Forward (A, b, n)
for k = 1 to n-1
    for i = k+1 to n
        l_ik = a_ik / a_kk
        for j = k+1 to n
            a_ij = a_ij - l_ik a_kj
        end
        b_i = b_i - l_ik b_k
    end
end
```

ผลของ Forward(A, b, n)

A อยู่ในรูป upper trinagular

b เป็นเวกเตอร์ใหม่ด้านขวามือ

หลังจากนั้น หาผลเฉลยโดย การแทนค่าย้อนหลัง

หมายเหตุ

1) ถ้าแถวสุดท้ายหลังจาก forward elimination อยู่ในรูป

$$\left[\,0\ 0 \cdots 0\ a^*_{nn} \;\middle|\; b^*_n\,\right]$$

นั่นคือ $\quad a^*_{nn} x_n = b^*_n$

$\Rightarrow$ ระบบสมการ $Ax = b$ มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว (unique solution)

$\det A \neq 0$

2) ถ้าแถวสุดท้ายหลังจาก forward elimination อยู่ในรูป

$$\left[\,0\ 0 \cdots 0\ 0 \;\middle|\; b^*_n\,\right]$$

โดย $b^*_n \neq 0$

$\Rightarrow \quad 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b^*_n$

$\Rightarrow \quad Ax = b$ ไม่มีผลเฉลย

P. Asawakun

การบ้าน จงแสดงว่า ระบบต่อไปนี้ ไม่มีผลเฉลย

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + y - 2z &= 1 \\ 3x \phantom{{}+y} - 7z &= 2 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง แสดงการหาตัวหลัก (pivot)

$$\begin{aligned} 2y + 3z &= 13 \\ x + y + z &= 6 \\ 2x \phantom{{}+y} + z &= 5 \end{aligned}$$

วิธีทำ

Augmented matrix คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \qquad \text{ตำแหน่ง } a_{11} = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \qquad R_1 \leftrightarrow R_2 \text{ (pivoting)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \end{array}\right] \qquad -2R_1 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \qquad R_2 + R_3$$

จุดอ่อนของ Forward elimination

เมื่อ ตัวหลัก $a_{kk} = 0$ หรือ

$|a_{kk}|$ มีค่าน้อยมาก ต้องหาตัวหลักใหม่

ใน column k

$$
\begin{bmatrix}
\times & \times & \times & \times & \cdots \\
0 & \times & \times & \times & \cdots \\
0 & 0 & \boxed{\times} & \times & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
0 & 0 & \times & &
\end{bmatrix}
$$

ถ้า $a_{kk} = 0$ แล้ว หาค่าที่ใหญ่ที่สุด

ใน column k จาก แถวที่ k+1 ถึง n

$$\boxed{a_{kk}} \longleftarrow \text{pivot} = 0$$

หา pivot ใหม่ $\left\{ \underbrace{\begin{matrix} a_{k+1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{matrix}}_{\text{column } k} \right.$

วิธีนี้ เรียกว่า

การหาตัวหลัก (pivoting)

P. Asawdan

เมื่อวิเคราะห์วิธีการกำจัดแบบเกาส์

จะเห็นว่า คือการแยกแฟกเตอร์

เมทริกซ์ A นั่นเอง จะได้

$$A = LU$$

เมื่อ L เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

และ U เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

$$
L = \begin{bmatrix}
1 & & & & \\
\ell_{21} & 1 & & O & \\
\ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \\
\ell_{n1} & \ell_{n2} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1
\end{bmatrix}
$$

ตัวอย่าง เขียนเมทริกซ์ A ในรูปผลคูณ LU

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ บันทึกตัวคูณ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 3 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีกำจัดแบบเกาส์ $(Ax = b)$

1) แยกแฟกเตอร์ A

$$A = LU$$

2) แก้สมการโดยการแทนค่าข้างหน้า

$$Ly = b$$

3) แก้สมการโดยการแทนค่าย้อนหลัง

$$Ux = y$$

$\Rightarrow$ ได้ผลเฉลย x

Flops ของวิธีกำจัดแบบเกาส์

$$\text{Flops} = \frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}$$

$\therefore$ n ใหญ่ๆ

$$\text{Flops} \propto \frac{2}{3} n^3$$

2. Iterative methods

วิธีทำซ้ำ เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$Ax = b$$

1) กำหนดค่าเริ่มต้น $x^{(0)}$

2) สร้างลำดับ $\{x^{(k)}\}$ ซึ่งประมาณผลเฉลยที่แท้จริง x

$$x^{(k)} \longrightarrow x$$

<u>แนวคิด</u> "decompose" "แยก" เมทริกซ์ A

$$A = E+F$$

$$\Rightarrow \quad (E+F)x = b$$

$$Ex = -Fx + b$$

$$x = -E^{-1}Fx + E^{-1}b$$

(ในทำนองเดียวกันกับวิธีหาราก ของ $f(x) = 0$ ซึ่งจัดปัญหาในรูป หา fixed point

$$x = g(x)$$)

ดังนั้น วิธีการสร้างลำดับ $\{x^{(k)}\}$ ใช้ recurrence relation

$$x^{(k+1)} = -E^{-1}Fx^{(k)} + E^{-1}b, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

วิธีทำซ้ำแต่ละวิธี จึงแตกต่างกัน ตามลักษณะการแยกเมทริกซ์ A ในรูป

$$A = E + F$$

ตัวอย่าง (Wood)

$$\begin{aligned} 5x - y &= 3 \\ -x + 10y &= 19 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 19 \end{bmatrix}$$

"แยก" A ในรูป $A = E + F$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}, \quad E^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 \\ -1/10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}b = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 19/10 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น สูตร recurrence คือ

$$x^{(k+1)} = -\begin{bmatrix} 0 & -1/5 \\ -1/10 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} 3/5 \\ 19/10 \end{bmatrix}$$

ให้ $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ จะได้

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.9 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 1.96 \end{bmatrix} \quad \cdots$$

จะเห็นว่า

$$x^{(k)} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง เป็นตัวอย่างเดิม แต่ สลับ สมการ เป็น

$$\begin{aligned} -x + 10y &= 19 \\ 5x - y &= 3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 19 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad E^{-1}b = \begin{bmatrix} -19 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ สูตร recurrence คือ

$$x^{(k+1)} = -\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + \begin{bmatrix} -19 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ให้ $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} -19 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 11 \\ 98 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 961 \\ 52 \end{bmatrix}$$

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} -539 \\ -4802 \end{bmatrix} \quad \ldots \text{ ลู่ออก}$$

วิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อน

ให้ $e^{(k+1)} = x - x^{(k+1)}$

เพราะว่า

$$x = -E^{-1}Fx + E^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = -E^{-1}Fx^{(k)} + E^{-1}b$$

$$\Rightarrow \quad x - x^{(k+1)} = -E^{-1}F(x - x^{(k)})$$

$$e^{(k+1)} = -E^{-1}F\,e^{(k)}$$

ต้องการให้ $e^{(k+1)} \to 0$ (เวกเตอร์ศูนย์)

นั่นคือ "ขนาด" ของเวกเตอร์ $e^{(k+1)}$ ต้อง...

หรือ

ขนาดของ $e^{(k+1)}$ ต้องน้อยกว่า ขนาดของ $e^{(k)}$

ขนาดของ "เวกเตอร์" วัดอย่างไร ?

ขนาดของ "เมทริกซ์" วัดอย่างไร ?

เรียก ขนาด ของ เวกเตอร์ หรือ เมทริกซ์ ว่า นอร์ม (norm) เขียนแทนด้วย

$\|x\|$, $\|A\|$

นอร์มของเวกเตอร์ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ เช่น

1) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

2) $\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$

3) $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

นอร์มของเมทริกซ์ $A = (a_{ij})$ เช่น

1) $\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

2) $\|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma(A^*A)}$

3) $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

ตัวอย่าง

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \|x\|_1 &= |1|+|2|+|-5| \\ &= 8 \\ \|x\|_2 &= \left(1^2+2^2+(-5)^2\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{30} \\ \|x\|_\infty &= \max\left(|1|,|2|,|-5|\right) \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \|x\|_1 &= 6 \\ \|x\|_2 &= \sqrt{14} \\ \|x\|_\infty &= 3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \|A\|_1 &= 6 \\ \|A\|_\infty &= 7 \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \|B\|_1 &= 6 \\ \|B\|_\infty &= 7 \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \|C\|_1 &= 10 \\ \|C\|_\infty &= 9 \end{aligned}$$

นอร์ม ต้องมีสมบัติต่อไปนี้

(1) $\|x\| \geq 0$

(2) $\|x\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ x เป็นเวกเตอร์ศูนย์

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$ สำหรับสเกลาร์ α ใด ๆ

(4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

และ $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$ (*)

(*) $\Rightarrow$ $\|Ax\|_1 \leq \|A\|_1 \|x\|_1$

$\|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty$

P. Acawah....

ตัวอย่าง

$$A=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix},\quad Ax=\begin{bmatrix}13\\ -5\end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 6,\quad \|x\|_\infty = 3,\quad \|Ax\|_\infty = 13$$

$$\|Ax\|_\infty = 13 \le \|A\|_\infty \|x\|_\infty = (6)(3) = 18$$

ใช้อสมการ $\|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty \|x\|_\infty$

กับการวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อน

จาก $\quad e^{(k+1)} = -E^{-1}F e^{(k)}$

$$\Rightarrow \|e^{(k+1)}\|_\infty = \|-E^{-1}F e^{(k)}\|_\infty$$

$$\le \|E^{-1}F\|_\infty \|e^{(k)}\|_\infty$$

ดังนั้น ถ้า $\|E^{-1}F\|_\infty < 1$ แล้ว

$$\|e^{(k+1)}\|_\infty < \|e^{(k)}\|_\infty$$

เงื่อนไข

$$\boxed{\|E^{-1}F\| < 1}$$

ใช้กับนอร์มทุกชนิด

จะทำให้

ค่าคลาดเคลื่อน ลดลง ในแต่ละ

รอบของการคำนวณ

จากตัวอย่าง

$$\left.\begin{aligned} 5x - 10y &= 3 \\ -x + 10y &= 19 \end{aligned}\right\}$$

$$E^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 \\ -1/10 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \|E^{-1}F\|_\infty = \frac{1}{5} < 1$

$\Rightarrow \{x^{(k)}\}$ ลู่เข้า

จากตัวอย่าง

$$\left.\begin{aligned} -x + 10y &= 19 \\ 5x - 10y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$$E^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \|E^{-1}F\|_\infty = 10 > 1$

$\Rightarrow \{x^{(k)}\}$ ลู่ออก

<u>สรุป</u> Iterative methods สำหรับ

หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$Ax = b$$

(1) แยก $A = E + F$ โดย

$$\|E^{-1}F\| < 1$$

(2) สูตรการคำนวณ

$$x^{(k+1)} = -E^{-1}Fx^{(k)} + E^{-1}b$$

(3) เงื่อนไข $\|E^{-1}F\| < 1$

ทำให้ $\{x^{(k+1)}\}$ ลู่เข้าหาผลเฉลย

หรือ $\|e^{(k+1)}\| \longrightarrow 0$

วิธีทำซ้ำ Gauss-Jacobi
(Gauss-Jacobi Iterative Method)

ปัญหา หาผลเฉลยของ

$$Ax = b$$

แนวคิดของวิธีทำซ้ำ G-J

(1) แยก A เป็นรูป

$$A = D + L + U$$

(2)

$$(D+L+U)x = b$$

$$Dx = -(L+U)x + b$$

$$x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

(3) เขียนสูตรวิธีทำซ้ำ G-J ดังนี้

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

เขียนสูตรในรายละเอียดได้ดังนี้

จากสมการ $Ax = b$ เขียนสมาชิกในแนวเฉียงของ A ไว้ข้างหนึ่งของสมการ

$$\begin{aligned}
\underline{a_{11}x_1} + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \underline{a_{22}x_2} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + \underline{a_{nn}x_n} &= b_n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 &= -a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1 \\
a_{22}x_2 &= -a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2 \\
&\vdots \\
a_{nn}x_n &= -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + b_n
\end{aligned}$$

ทำให้ได้สูตรวิธีทำซ้ำ Gauss-Jacobi ดังนี้

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n-1,n}x_{n-1}^{(k)}\right]$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด n×n แล้วสูตรวิธีทำซ้ำ Gauss-Jacobi เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$Ax = b$$

คือ

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]$$

$i = 1, 2, \ldots, n$

เงื่อนไขในการหยุดคำนวณ คือ

$$\frac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|_\infty}{\| x^{(k)} \|_\infty} < \varepsilon$$

หรือ

$$k > itmax$$

itmax = จำนวนรอบสูงสุดที่กำหนดไว้

วิเคราะห์การลู่เข้าของวิธีทำซ้ำ Gauss-Jacobi

จากสูตร

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$\Rightarrow$ วิธีนี้ลู่เข้า ถ้า

$$\|D^{-1}(L+U)\| < 1$$

พิจารณาจากกรณี A ขนาด 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|D^{-1}(L+U)\|_\infty = ?$$

ดังนั้น $\|D^{-1}(L+U)\|_\infty < 1$ เมื่อ

$$\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| < 1$$

$$\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| < 1$$

$$\left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |a_{12}| + |a_{13}| < |a_{11}|$$

$$|a_{21}| + |a_{23}| < |a_{22}|$$

$$|a_{31}| + |a_{32}| < |a_{33}|$$

นั่นคือ ในแต่ละแถวของเมทริกซ์ A ค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกในแนวเฉียง ต้องมี**ค่ามากกว่า**ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกที่เหลือในแถวนั้นๆ สมบัตินี้มีชื่อเรียกว่า

"diagonally dominant"

จากตัวอย่าง

(1) $5x - y = 3$

$-x + 10y = 19$

$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow$ A เป็นเมทริกซ์แบบ diagonally dominant

(2) $-x + 10y = 19$

$5x - y = 3$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ A ไม่เป็นแบบ diagonally dominant

ตัวอย่าง จงใช้วิธีการใช้วิธีทำซ้ำ Gauss-Jacobi หาผลเฉลยของ

$$5x_1 - x_2 = 3$$
$$-x_1 + 10x_2 = 19$$

วิธีทำ

$$5x_1 = 3 + x_2$$
$$10x_2 = 19 + x_1$$

$\Rightarrow$ สูตร G-J คือ

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(3 + x_2^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(19 + x_1^{(k)}\right)$$

ให้ $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ คำนวณได้ผลดังนี้

$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{19}{10} \end{bmatrix}, \ldots, \; x^{(7)} = \begin{bmatrix} 0.999997 \\ 1.999999 \end{bmatrix}$

$x^{(8)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง จงใช้วิธีทำซ้ำ Gauss-Jacobi หาผลเฉลยของ

$$Ax = b$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ A เป็นแบบ diagonally dominant

คำนวณ $-D^{-1}(L+U)$ ได้

$$-D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -.3 & -.1 \\ .2 & 0 & .3 \\ -.1 & -.3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.5 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

$$\|D^{-1}(L+U)\|_\infty = 0.5$$

$\Rightarrow$ วิธีทำซ้ำ G-J ทำให้

$$\|e^{(k+1)}\|_\infty < 0.5\|e^{(k)}\|_\infty, \quad k \geq 0$$

สูตรการคำนวณวิธี G-J ในรูปเมทริกซ์ คือ

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

ผลการคำนวณได้คือ

$$x^{(5)} = \begin{bmatrix} 1.01159 \\ 0.99530 \\ 1.01159 \end{bmatrix}, \quad x^{(6)} = \begin{bmatrix} 1.000251 \\ 1.005795 \\ 1.000251 \end{bmatrix}$$

เปรียบเทียบกับผลเฉลยที่แท้จริง

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$e^{(5)} = x - x^{(5)} = \begin{bmatrix} -.01159 \\ .00470 \\ -.01159 \end{bmatrix}$$

$$e^{(6)} = x - x^{(6)} = \begin{bmatrix} -.000251 \\ -.005795 \\ -.000251 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|e^{(5)}\|_\infty = .01159$$

$$\|e^{(6)}\|_\infty = .005795$$

และ

$$\frac{\|e^{(6)}\|_\infty}{\|e^{(5)}\|_\infty} \approx 0.5$$

ซึ่งสอดคล้องตามที่วิเคราะห์ไว้

ตัวอย่าง จงใช้วิธีของ Gauss-Jacobi หา
ผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 \quad &= 6 \\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\
3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15
\end{aligned}$$

(ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $x = (1, 2, -1, 1)^T$)

ให้ $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$

วิธีทำ สูตร G-J คือ

$$x_1 = \frac{1}{10}\left(6 + x_2 - 2x_3\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{11}\left(25 + x_1 + x_3 - 3x_4\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{10}\left(-11 - 2x_1 + x_2 + x_4\right)$$

$$x_4 = \frac{1}{8}\left(15 - 3x_2 + x_3\right)$$

เงื่อนไขการหยุดคำนวณคือ

$$\frac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|_\infty}{\| x^{(k)} \|_\infty} < 10^{-3}$$

ได้ผลคำนวณคือ

$$x^{(9)} = (0.9997, 2.0004, -1.0004, 1.0006)^T$$

$$x^{(10)} = (1.0001, 1.9998, -0.9998, 0.9998)^T$$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ

$$x = (1, 2, -1, 1)^T$$

Gaussian Elimination

Algorithm Back substitution

Back(A, b, n, x)

$x_n = b_n / a_{nn}$

for i = n-1, n-2, … , 1

  $s = b_i$

  for j = i+1, i+2, …, n

    $s = s - a_{ij} x_j$

  end

  $x_i = s / a_{ij}$

end

Algorithm Forward elimination

Forward(A, b, n)

for k = 1 to n-1

  for i = k+1 to n

    $l_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$

    for j = k+1 to n

      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} a_{kj}$

    end

    $b_i = b_i - l_{ik} b_k$

  end

end

Algorithm Forward elimination with partial pivoting

Forward - pivoting(A, b, n)

for k = 1 to n-1

  p = k

  for i = k+1 to n

    if $|a_{ik}| > |a_{pk}|$ then p = i

  end

  if p > k then

    for j = k to n

      $t = a_{kj}$, $a_{kj} = a_{pj}$, $a_{pj} = t$

    end

    $t = b_k$, $b_k = b_p$, $b_p = t$

  end

  for i = k+1 to n

    $l_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$

    for j = k+1 to n

      $a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} a_{kj}$

    end

    $b_i = b_i - l_{ik} b_k$

  end

end

Operation Count

Back substitution : Flops = n^2

Forward elimination : Flops = $\dfrac{4n^3 + 3n^2 - 7n}{6}$

Gaussian elimination : Flops = $\dfrac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}$

ถ้า n มีขนาดใหญ่ แล้ว Flops $\approx \dfrac{2n^3}{3}$

วิธีทำซ้ำ Gauss-Seidel

ปัญหา หาผลเฉลยของ

$$Ax = b$$

แนวคิด ปรับจากวิธี Gauss-Jacobi โดย
โดยใช้ค่าที่คำนวณได้ในแต่ละรอบในการแทนค่าหาสมาชิกตัวถัดไปของเวกเตอร์ $x^{(k+1)}$ ทันที

นั่นคือ เมื่อคำนวณ $x_1^{(k+1)}$ เสร็จ
ใช้ $x_1^{(k+1)}$ นี้คำนวณ $x_2^{(k+1)}$

วิธีทำซ้ำ Gauss-Seidel

(1) แยก A ในรูป

$$A = D + L + U$$

(2)

$$(D+L+U)x = b$$

$$(D+L)x = -Ux + b$$

(3) สูตรวิธีทำซ้ำ Gauss-Seidel คือ

$$(D+L)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b$$

หรือ

$$Dx^{(k+1)} = -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + b$$

ดังนั้น สูตรของสมาชิกแต่ละตัว คือ

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right]$$

สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

กรณี A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3

สูตรวิธีทำซ้ำ Gauss-Seidel คือ

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}\right]$$

ตัวอย่าง จงใช้วิธีทำซ้ำ Gauss-Seidel หาผลเฉลยของ

$$5x_1 - x_2 = 3$$
$$-x_1 + 10x_2 = 19$$

วิธีทำ

$$5x_1 = 3 + x_2$$
$$10x_2 = 19 + x_1$$

$\Rightarrow$ สูตร G-S คือ

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}\left(3 + x_2^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(19 + x_1^{(k+1)}\right)$$

ให้ $x^{(0)} = (0,0)^T$ ผลการคำนวณคือ

$$x^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.999997 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง จงใช้วิธีทำซ้ำ Gauss-Seidel หาผลเฉลยของ $Ax = b$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ สูตร G-S คือ

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(14 - 3x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{10}\left(-5 - 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)}\right)$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(14 - x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)}\right)$$

ผลคำนวณในรอบที่ 5, 6 ได้

$$x^{(5)} = (.999792, .999848, 1.000066)^T$$
$$x^{(6)} = (1.000039, 1.000028, .999988)^T$$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $x = (1, 1, 1)^T$

$$\frac{\|e^{(6)}\|_\infty}{\|e^{(5)}\|_\infty} \approx 0.19$$

<u>สรุป</u> วิธีหลักๆ สำหรับหาผลเฉลยของ

$$Ax = b$$

1. Direct method เช่น วิธีกำจัดแบบ Gauss หรือ LU factorization

2. Iterative method เช่น

   วิธีทำซ้ำ Gauss - Jacobi

   วิธีทำซ้ำ Gauss - Seidel

   และวิธีอื่นๆ ที่ควรศึกษาเพิ่มเติม เช่น

   วิธี SOR : successive over-relaxation

<u>วิธี G-J</u>

$$A = D + L + U$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

<u>วิธี G-S</u>

$$A = D + L + U$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}L\,x^{(k+1)} - D^{-1}U x^{(k)} + D^{-1}b$$

ภาพจาก T-shirt ของ AMS

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

ปัญหา สำหรับฟังก์ชัน f ต้องหาค่าของ $f'(x_0)$

แนวคิด ถ้าทราบสูตรของ f แล้ว อาจหาสูตรของ f' ได้ ถ้า f ไม่ซับซ้อนเกินไป

ถ้ามีข้อมูลของ f เป็นลักษณะเซตของค่าฟังก์ชัน ดังนี้

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

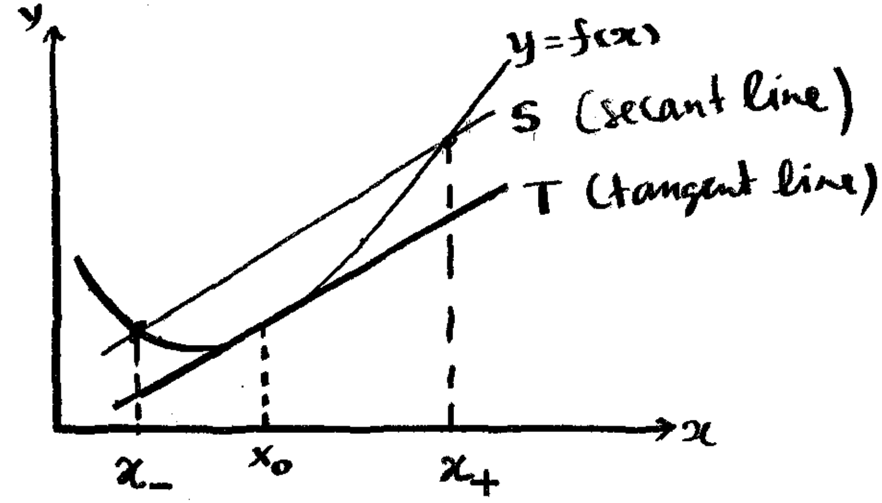
จะหาอนุพันธ์ของ f ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งได้อย่างไร

จากนิยาม

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

การประมาณอนุพันธ์



ความชันของเส้นสัมผัส T คือ $f'(x_0)$

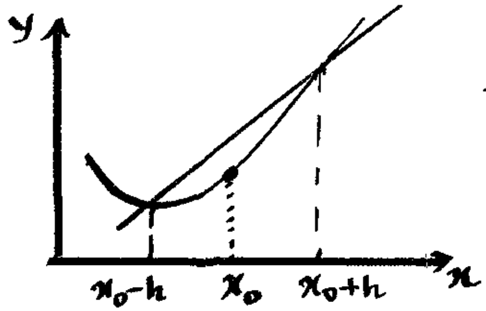
ความชันของเส้นตัดกราฟ S คือ

$$\frac{f(x_+) - f(x_-)}{x_+ - x_-}$$

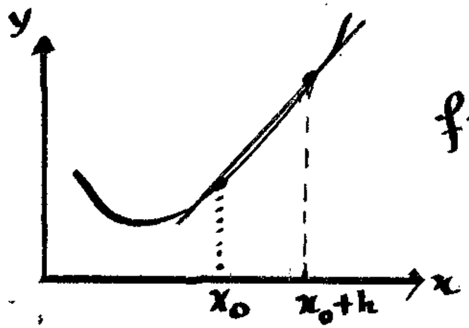
จากรูป S ขนานกับ T

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = \frac{f(x_+) - f(x_-)}{x_+ - x_-}$$

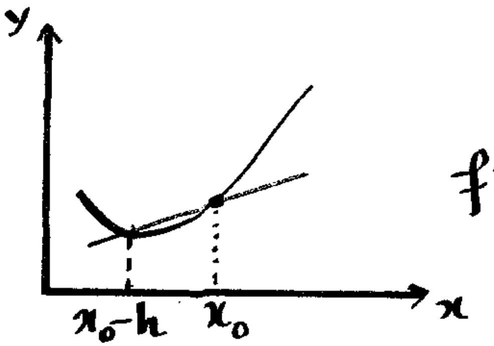
ทำให้ได้แนวคิด ดังนี้



$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$



$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

ข้อมูล (Data)

ฟังก์ชัน: $y = f(x)$

nodes: ค่า x แบบ "equispaced"

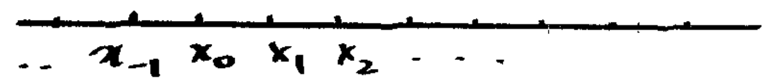
$$\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$$

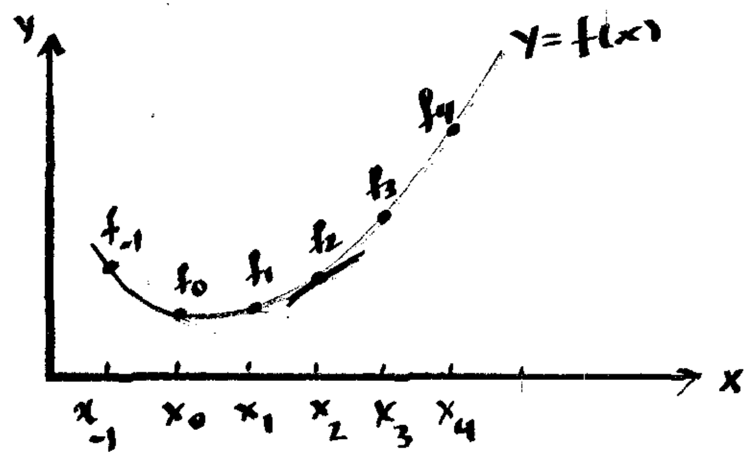
step size: h

$$\Rightarrow \quad x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ค่าฟังก์ชัน:

$$f_i = f(x_i)$$





ตัวดำเนินการผลต่าง (Difference operators)

1. ตัวดำเนินการผลต่าง<u>ข้างหน้า</u> Δ
(Forward difference operator)

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

2. ตัวดำเนินการผลต่าง<u>ย้อนหลัง</u> ∇
(Backward difference operator)

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

3. ตัวดำเนินการผลต่าง<u>กลาง</u> δ
(Central difference operator)

$$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}$$

ความสัมพันธ์ของ Δ, ∇, δ

$$\Delta f_i = \nabla f_{i+1} = \delta f_{i+\frac{1}{2}}$$

P. Asavadam

ผลต่างอันดับสอง

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) = \Delta(f_{i+1} - f_i) \\
&= \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \\
&= (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) \\
&= f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f_i &= \nabla(\nabla f_i) \\
&= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}
\end{aligned}$$

$$\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$$

ผลต่างอันดับสูง

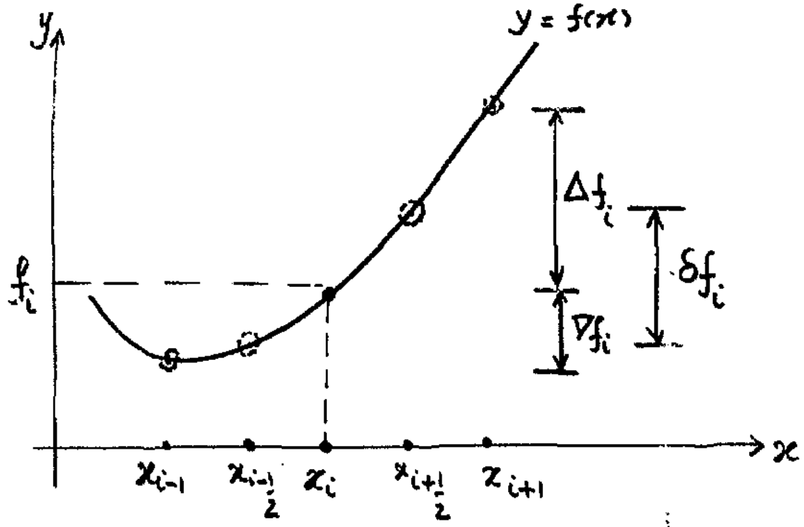
$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1}(\Delta f_i) = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$$

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1}(\nabla f_i) = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}$$

$$\delta^k f_i = \delta^{k-1}(\delta f_i) = \delta^{k-1} f_{i+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{i-\frac{1}{2}}$$

$k = 1, 2, 3, \ldots$

$k = 0.\quad \Delta^0 f_i = \nabla^0 f_i = \delta^0 f_i = f_i$



$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$$

$$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}$$

P. Arawaka

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข

ค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณ $f'(x_0)$ จากสูตรทั้งสาม วิเคราะห์ได้โดยการเขียน Taylor polynomial ของ f รอบจุด x_0

1. สูตรผลต่างข้างหน้า

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_+)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f_0}{h}$$

$\Rightarrow$ เทอมที่ถูกตัดทิ้งคือ $-\frac{h}{2} f''(\xi_+)$

$\Rightarrow$ truncation error $\propto h$

2. สูตรผลต่างย้อนหลัง

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_-)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = \frac{\nabla f_0}{h}$$

$\Rightarrow$ เทอมที่ถูกตัดทิ้งคือ $\frac{h}{2} f''(\xi_-)$

$\Rightarrow$ Truncation error $\propto h$

3. สูตรผลต่างกลาง

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_+) \qquad (1)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_-) \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ จาก (1) และ (2)

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} \frac{[f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)]}{2}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \frac{\delta f_{0+\frac{1}{2}}}{2h}$$

และ truncation error $\propto h^2$

P. Asawakun

ค่า h ที่เหมาะที่สุด

สมมติว่า

$$f(x_0+h) = f_1 + e_1$$

$$f(x_0-h) = f_{-1} + e_{-1}$$

เมื่อ e_1 และ e_{-1} เป็นค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (round-off errors)

ถ้าประมาณ $f'(x_0)$ ด้วยสูตรผลต่างกลาง

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

แล้วค่าคลาดเคลื่อนทั้งหมด

$$\begin{aligned} E_{total}(f,h) &= E_{round}(f,h) + E_{trunc}(f,h) \\ &= \frac{e_1 - e_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi) \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้ากำหนดให้

$$|e_{-1}| \le \varepsilon \quad \text{และ} \quad |e_1| \le \varepsilon$$

และ $$M = \max_{a \le x \le b} |f'''(x)|$$

แล้ว

$$|E_{total}(f,h)| \le \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M$$

ให้

$$g(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M$$

จะได้ว่า $g(h)$ มีค่าต่ำสุด เมื่อ

$$h = \left(\frac{3\varepsilon}{M}\right)^{1/3}$$

ซึ่งก็คือค่า h หรือ step size ที่เหมาะที่สุด เมื่อประมาณ $f'(x_0)$ ด้วยสูตรผลต่างกลาง

การประมาณอนุพันธ์อันดับสอง

สัญลักษณ์: $x_{-1} = x_0 - h$, x_0, $x_1 = x_0 + h$

$$f_{-1} = f(x_0-h),\quad f_0 = f(x_0),\quad f_1 = f(x_0+h)$$

เขียน Taylor polynomial ของ f รอบจุด x_0

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_+) \qquad (1)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_-) \qquad (2)$$

เมื่อ $x_0 - h < \xi_- < x_0 < \xi_+ < x_0 + h$

$(1)+(2) \Rightarrow$

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(\xi)$$

เมื่อ $f^{(4)}(\xi) = \dfrac{f^{(4)}(\xi_+) + f^{(4)}(\xi_-)}{2}$

ดังนั้น

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$$

และ เทอมที่ถูกตัดทิ้ง คือ

$$-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

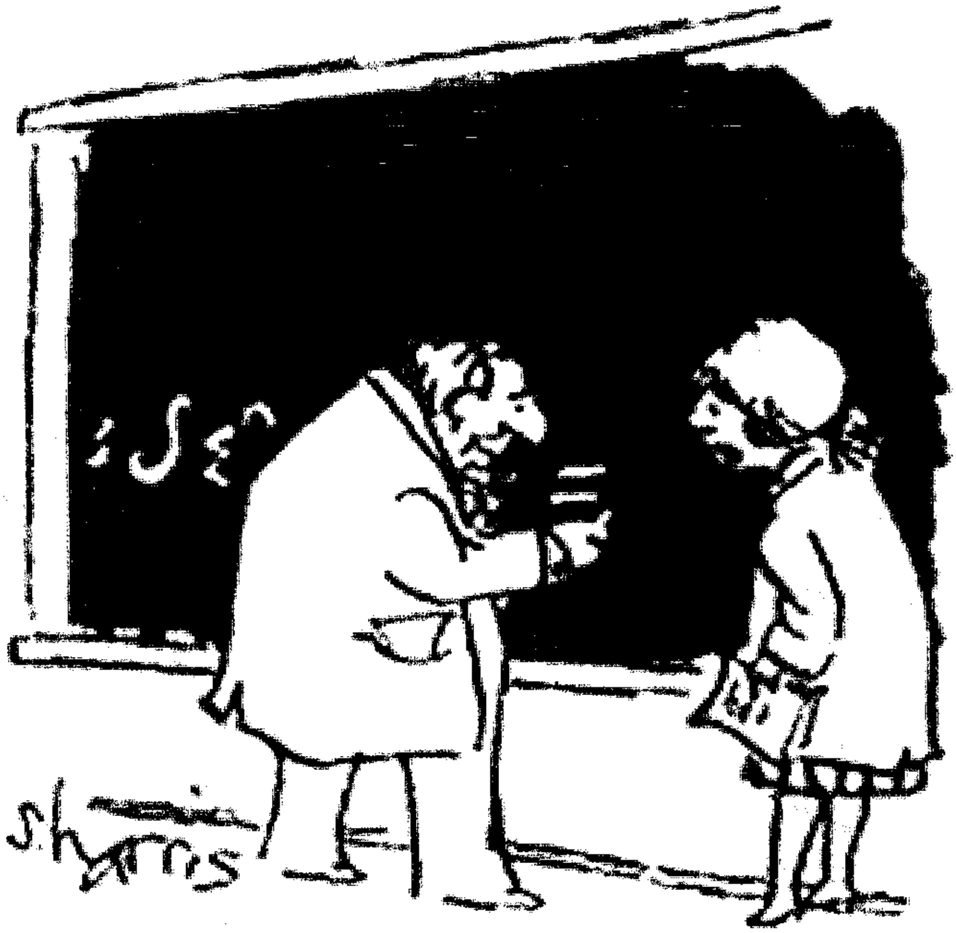
$\Rightarrow$ truncation error $\propto h^2$

หรือเขียน

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} = \frac{\delta^2 f_0}{h^2}$$

สรุป การประมาณค่าอนุพันธ์ $f'(x_0)$, $f''(x_0)$

สูตร	Truncation error
1. Forward	
$f'(x_0) \approx \dfrac{f_1 - f_0}{h}$	$\propto h$, $O(h)$
2. Backward	
$f'(x_0) \approx \dfrac{f_0 - f_{-1}}{h}$	$\propto h$, $O(h)$
3. Central	$\propto h^2$, $O(h^2)$
$f'(x_0) \approx \dfrac{f_1 - f_{-1}}{2h}$	
4. $f''(x_0) \approx \dfrac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$	$\propto h^2$, $O(h^2)$



"THIS IS THE PART I ALWAYS HATE."

ภาพจาก T-shirt ของ AMS

การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration)

ปัญหา ต้องการหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

ถ้าทราบปฏิยานุพันธ์ของ f แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

โดยทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส

ถ้าต้องการประมาณค่าของ I แล้ว แนวทางเป็นเช่นไร

จะเป็นวิธีเชิงตัวเลขในการหาค่าอินทิกรัล หรือ การอินทิเกรตเชิงตัวเลข มีแนวทางหนึ่งคือ

ประมาณ $f(x)$ บน $[a,b]$ ด้วย

$g(x)$ ซึ่งอินทิเกรตได้ง่าย

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b g(x)\,dx$$

เช่น $g(x)$ เป็น polynomial

หลักเกณฑ์การประมาณพื้นที่

(Quadrature rule)

ใช้ค่าฟังก์ชัน $f_0, f_1, \dots, f_N$ ที่ nodes

$x_0, x_1, \dots, x_N$ ซึ่งอยู่ในช่วง $[a, b]$

(1) สร้าง $p_n(x)$ ซึ่ง interpolate ที่จุด $N+1$ จุดนี้

(2) คำนวณ $R = \int_a^b p_n(x)\,dx$

$$= \sum_{j=0}^{N} \omega_j f_j$$

ซึ่งคือ สูตรหรือหลักเกณฑ์การประมาณพื้นที่

(3) ค่าที่แท้จริง $I = \int_a^b f(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p_n(x)\,dx + E$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \omega_j f_j + E$$

E คือ ค่าคลาดเคลื่อน

Quadrature rule:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N} \omega_j f_j + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{error}}}{E}$$

$$I \approx \sum_{j=0}^{N} \omega_j f_j = \underbrace{\omega_0 f_0 + \omega_1 f_1 + \cdots + \omega_N f_N}$$

ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก
ของค่าฟังก์ชัน

Weighted average
of function values

weights: $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N$

$\Rightarrow$ ความแตกต่างของแต่ละสูตร ขึ้นอยู่กับ
การเลือก weights

ในกรณีที่ $x_0, x_1, \ldots, x_N$ อยู่ห่างเท่าๆกัน
(equally spaced nodes) นั่นคือ

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, 1, \ldots, N$$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_0 = a, \quad x_N = b$$

หลักเกณฑ์ที่ใช้ nodes ซึ่งอยู่ห่างเท่าๆกัน
เรียกว่า Newton-Cotes rules

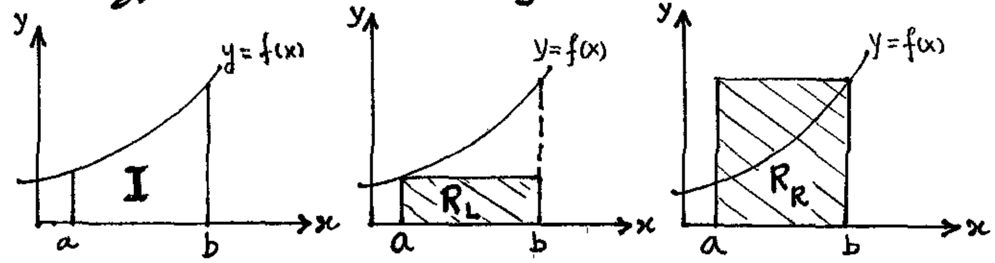
Closed Newton-Cotes Quadrature Rule

<u>ปัญหา</u> ต้องหาค่าประมาณของ $\int_a^b f(x)dx$

<u>แนวคิด</u> $f(x) \approx p_n(x)$

เมื่อ $p_n(x)$ เป็น interpolating polynomial ที่สร้างจากข้อมูล (x_i, f_i), $i = 0, 1, \ldots, N$ โดยที่ $x_0, x_1, \ldots, x_N$ อยู่ห่างเท่าๆ กัน ถ้า $x_0 = a$ และ $x_N = b$ แล้วเรียกหลักเกณฑ์นี้ว่า closed Newton-Cotes quadrature rule

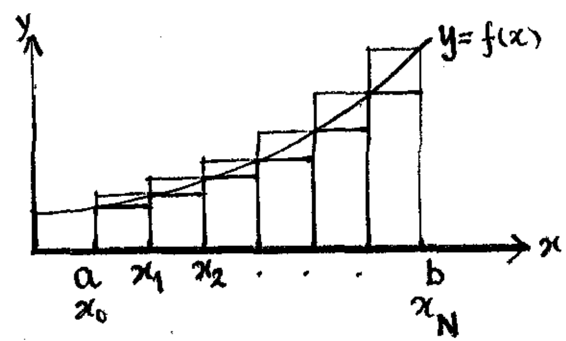
1. กฎสี่เหลี่ยม (Rectangle rules)



$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad R_L = (b-a)f(a), \quad R_R = (b-a)f(b)$$

$$I \approx R_L \quad \text{หรือ} \quad I \approx R_R$$

<u>กฎสี่เหลี่ยมประกอบ (Composite rectangle rules)</u>



$$h = \frac{b-a}{N}$$

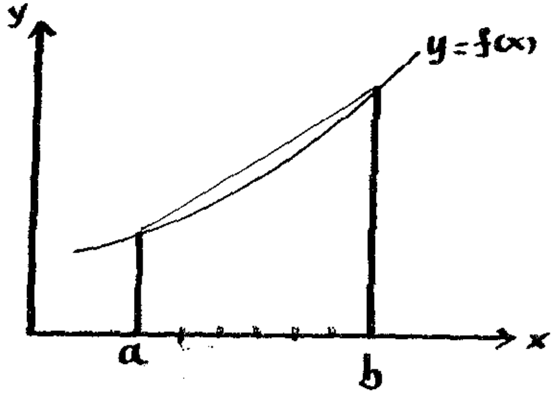
$$\int_a^b f(x)dx \approx R_{L_N} = hf_0 + hf_1 + \cdots + hf_{N-1} = h\sum_{j=0}^{N-1} f_j$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx R_{R_N} = hf_1 + hf_2 + \cdots + hf_N = h\sum_{j=0}^{N} f_j$$

Truncation error $\propto h$ หรือเป็น $O(h)$

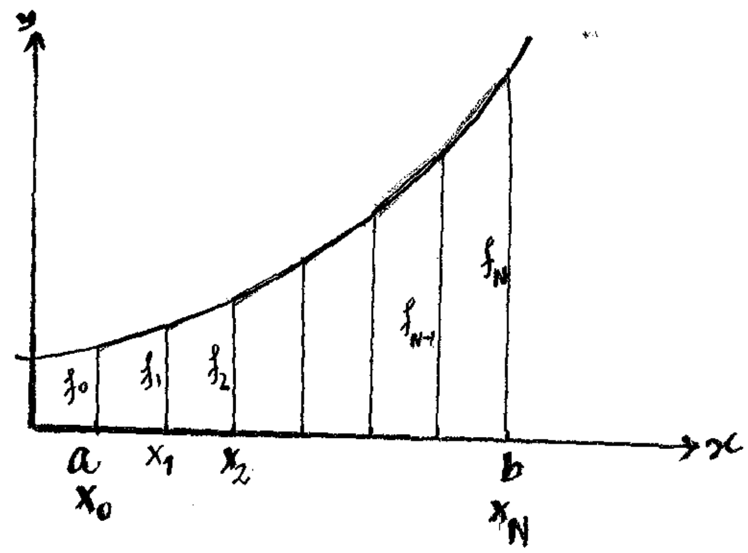
P. [illegible]

2. กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule)



$$T = \frac{(b-a)}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$



Composite trapezoidal rule

$$T_N = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{N-1} + f_N\right]$$

กฎสี่เหลี่ยมคางหมูประกอบ (Composite trapezoidal rule)

nodes: $\overset{a}{x_0}, x_1, \ldots, \overset{b}{x_N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$

$$T_N = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_1\right] + \frac{h}{2}\left[f_1 + f_2\right] + \cdots + \frac{h}{2}\left[f_{N-1} + f_N\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \cdots + 2f_{N-1} + f_N\right]$$

การวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อนใช้ทฤษฎีบท Taylor สำหรับค่าเศษเหลือ (remainder) เป็นเช่นใด จะได้

$$|E_{T_N}| \propto h^2$$

$$|E_{T_N}| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)\max_{a<x<b}|f''(x)|$$

ตัวอย่าง (สาธิต)

$$I = \int_0^2 x^3\,dx \quad \Rightarrow I = 4$$

ประมาณ I ด้วย T_N

วิธีทำ

$$h = \frac{2-0}{N}, \quad f(x) = x^3,$$

$$N=1,\ h=2 \Rightarrow T_1 = \frac{2}{2}\left[f_0+f_1\right] = 1(0+8) = 8$$

$$N=2,\ h=1 \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}\left[f_0+2f_1+f_2\right] = \frac{1}{2}(0+2+8) = 5$$

$\vdots$

การลู่เข้าของค่า T_N $\qquad 0 \quad 1 \quad 2$

N	1	2	4	8	16	32
h	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625
T_N	8	5	4.25	4.0625	4.0156	4.0039
$\lvert I-T_N\rvert$	4	1	0.25	0.0625	0.0156	0.0039

ค่าคลาดเคลื่อน ลดลงเหลือ $\frac{1}{4}$ เท่า เมื่อ h ลดลง ทีละครึ่ง

ตัวอย่าง จงประมาณค่าของ $\int_0^1 f(x)\,dx$ โดยใช้ T_N จากข้อมูลในตาราง

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1.00000	.99335	.97355	.94107	.89670	.84147

วิธีทำ $\quad h = 0.2, \quad N = 5$

$$f(0.0) + f(1.0) = 1.00000 + .84147$$

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_4 = .99335 + \cdots + .89670 = 3.80467$$

$$T_5 = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2(f_1+f_2+\cdots+f_4) + f_5\right]$$

$$= \frac{0.2}{2}\left[1.84147 + 2(3.80467)\right]$$

$$= 0.94508$$

สูตร

$$T_N = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2(f_1+\cdots+f_{N-1}) + f_N\right]$$

$$= h\left[\underbrace{\frac{f_0+f_N}{2}}_{\text{Sumend}} + \underbrace{(f_1+\cdots+f_{N-1})}_{\text{Sum}}\right]$$

การใช้ขอบเขตของ E_{T_N}

$$|E_{T_N}| \le \frac{h^2}{12}(b-a)M_2$$

$$M_2 = \max_{a<x<b} |f''(x)|$$

<u>ตัวอย่าง</u> ต้องการประมาณค่าของ

$$I = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}\,dx \approx 0.17048475$$

ด้วย T_N โดยมี step size $h = 0.005$ หรือ

$N = 200$ ได้ค่าของ $T_{200} = 0.17048475$

จงวิเคราะห์ว่าค่าของ T_{200} จะมีความเที่ยงเท่าใด

หรือ ประมาณทศนิยมให้ถูกต้องกี่ตำแหน่ง

<u>วิธีทำ</u>

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}, \quad f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}\left[1 + \frac{1}{x}\right]$$

$$f''(x) = \frac{e^{-x}}{x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

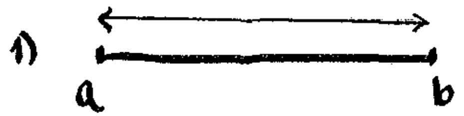
$$\Rightarrow \max_{1<x<2} |f''(x)| \le f''(1) = \frac{5}{e}$$

$$\Rightarrow \left|E_{T_{200}}\right| \le \frac{(0.005)^2}{12} \times 1 \times \frac{5}{e} \approx 3.83 \times 10^{-6}$$

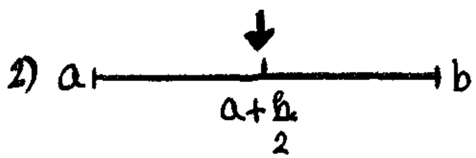
$\Rightarrow$ T_{200} จะมีความเที่ยง 5 ตำแหน่ง

P. Asavanant

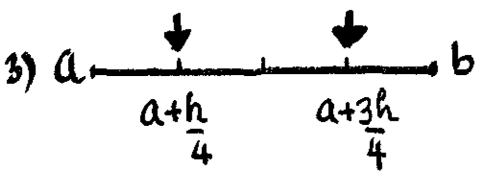
การคำนวณใน Composite trapezoidal rule
แบ่งช่วงย่อยให้เล็กลงทีละครึ่ง คำนวณค่าฟังก์ชัน
ที่ node ใหม่ในแต่ละรอบเท่านั้น

1) 

$S_1 = f(a) + f(b)$

2) 

$S_2 = S_1 + 2f\left(a+\frac{h}{2}\right)$

3) 

$S_3 = S_2 + 2\left(f\left(a+\frac{h}{4}\right) + f\left(a+\frac{3h}{4}\right)\right)$

$\vdots$

$\therefore$ Integral $= S_N * (h/2)$

เมื่อ h = ความยาวช่วงย่อยในรอบที่ N

Algorithm 1 Composite trapezoidal rule

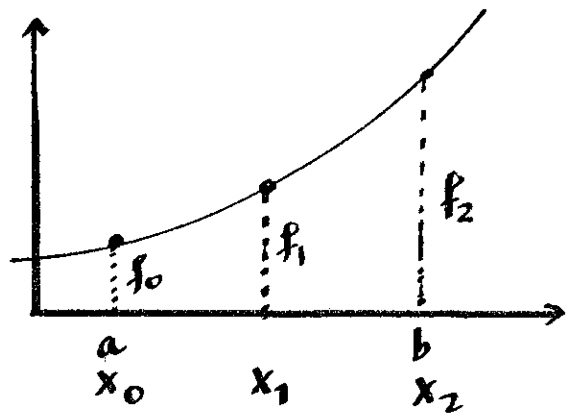
```
Input :  a , b , f(x) , N
         h = (b – a) /N
         sumend = (f(a) + f(b)) /2
         sum = 0
         for  k = 1  to  N – 1  do
              begin
                   x = a + k* h
                   sum = sum + f(x)
              end
         trap  =  (sumend + sum) * h
Output : trap
```

Algorithm 2 Composite trapezoidal rule (iterative computation)

```
Input :  a , b , f(x) , tol
         h = b – a
         sumend  =  (f(a) + f(b)) / 2
         sum  =  0
         k  =  1
         while  | (sumend – sum) / sumend | > ε  do
              begin
                   sum  =  sumend
                   x  =  a + h/2
                   for  i = 1  to  k  do
                       begin
                            sumend  = sumend + f(x)
                            x  =  x + h
                       end
                   k  =  2*k
                   h  =  h/2
              end
         trap  =  sumend * h
Output :  trap , h
```

3. กฎซิมป์สัน (Simpson's rule)

(Thomas Simpson, 1710-1761)



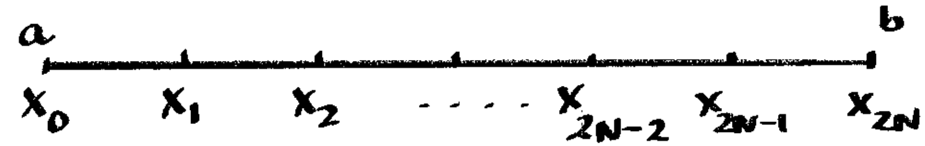
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + f_2\right)$$

สูตรนี้ได้จากการ interpolate $f(x)$ ด้วย $p_2(x)$ โดยใช้จุด $(x_0, f_0), (x_1, f_1)$ และ (x_2, f_2)

$$h = \frac{b-a}{2}$$ ต้องแบ่ง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยจำนวนเลขคู่

กฎซิมป์สันประกอบ (Composite Simpson's ...

แบ่ง $[a,b]$ เป็น $2N$ ช่วงย่อย



$$S_{2N} = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] + \frac{h}{3}[f_2 + 4f_3 + f_4] + \cdots + \frac{h}{3}[f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + f_{2N}]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + \cdots + 2f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + f_{2N}\right]$$

$$S_{2N} = \frac{h}{3}\left[\text{sumend} + 4(\text{sumodd}) + 2(\text{sumeven})\right]$$

$$h = \frac{b-a}{2N}$$

ค่าคลาดเคลื่อนของ S_{2N}

$$|E_{S_{2N}}| \leq \frac{h^4}{180}(b-a)M_4 \qquad (*)$$

เมื่อ $M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$

ถ้าอนุพันธ์ของ f คำนวณได้ยาก หรือข้อมูลของ f เป็น discrete data points แล้วประมาณ M_4 ดังนี้

$$M_4 = \max \left| \frac{\Delta^4 f}{h^4} \right|$$

จาก $(*)$

$$|E_{S_{2N}}| \propto h^4$$

ตัวอย่าง จงอินทิเกรต

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

แบ่งช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ หา S_{2N}

โดยให้ $x_0 = a, \quad x_1 = 0.4, \quad x_2 = 0.8 = b$

วิธีทำ

$$S_2 = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right]$$

$f_0 = f(0) = 0.2$

$f_1 = f(0.4) = 2.456$

$f_2 = f(0.8) = 0.232$

$h = 0.4$

$$S_2 = \frac{0.4}{3}\left(0.2 + 4(2.456) + 0.232\right)$$

$$= 1.367467$$

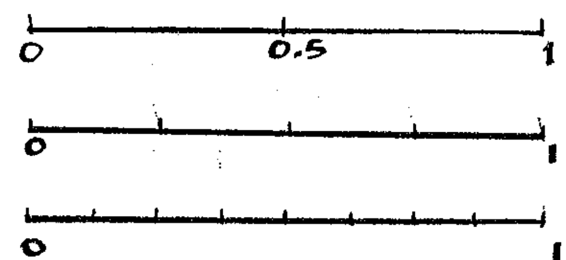
$$\Rightarrow \int_0^{0.8} f(x)\,dx \approx 1.367467$$

ตัวอย่าง จงใช้กฎซิมป์สันประกอบประมาณค่าของ

$$\int_0^1 x \ln(x+1)\,dx$$

วิธีทำ $f(x) = x\ln(x+1)$

	x_i	$f(x_i)$
$N=2, h=0.5$	0.000	0.00000
	0.500	0.20273
	1.000	0.69315
$N=4, h=0.25$	0.250	0.05579
	0.750	0.41971
$N=8, h=0.125$	0.125	0.01472
	0.375	0.11942
	0.625	0.30344
	0.875	0.55003



$S_2 =$ $\qquad S_4 =$

$S_8 =$

P. Arawaken

Algorithm 3 Composite Simpson's rule

```
Input : a , b , f(x) , N (even number)
        h = (b – a)/N
        sumend = f(a) + f(b)
        x = a + h
        sumend = f(x)
        sumevn = 0
        for  k = 1  to  (N – 2 )/2  do
           begin
                x =  x + h
                sumevn = sumevn + f(x)
                x =  x + h
                sumodd = sumodd + f(x)
           end
        simp =  (sumend + 4*sumodd + 2*sumevn) * h/3
Output : simp
```

Algorithm 4   Composite Simpson's rule (iterative computation)

```
Input : a , b , f(x) , tol
        h = (b – a)/2
        k = 2
        sumend  = f(a) + f(b)
        sumodd  = f(a + h)
        sumevn  = 0
        sum  = 0
        simp  = (sumend + 4*sumodd) * h/3
        while   | (simp – sum) / simp | > ε   do
            begin
                sumevn  =  sumevn + sumodd
                sumodd  =  0
                x  = a + h/2
                for   i = 1  to   k    do
                    begin
                        sumodd  =  sumodd + f(x)
                        x  =  x +  h
                    end
                h =  h/2
                k =  2*k
                sum  =  simp
                simp =  (sumend + 2*sumevn + 4*sumodd) * h/3
            end
Output  :  simp , h
```

สรุป การอินทิเกรตเชิงตัวเลข เพื่อประมาณค่าของ

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

1. $I \approx R_{L_N} = h \sum_{j=0}^{N-1} f_j$

$I \approx R_{R_N} = h \sum_{j=1}^{N} f_j$

ค่าความคลาดเคลื่อน $\propto h$

2. $I \approx T_N = \frac{h}{2}\left[f_0 + 2(f_1 + \cdots + f_{N-1}) + f_N\right]$

ค่าความคลาดเคลื่อน $\propto h^2$

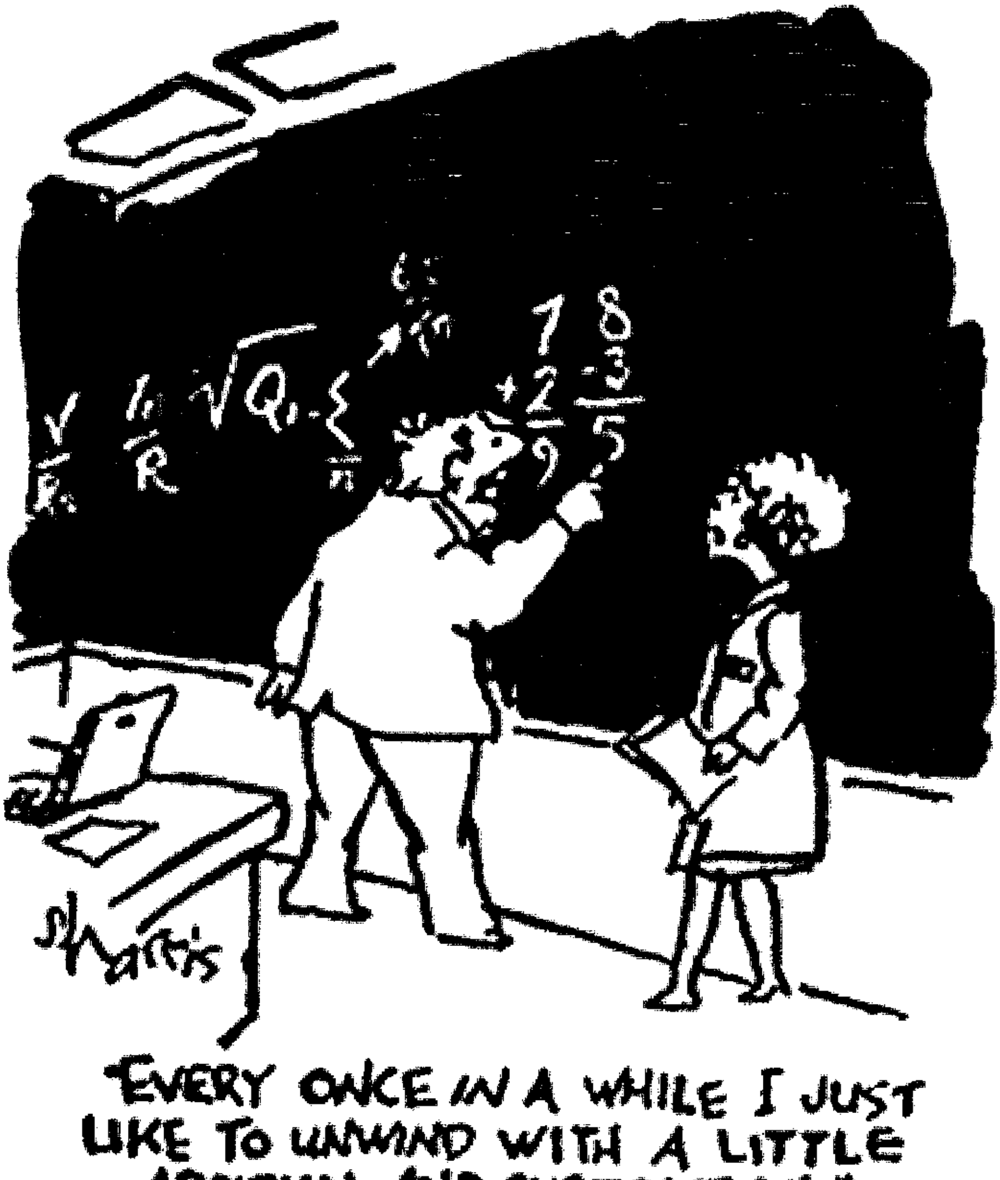
3. $I \approx S_{2N} = \frac{h}{3}\left[\text{sumend} + 4\,\text{sumodd} + 2\,\text{sumeven}\right]$

$\text{sumend} = f_0 + f_{2N} = f(a) + f(b)$

$\text{sumodd} = f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2N-1}$

$\text{sumeven} = f_2 + f_4 + f_6 + \cdots + f_{2N-2}$

ค่าความคลาดเคลื่อน $\propto h^4$



ภาพจาก T-shirt ของ AMS

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์

ปัญหา หาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น หรือ IVP (initial value problem)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t,y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}\right\} (*)$$

ผลเฉลยวิเคราะห์ (analytical solution) ของ IVP นี้ คือ

$$y = y(t)$$

โดย $y(t)$ หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[t_0, b]$ และสอดคล้องตาม (*)

ตัวอย่าง

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t-y}{2}$$

$y(0) = 1, \quad t \in [0, 5]$

หาผลเฉลยโดยวิธีแก้สมการเชิงเส้น จะได้ค่าผลเฉลยวิเคราะห์บนช่วง $[0, 5]$ คือ

$$y(t) = 3e^{-t/2} + t - 2$$

~~การมีอยู่ของ [illegible]~~

หนึ่งเดียว (uniqueness) ของ (*) พิสูจน์โดย "Picard"

ถ้าไม่สามารถหาผลเฉลยวิเคราะห์ได้ แล้ว แนวทางหนึ่งในการหาผลเฉลย คือ การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีเชิงตัวเลข

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของ (*) เป็นอย่างไร?

ผลเฉลยวิเคราะห์	ผลเฉลยเชิงตัวเลข
$y(t)$	(t_k, y_k) $\vdots$
ผลเฉลยที่แท้จริง	ค่าประมาณของผลเฉลย

$$y(t_k) \approx y_k$$

P. Asawakun

การหาวิธีประมาณผลเฉลยของ IVP

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, t_N]$$

<u>แนวคิด</u> เขียน $y(t)$ ในรูป Taylor polynomial รอบจุด t_0

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t-t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2} y''(\xi)$$

เพราะว่า $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ และถ้าแทน $t = t_1 = t_0 + h$ จะได้

$$y(t_1) = y(t_0) + h f(t_0, y(t_0)) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \quad y(t_1) \approx y(t_0) + h f(t_0, y(t_0))$$

$\Rightarrow$ สูตรการคำนวณอยู่ในรูป

$$y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0)$$

นั่นคือ

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k)$$

สำหรับ $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

วิธีนี้มีชื่อเรียกว่า Euler's approximation

วิธี Euler เป็น Taylor series method of order 1

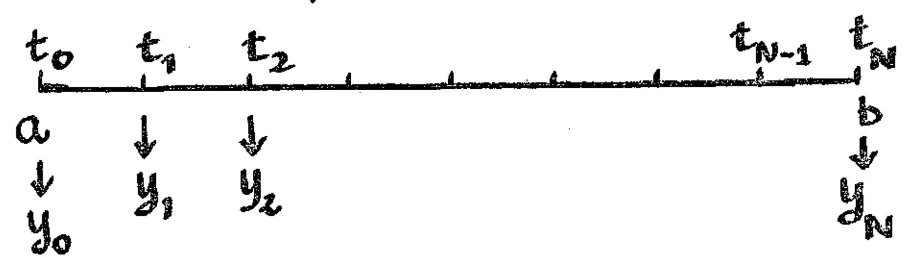
สูตร Euler:

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

ทำให้ได้ค่า $y_1, y_2, \dots, y_N$ โดยที่

$$\underbrace{y(t_k)}_{\text{ค่าที่แท้จริง}} \approx \underbrace{y_k}_{\text{ค่าประมาณ}}$$

equispaced nodes



ค่าเริ่มต้น $y_0 = y(t_0)$

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad t_k = a + kh, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

ตัวอย่าง ~~จงหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ ใช้~~

$$y' = -y + x + 1$$

$0 \le x \le 1, \quad y(0) = 1$ โดย Euler's method

วิธีทำ สูตรการคำนวณแบบ Euler หรือ
สมการผลต่าง คือ

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$

$$= y_k + h(-y_k + x_k + 1)$$

$$\Rightarrow y_{k+1} = (1-h)y_k + h(1+x_k)$$

$$h = 0.1, \quad x_k = 0 + 0.1k, \quad k = 0, 1, \dots, 10$$

แทนค่า h และ x_k ได้สูตรการคำนวณ

$$y_{k+1} = 0.9\, y_k + 0.1 + 0.01k$$

ผลเฉลยที่แท้จริง หรือ ผลเฉลยวิเคราะห์ คือ

$$y(x) = e^{-x} + x$$

$\Rightarrow$ ค่าคลาดเคลื่อน $\Delta = | y(x_k) - y_k |$

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

$$\delta = \frac{\Delta}{|y(x_k)|} \quad \left(\approx \frac{\Delta}{y_k}\right)$$

k	x_k	y_k	$y(x_k)$	Δ	δ
0	0	1.0	1.0	0	0
1	0.1	1.0	1.00484	0.00484	0.0048
2	0.2	1.01	1.01873	0.00873	0.0086
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1.0	1.34868	1.36788	0.01920	0.0140

ตัวอย่าง ใช้ Euler's method หาผลเฉลยของ IVP

$$y' = Ry \quad \text{บนช่วง } [0,1], \quad y(0) = y_0$$
$$R = \text{ค่าคงที่}$$

วิธีทำ สมการผลต่างคือ

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + hRy_k = y_k(1 + hR)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0(1 + hR)$$

$$y_2 = y_1(1+hR) = y_0(1+hR)^2$$

$$\vdots$$

$$y_N = y_0(1+hR)^N$$

ผลเฉลยแท้จริงคือ $y = y_0 e^{Rx}$

การวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อนของ Euler's method

$$\begin{array}{ccc} t_k & \text{———} & t_{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ y_k & & y_{k+1} \end{array}$$

ในแต่ละขั้น $E_k = \frac{h^2}{2} y''(c_k)$

$\Rightarrow$ ค่าคลาดเคลื่อนทั้งหมด คือ

$$E = \sum_{k=1}^{N} E_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{h^2}{2} y''(c_k)$$

$$\approx N \frac{h^2}{2} y''(c)$$

$$= \left(\frac{b-a}{h}\right) \frac{h^2}{2} y''(c)$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right) h\, y''(c)$$

$$\Rightarrow E \propto h$$

นั่นคือ ถ้า h ลดลงเหลือ $\frac{h}{2}$ แล้ว

E ลดลงประมาณครึ่งหนึ่ง

ตัวอย่าง จงใช้ Euler's method หาผลเฉลยของ IVP

$$y' = \frac{t-y}{2}, \quad t \in [0,3], \quad y(0) = 1$$

เปรียบเทียบผลเฉลยสำหรับ $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ และ $\frac{1}{8}$

วิธีทำ $y_0 = 1$, สมการผลต่างคือ

$$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{t_k - y_k}{2}\right) \qquad (*)$$

$h = 1, \; N = 3$

$$\begin{array}{cccc} 0 & & & 3 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

แทนค่าใน (*) ได้

$$y_1 = 1.0 + 1\left(\frac{0-1}{2}\right) = 0.5$$

$$y_2 = 0.5 + 1\frac{(1-0.5)}{2} = 0.75$$

$$y_3 = 0.75 + 1\frac{(2-0.75)}{2} = 1.375$$

$$\Rightarrow y(3) = y(t_3) \approx y_3 = 1.375$$

เปรียบเทียบ ค่าของ $y(3)$ ที่ประมาณได้ในกรณี $h=1$ กับกรณี $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{4}$ และ $h = \frac{1}{8}$

$h = 1, \; N = 3, \quad y(3) \approx y_3 = 1.375$

$h = \frac{1}{2}, \; N = 6, \quad y(3) \approx y_6 = 1.533936$

$h = \frac{1}{4}, \; N = 12, \quad y(3) \approx y_{12} = 1.604252$

$h = \frac{1}{8}, \; N = 24, \quad y(3) \approx y_{24} = 1.637429$

ผลเฉลยที่แท้จริง หรือ ผลเฉลยวิเคราะห์ ในกรณีนี้ คือ

$$y(t) = 3e^{-t/2} - 2 + t$$

$$\Rightarrow y(3) = 1.669390$$

ตารางแสดงค่าคลาดเคลื่อนที่จุดปลายช่วง ($t=3$) (Final global error, FGE)

h	N	$FGE = \lvert y(3) - y_N \rvert$
1	3	0.294390
1/2	6	0.135454
1/4	12	0.065138
1/8	24	0.031961

$$FGE \propto h$$

P. Asawakun

Taylor series method สำหรับ IVP

$$y' = f(t,y)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, b]$$

แนวคิด: พิจารณา Taylor series สำหรับ $y(t_{k+1})$ หรือ $y(t_k+h)$

$$y(t_k+h) = y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2}y''(t_k) + \frac{h^3}{6}y'''(t_k) + \cdots$$

แทนค่า $y'(t_k), y''(t_k), y'''(t_k), \ldots$ ด้วยรูปของ f และอนุพันธ์ย่อยของ f

$\Rightarrow$ สูตรการคำนวณอยู่ในรูป

$$y_{k+1} = y_k + d_1h + \frac{d_2}{2!}h^2 + \frac{d_3}{3!}h^3 + \cdots + \frac{d_N h^N}{N!}$$

เมื่อ $d_j = y^{(j)}(t_k), \quad j = 1, 2, \ldots, N$

ที่แต่ละขั้นจาก k ไปยัง $k+1$

Taylor series method สำหรับ IVP

$$y' = f(t,y)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, b]$$

<u>แนวคิด</u> เขียน Taylor series ของ $y(t_k+h)$ หรือ $y(t_{k+1})$

$$y(t_k+h) = y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2}y''(t_k) + \frac{h^3}{6}y'''(t_k) + \cdots$$

แทนค่า $y'(t_k), y''(t_k), y'''(t_k), \ldots$ ในรูปของ f และอนุพันธ์ย่อยของ f

ดังนั้น สูตรของวิธี Taylor series อยู่ในรูป

$$y_{k+1} = y_k + d_1 h + \frac{d_2}{2!}h^2 + \frac{d_3}{3!}h^3 + \cdots + \frac{d_N}{N!}h^N$$

เมื่อ $d_j = y^{(j)}(t_k)$, $j = 1, 2, \ldots, N$ ที่แต่ละขั้นจาก k ไปยัง $k+1$

Taylor series method:

Euler's method

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + hy'(t_k) + \cdots$$

สูตร:

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

(1) ค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละขั้น

$$E_k \propto h^2$$

(2) ค่าคลาดเคลื่อนทั้งหมด (FGE)

$$E \propto h$$

พิจารณาจาก $|y(t_N) - y_N|$

(FGE = final global error)

P Arawaken

Taylor series method

Euler's method:

$$y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + h\,y'(t_k) \ldots$$

สูตร:

$$y_{k+1} = y_k + h\,f(t_k, y_k)$$

1) ค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละขั้น

$$E_k \propto h^2$$

2) ค่าคลาดเคลื่อนทั้งหมด

$$E \propto h$$

ซึ่งประมาณได้จาก $|y(t_N) - y_N|$ หรือ ค่าคลาดเคลื่อนที่จุดปลายช่วง FGE (final global error)

P. Asavadom

Runge-Kutta Methods:

เป็นวิธีหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ IVP

$$y' = f(t,y), \quad y(t_0)=y_0, \quad t\in[t_0,b]$$

ใช้แนวคิดจากการเขียน Taylor series ของ $y(t_k+h)$ หรือ $y(t_{k+1})$ แต่ไม่มีการคำนวณอนุพันธ์ของ f เทียบกับ t โดยตรง วิธีหาผลเฉลย เป็นวิธีอันดับสองในรูป

$$y_{k+1} = y_k + d_1 h + \frac{d_2}{2} h^2$$

ได้สูตรการคำนวณดังนี้

(1) Simple Runge-Kutta Method:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k) + \frac{h}{2} f(t_{k+1}, y_k + h f(t_k, y_k))$$

(2) Modified Euler's Method:

$$y_{k+1} = y_k + h f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right)$$

อันดับสี่ RK4

$$y_{k+1} = y_k + d_1 h + \frac{d_2}{2!} h^2 + \frac{d_3}{3!} h^3 + \frac{d_4}{4!} h^4$$

สูตรการคำนวณอยู่ในรูป

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right]$$

เมื่อ

$$f_1 = f(t_k, y_k)$$

$$f_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_1\right)$$

$$f_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f_2\right)$$

$$f_4 = f(t_k + h, y_k + h f_3)$$

ค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละขั้น

$$E_k \propto h^5$$

ค่าคลาดเคลื่อนสุดท้าย (Final global error) FGE

$$E = |y(b) - y_N| = O(h^4)$$

$$\Rightarrow E \propto h^4$$

P. A...

<u>ตัวอย่าง</u> จงใช้วิธี Runge-Kutta อันดับสี่ หาผลเฉลยของ

IVP $\quad y' = \dfrac{t-y}{2}$

ในช่วง $[0,3]$, $y(0)=1$, $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

<u>วิธีทำ</u>

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}\left[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right]$$

$$f_1 = f(t_k, y_k)$$

$$f_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} f_1\right)$$

$$f_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} f_2\right)$$

$$f_4 = f\left(t_k + h,\ y_k + h f_3\right)$$

ตัวอย่างการคำนวณเมื่อ $h = \frac{1}{4} = 0.25$

$$t_k = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75, \ldots, 3.00$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right]$$

$$f(t,y) = \frac{t-y}{2}$$

$y_0 = 1$

$t_0 = 0$

$t_0 + \frac{h}{2} = 0 + \frac{0.25}{2} = 0.125$

$t_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$

คำนวณ f_1, f_2, f_3, f_4

$$f_1 = f(t_0, y_0) = \frac{0-1}{2} = -0.5$$

$$f_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{h}{2} f_1\right)$$

$$= \frac{0.125 - (1 + 0.125(-0.5))}{2} = -0.40625$$

$$f_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{h}{2} f_2\right)$$

$$= \frac{0.125 - (1 + 0.125(-0.40625))}{2}$$

$$\approx -0.4121094$$

$$f_4 = f(t_0 + h,\ y_0 + h f_3)$$

$$\approx \frac{0.25 - (1 + 0.25(-0.4121094))}{2}$$

$$\approx -0.3234863$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right]$$

$$= 1.0 + \frac{0.25}{6}\left[-0.5 + \cdots + (-.3234863)\right]$$

= [illegible]

P. Asavaban

บรรณานุกรม

Atkinson, K. E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis* (Second edition). Wiley, New York.

Atkinson, K. E. (1985). *Elementary Numerical Analysis.* Wiley, New York.

Cheney W. and D. Kincaid (1994). *Numerical Mathematics and Computing*. Brooks/Cole, Pacific Grove.

Faires, J. D. and R. L. Burden (1993). *Numerical Methods.* PWS, Boston.

Köckler N. (1994). *Numerical Methods and Scientific Computing Using Software Libraries for Problem Solving.* Oxford University Press, Oxford.

Wood, A. (1999). *Introduction to Numerical Analysis.* Addison-Wesley, Harlow.