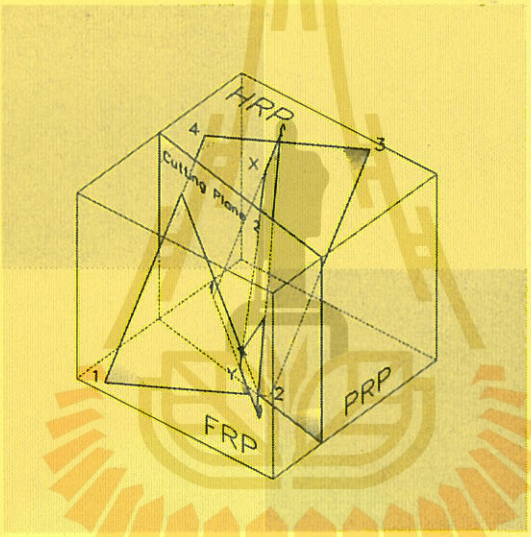
เอกสารประกอบการสอนรายวิชา

402102 ENGINEERING GRAPHICS II

ภาคการศึกษาที่ 2/2540

PART II
DESCRIPTIVE GEOMETRY



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สำหรับการเรียนภาคปฏิบัติการเขียนแบบ

สัปดาห์ที่ 6-12

ผศ. ชาญชัย ลิมปิยากร

สำนักวิชาเทคโนโลยีอุตสาหกรรม

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

การสื่อสารด้วยภาพเทคนิค

1.1 ภาษาภาพ

การสื่อสารระหว่างคน เป็นกิจกรรมที่สำคัญอย่างยิ่งของสังคมมนุษย์ เป็นสิ่งที่ทำให้เกิดการวิวัฒนาการของสังคมมนุษย์ ครอบคลุมทุกด้าน ทั้งด้านวัฒนธรรม เศรษฐกิจ การเมืองและเทคโนโลยี

การเปล่งเสียงและภาษาพูดเป็นการสื่อสารพื้นฐานที่สุดระหว่างคน การเขียนและการใช้สัญญลักษณ์ต่าง ๆ นั้นก็เป็นการสื่อสารที่เกิดสืบเนื่องจากการพูด และเป็นการแสดงออกถึงการพัฒนาทางสติปัญญาของมนุษย์ที่สูงขึ้นด้วย

ภาษาภาพก็เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของการสื่อสาร เชื่อกันว่ามีการใช้ก่อนที่จะเกิดภาษาเขียนซึ่งได้มีการพัฒนาตัวอักขระดังที่ปรากฏในภาษาต่าง ๆ ทั่วโลก ภาษาภาพเป็นภาษาที่สามารถสื่อสารกันได้ก่อนที่คนจะรู้จักตัวหนังสือ ภาษาภาพเป็นการสื่อสารถึงจินตนาการในความนึกคิดของคนทั้งในเชิงรูปธรรมและนามธรรม ภาษาภาพแบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ ภาพศิลปะ และภาพเทคนิคหรือแบบเทคนิค สำหรับหนังสือเล่มนี้จะกล่าวถึง ภาพเทคนิคโดยเฉพาะ

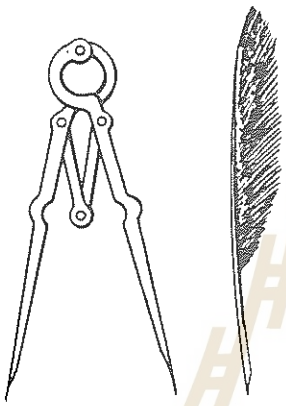
1.2 วิวัฒนาการของแบบเทคนิค

การเขียนแบบเทคนิคเป็นการสื่อสารเพื่อแสดงออก ที่ผู้ออกแบบต้องการให้ผู้ที่ร่วมงานรับทราบและสามารถร่วมมือกันในการสร้างสิ่งปลูกสร้างหรือสร้างชิ้นงาน ที่ผู้ออกแบบต้องการ การเขียนแบบเทคนิคจะบรรจุรายละเอียดต่าง ๆ เพื่อให้เกิดประโยชน์และความถูกต้องแม่นยำในการก่อสร้างหรือผลิตชิ้นงาน

1.2.1 แบบเทคนิคสมัยโบราญ

ก่อนคริสตศักราช 2000 ปี วิศวกรชื่อ คูเดีย (Gudea)ได้ออกแบบและสร้างวิหารนินจิร์สุ (Ningirsu) ที่เมืองบาบิโลน (Babilon) แบบของ คูเดีย เป็นภาพแปลนของวิหารดังกล่าว ถูกบันทึกบนแผ่นหินซึ่งกล่าวได้ว่าเป็นแบบเทคนิคเก่าแก่ที่สุดที่มีการบันทึกในประวัติศาสตร์ของมนุษย์ชาติ

ในสมัยกรีกโบราญนั้นมีการใช้เครื่องมือเขียนแบบ เช่น วงเวียน ไม้ฉากในการเขียนรูปทรงทางเรขาคณิต ดูรูป 1.1



รูปที่ 1.1 เครื่องมือเขียนแบบสมัยกรีก

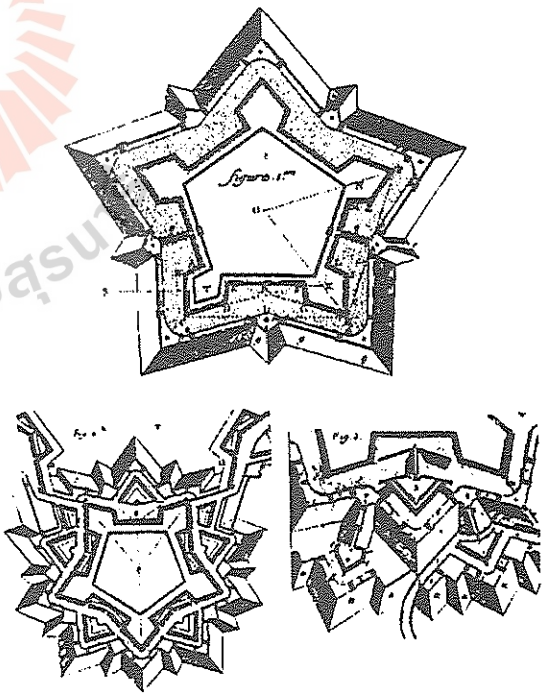
การเขียนแบบทัศนียภาพ (Perspective) เกิดในราว 450 ปี ก่อนคริสตศักราช โดยสถาปนิคแห่ง พาร์ธินอน (Parthenon) ชื่ออิคทินุสและคาล์ลิเคเทส์ (Ictinus& Callicrates) จนกระทั่งราวคริสตศักราช 1300-1500 การเขียนแบบทัศนียภาพมีการพัฒนาขึ้นอีกโดยใช้หลักการสมมาตร การแลเงา การใช้สี และการเขียนแบบทัศนียภาพที่มองจากเบื้องสูงลงมา ในช่วงเวลาเดียวกันนี้ (1420-1492) มีการนำวิชาคณิตศาสตร์มาใช้ในการเขียนแบบเทคนิค มีการสรุปทฤษฎีเขียนแบบทัศนียภาพ โดยสถาปนิคชาวอิตาลีหลายคนเช่น บรูเนลเลสชีส์ อัลเบอร์ติ และฟรานเชสกา (Brunelleschi, Alberti, Francesca)

นอกจากการพัฒนาทฤษฎีการเขียนแบบทัศนียภาพแล้ว ยังมีการใช้วิธีเขียนแบบภาพฉายตั้งฉาก (Orthographic Projcetion)ขึ้นในช่วงสมัยนี้ด้วย เนื่องจากภาพแบบทัศนียภาพมีข้อจำกัดในการเสนอขนาดหรือสัดส่วนที่เป็นจริง

1.2.2 เรขาคณิตพรรณนา

นักคณิตศาสตร์ชื่อคาสปา มอง (Gaspard Monge, 1746-1818) ได้พัฒนาการเขียนแบบเทคนิคที่เรียกว่า 'เรขาคณิตพรรณนา' สาเหตุที่เขาต้องพัฒนาวิธีนี้ขึ้นมาเพราะว่าเขาต้องออกแบบป้อมรูปดาวห้าแฉก เขาใช้วิธีการของภาพฉายตั้งฉากและเทคนิคการหมุน (Revolution) เพื่อแก้ปัญหาการออกแบบสิ่งปลูกสร้างที่มีรูปทรงซับซ้อน รูปที่ 1.2

มอง ได้เขียนหนังสือชื่อ La Geometric Descriptive ซึ่งเป็นหนังสือเล่มแรกที่อธิบายหลักการของการเขียนภาพฉาย วิชานี้ได้แพร่หลายอย่างกว้างขวางในประเทศเยอรมันและในปี 1816 ได้ถูกเผยแพร่ในสถาบันการศึกษาทางทหารชั้นสูงในสหรัฐอเมริกา ต่อมาได้มีการเผยแพร่อย่างกว้างขวางในมหาวิทยาลัยในสหรัฐอเมริกา



รูปที่ 1.2 ป้อมรูปดาวที่เกพาด มอง ออกแบบ

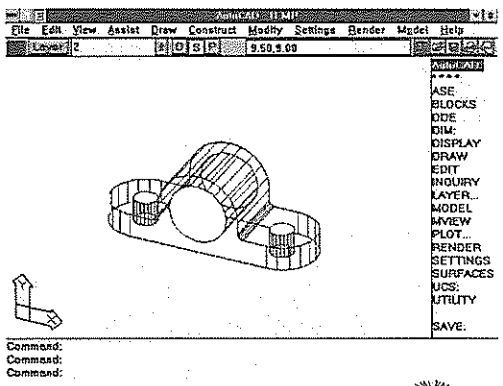
1.2.3 การเขียนแบบในปัจจุบัน

ตั้งแต่ปี 1800 เป็นต้นมา การผลิตในอุตสาหกรรมทำให้เกิดการบริหารการผลิตแบบใหม่ขึ้นเรียกว่าการผลิตมวลรวม (Mass Production) ซึ่งทำให้ชิ้นส่วนของผลิตภัณฑ์โดยเฉพาะชิ้นส่วนเครื่องจักรต่างๆ สามารถแลกเปลี่ยนกันได้ (Interchangable Parts) เช่นการเปลี่ยนอะไหล่ชิ้นส่วนรถยนต์เป็นต้น การผลิตดังกล่าวได้กำหนดให้การเขียนแบบเทคนิคต้องอาศัยหลักการของภาพฉายตั้งฉาก (Orthographic Projcetion) หลักการดังกล่าวนี้นำมาใช้ในการเขียนแบบเครื่องกลตั้งแต่บัดนั้นเป็นต้นมาจนปัจจุบัน

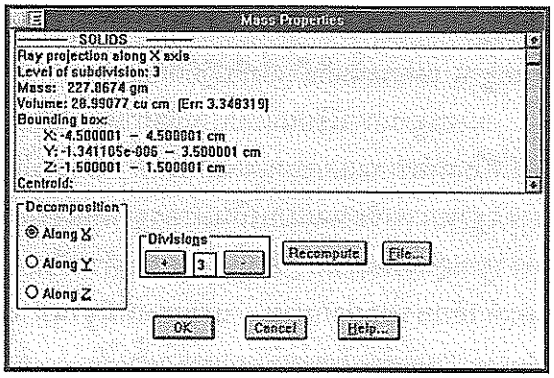
ภาพฉายตั้งฉากมีวิธีเขียนได้ 2 วิธี ซึ่งทั้งสองวิธีนี้ยังใช้กันอยู่ในปัจจุบัน คือภาพฉายระบบมุมที่ 1 (First Angle Orthographic Projection) เป็นวิธีการเขียนภาพฉายตั้งฉากที่ใช้กันในประเทศที่ใช้ระบบหน่วยเมตริกในมาตรฐานการเขียนแบบสากลก็ระบุให้ใช้ ภาพฉายระบบมุมที่ 1 ทั้งนี้รวมทั้งมาตรฐานของไทยด้วย

ภาพฉายระบบมุมที่ 3 (Third Angle Orthographic Projection) เป็นวิธีการเขียนภาพฉายตั้งฉากที่ใช้กันในประเทศสหรัฐอเมริกา ซึ่งก็มีเหตุผลหลายประการที่สนับสนุนให้ใช้ระบบนี้ รายละเอียดของระบบฉายภาพนั้นจะกล่าวในรายละเอียดอีกในบทต่อไป

วิวัฒนาการแบบเทคนิคหรือภาพเทคนิคตั้งแต่ปี 1800 จนถึงปัจจุบัน สรุปได้ว่า วิธีการเขียนแบบ



รูปที่ 1.3 แบบโมเดล 3 มิติ



รูปที่ 1.4 ข้อมูลทางกายภาพของแบบโมเดล 3 มิติ

ภาพฉายยังเป็นวิธีการที่ถือปฏิบัติกันมาจนปัจจุบันนี้ แต่การพัฒนาการตลอดเวลานั้นคือการพัฒนาด้านการใช้อุปกรณ์และเครื่องมือในการเขียนแบบ ปัจจุบันอุปกรณ์และเครื่องมือเช่น โต๊ะไม้ที ไม้ฉาก วงเวียน ได้พัฒนามาเป็นการเขียนแบบด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ อุปกรณ์และซอฟท์แวร์การเขียนแบบที่ดีถูกพัฒนาขึ้นมามากมายและใช้กันแพร่หลายมากขึ้น

แนวโน้มการเขียนแบบวิศวกรรมในอนาคต คือการเขียนแบบที่เป็นภาพสามมิติหรือที่เรียกว่าโมเดล 3 มิติ (3-D Modelling) ดูรูปที่1.3 และรูปที่ 1.4 ซึ่งแบบดังกล่าวเขียนด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และข้อมูลที่ถูกสร้างขึ้นนี้สามารถนำมาวิเคราะห์หาคุณสมบัติทางกายภาพเช่น ความแข็งแรง มวล พื้นที่ผิว ข้อมูลดังกล่าวจะถูกส่งไปให้เครื่องจักรทำการผลิตออกมาเป็นชิ้นงาน

1.3 มาตรฐานและสัญนิยม (Convention)

แบบเทคนิคที่จะนำมาใช้สื่อสารกันได้นั้นจะต้องผ่านการยอมรับและตกลงร่วมกันซึ่งเรียกว่ามาตรฐานอุตสาหกรรมและหรือสัญนิยม

สัญนิยมคือข้อปฏิบัติที่ยอมรับกันทั่วไปโดยมิได้บัญญัติเป็นกฎเกณฑ์ตายตัวเช่น การเขียนภาพฉายตั้งฉากเป็นสัญนิยมที่ยอมรับกันในการเขียนแบบเทคนิค การใช้เส้นประเภทต่าง ๆ แสดงความหมายของภาพ เช่น การใช้เส้นประแสดงถึงส่วนที่ถูกซ่อนหรือถูกบังโดยส่วนที่อยู่ข้างหน้าเป็นต้น สัญนิยมอาจครอบคลุมสาระที่กว้างและมีลักษณะทั่วไปมากกว่า

มาตรฐาน สาระบางประการ ไม่ถูกระบุไว้ในมาตรฐาน แต่กระนั้นก็เป็นสิ่งที่ปฏิบัติกันอยู่

มาตรฐานการเขียนแบบเป็นข้อกำหนดที่ต้องปฏิบัติในการเขียนแบบของแต่ละประเทศ โดยทั่วไปมาตรฐานการเขียนแบบเป็นมาตรฐานหนึ่งของมาตรฐานอุตสาหกรรม ดังนั้นจึงถูกระบุด้วยตัวเลขและตัวอักษรย่อมากมาย ประเทศที่มีฐานทางอุตสาหกรรมที่เข้มแข็งจะสร้างมาตรฐานขึ้นใช้เอง ซึ่งบุคลากรในสายอาชีพที่เกี่ยวข้องจะต้องศึกษาและปฏิบัติตาม สำหรับประเทศอุตสาหกรรมใหม่ที่ยังไม่ได้สร้างมาตรฐานของตนเอง ก็จะอาศัยมาตรฐานจากประเทศที่เจริญแล้วหรือประเทศที่มีความสัมพันธ์ทางการค้าที่มีการติดต่อซื้อขายอุปกรณ์เครื่องมือหรือเทคโนโลยีประจำ ทั้งนี้เพราะสินค้าที่เป็นผลิตภัณฑ์ทางอุตสาหกรรมจะต้องถูกผลิตภายใต้มาตรฐานอุตสาหกรรมของประเทศนั้นๆเสมอ

มาตรฐานอุตสาหกรรมที่นิยมใช้หรือถูกอ้างอิงมีไม่กี่มาตรฐาน ประทศที่ใช้ระบบเมตริก ในทวีปยุโรปมักนิยมใช้หรืออ้างอิงมาตรฐานอุตสาหกรรมของประเทศเยอรมัน ซึ่งมีอักษรย่อว่า DIN ประเทศที่ไม่ใช้หน่วยเมตริกคือประเทศอังกฤษจะมีมาตรฐานของเขาเองคือ มาตรฐานอังกฤษใช้ตัวย่อเป็น BS (British Standard) ในเอเชีย มาตรฐานอุตสาหกรรมที่ใช้อ้างอิงกันคือมาตรฐานของประเทศญี่ปุ่นใช้ตัวย่อ JIS (Japanese Standard) ซึ่งเป็นมาตรฐานที่ใช้หน่วยวัดระบบเมตริก ดังนั้นมาตรฐานของประเทศญี่ปุ่น JIS ก็จะมีความใกล้เคียงกันกับมาตรฐานเยอรมัน DIN มาตรฐานที่สำคัญและมีอิทธิพลในเมืองไทยมาแต่ดั้งเดิมคือมาตรฐานของอังกฤษและของสหรัฐอเมริกา ซึ่งใช้หน่วยวัดความยาวเป็น นิ้ว หรือฟุต และหน่วยของมวลเป็น ปอนด์ เป็นต้น

เนื่องจากมีมาตรฐานหลายอันใช้กันในวงการอุตสาหกรรมทำให้เกิดปัญหาสับสนแก่ระบบอุตสาหกรรมและเศรษฐกิจของประเทศไทยอยู่บ้างไม่มากก็น้อย ทั้งนี้เพราะเป็นประเทศอุตสาหกรรมใหม่ อย่างไรก็ดี ขณะนี้ทั่วโลกได้ตกลงให้มีมาตรฐานสากลขึ้นมาใช้ ซึ่งเรียกกันทั่วไปว่า มาตรฐาน ISO (International Standards Organization) ซึ่งเป็นมาตรฐานที่ใช้หน่วยวัดเป็น SI (Systeme Internationale) และใช้การเขียนแบบระบบภาพฉายมุมที่ 1 ตัวอย่างมาตรฐานเขียนแบบของ ISO เช่น

ISO 5457-1980 (E) เป็นมาตรฐานเกี่ยวกับการเขียนแบบเทคนิค ซึ่งครอบคลุมการให้ขนาดและการอ้างอิงของกระดาษเขียนแบบ

ISO 3098/1 เป็นมาตรฐานการเขียนแบบเทคนิคที่เกี่ยวกับการใช้ตัวอักษร (Lettering)

ISO 128 เป็นมาตรฐานการเขียนแบบที่เกี่ยวกับหลักการทั่วไปของการนำเสนอแบบเป็นต้น

ประเทศไทยได้ออกมาตรฐานการเขียนแบบชุดแรกเมื่อปี 2520 ชื่อว่า "มาตรฐานผลิตภัณฑ์อุตสาหกรรม วิธีเขียนแบบทั่วไปทางเครื่องกล" มอก 210-2520 ซึ่งเป็นมาตรฐานที่อิงกับมาตรฐาน ISO

1.4 ภาพฉาย (Projection)

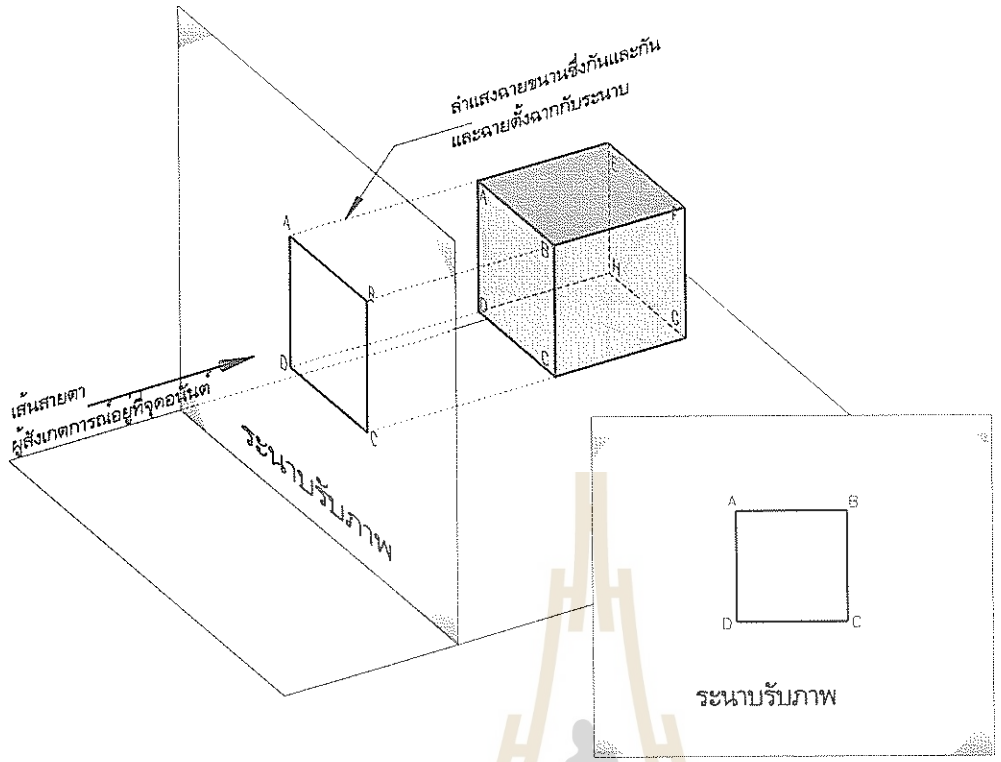
ดังที่ได้กล่าวไว้แต่ต้นแล้วว่า แบบเทคนิคจะแสดงด้วยภาพฉาย ดังนั้นหัวข้อนี้จะปูพื้นฐานเกี่ยวกับภาพฉายเล็กน้อย เพื่อให้เข้าใจสำหรับการติดตามสาระที่จะกล่าวต่อไป ภาพฉายจะเป็นความสัมพันธ์ของ ผู้สังเกตการณ์หรือผู้มองเห็น วัตถุ ระนาบรับภาพ และลักษณะการฉาย

ภาพฉายที่ใช้ในการเขียนแบบเทคนิคมี 4 ประเภท ซึ่งใช้กันอยู่ในวงการวิศวกรรม และสถาปัตยกรรม

1.4.1 ภาพฉายตั้งฉาก (Orthographic Projection)

ภาพฉายตั้งฉาก มีหลังการดังนี้คือ (ดูรูปที่ 1.5)

1. ต้องวางวัตถุให้ระนาบอ้างอิงหรืออาจเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า ระนาบสำคัญของวัตถุ (Reference Planes or Principle Planes) ขนานกับระนาบรับภาพ โดยทั่วไปจะกำหนดให้ระนาบอ้างอิงของวัตถุมี 3 ด้าน คือระนาบด้านหน้า ด้านข้าง และด้านบน ดังนั้นภาพฉายตั้งฉากจึงต้องแสดงหลายวิว เหตุผลที่



รูปที่ 1.5 ภาพฉายตั้งฉาก (Orthographic Projection)

วางวัตถุในลักษณะดังกล่าวก็เพื่อให้ภาพฉายที่ปรากฏบนระนาบรับภาพมีขนาดและรูปร่างเหมือนจริง

2. ผู้สังเกตการณ์อยู่ที่จุดอนันต์

3. ลำแสงฉาย (ต่อไปจะใช้สัญญลักษณ์เป็นลูกศรมีการกำกับด้วยตัว LS หมายถึงเส้นสายตา Line of Sight) จะเป็นเส้นขนานและจะต้องตั้งฉากกับระนาบรับภาพ

มีข้อสังเกตุเกี่ยวกับตำแหน่งของระนาบรับภาพดังนี้ ในระบบภาพฉายมุมที่ 3 ระนาบรับภาพจะวางระหว่างวัตถุกับผู้สังเกตการณ์ตามที่แสดงในรูป 1.4 แต่ระบบภาพฉายมุมที่ 1 วัตถุจะอยู่ระหว่างผู้สังเกตการณ์กับระนาบรับภาพ

1.4.2 ภาพฉายแอกโซโนเมตริก (Axonometric Projection)

ภาพฉายแอกโซโนเมตริก มีหลักการดังนี้คือ(ดูรูปที่ 1.6)

1. วางวัตถุให้ระนาบอ้างอิงทั้งสามของวัตถุเอียงทำมุมกับระนาบรับภาพ

2. ผู้สังเกตการณ์อยู่ที่จุดอนันต์

3. ลำแสงที่ฉายจะเป็นเส้นขนานและจะต้องตั้งฉากกับระนาบรับภาพ

ภาพฉายแบบนี้แสดงเพียงวิวเดียว จะเห็นระนาบอ้างอิงของวัตถุทั้งสามด้านปรากฏบนรูปเดียวกัน

1.4.3 ภาพฉายออบบลิก (Oblique Projection)

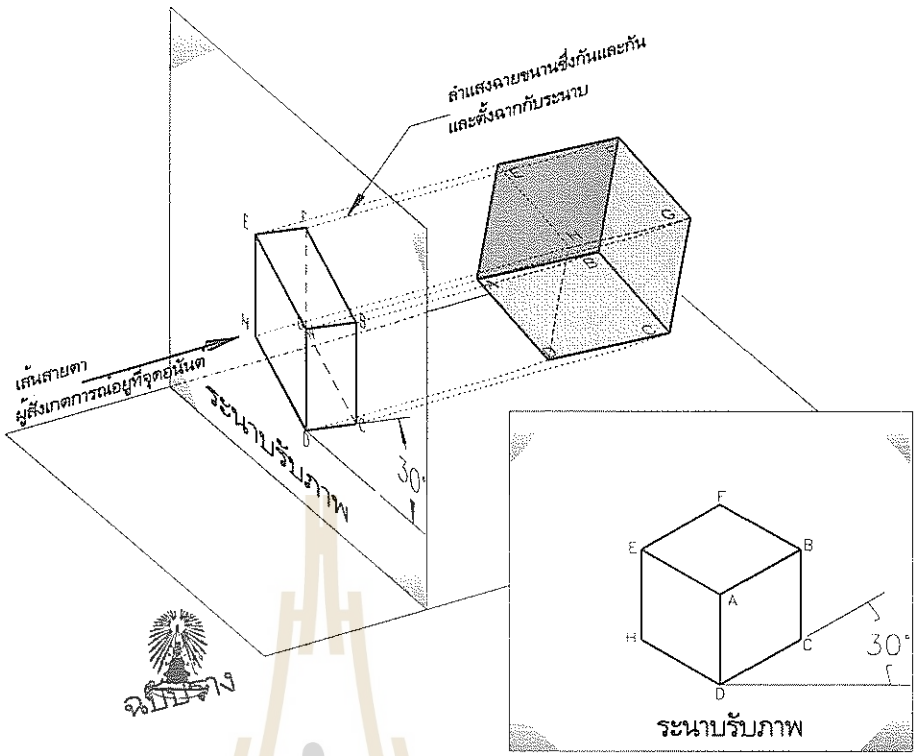
ภาพฉายออบบลิก มีหลักการดังนี้คือ (ดูรูปที่ 1.7)

1. วางวัตถุให้ระนาบอ้างอิงด้านหน้าขนานกับระนาบรับภาพ

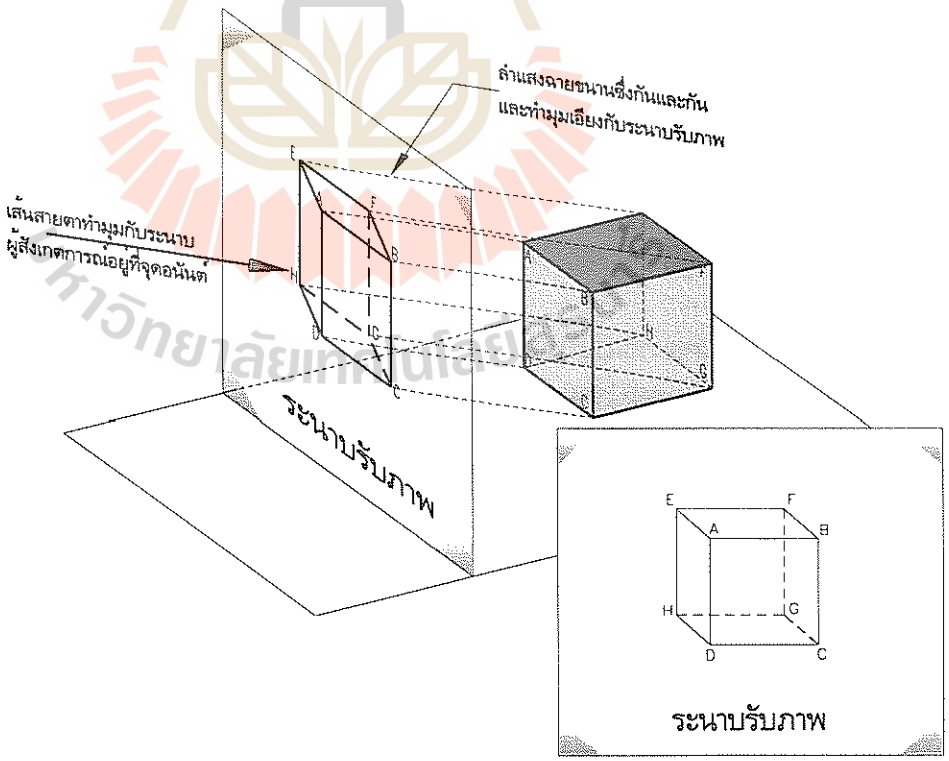
2. ผู้สังเกตการณ์อยู่ที่จุดอนันต์

3. ลำแสงที่ฉายจะเป็นเส้นขนานแต่จะเอียงทำมุมกันระนาบรับภาพ

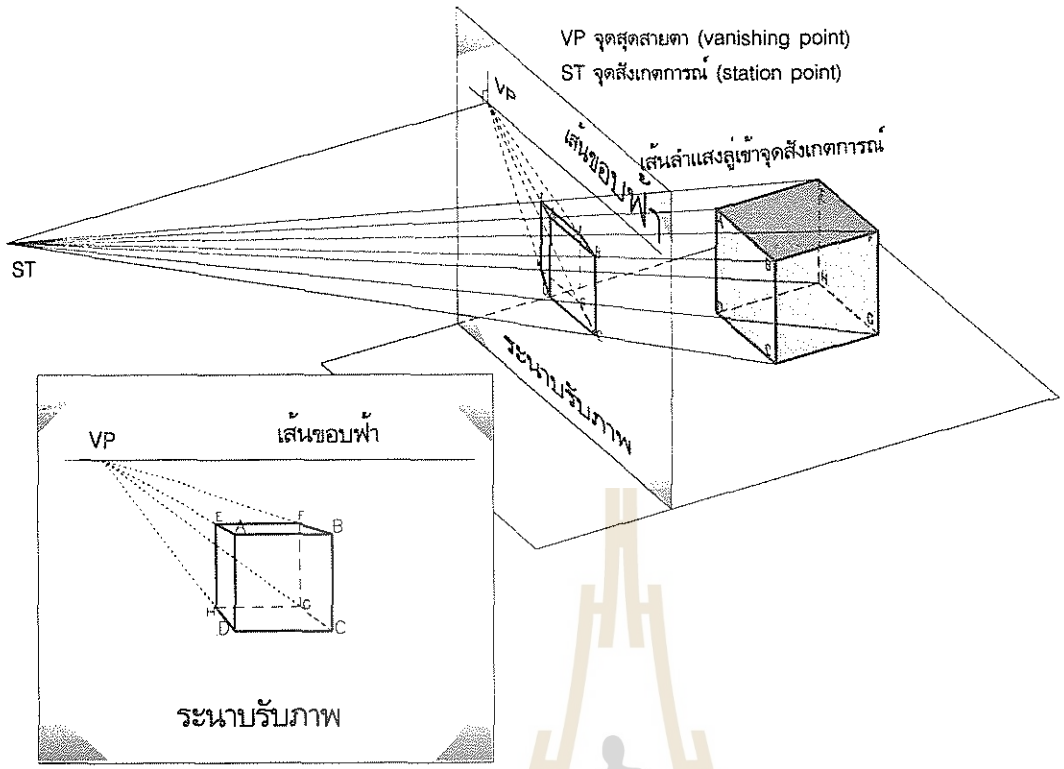
ภาพฉายแบบนี้แสดงเพียงวิวเดียว ลักษณะของรูปภาพจะเห็นว่า ระนาบด้านหน้าของวัตถุเหมือนเดิมไม่บิดเบี้ยว และมีขนาดจริง ส่วนความลึกนั้นขึ้นอยู่กับมุมของลำแสงที่ฉายกระทำกับระนาบรับภาพ



รูปที่ 1.6 ภาพฉายแอกโซโนเมตริก (Axonometric Projection)



รูปที่ 1.7 ภาพฉายออบบลิก (Oblique Projection)



รูปที่ 1.8 ภาพฉายทัศนียภาพ (Perspective Projection)

1.4.4 ภาพฉายทัศนียภาพ (Perspective Projection)

ภาพฉายทัศนียภาพ มีหลักการดังนี้คือ (ดูรูปที่ 1.8)

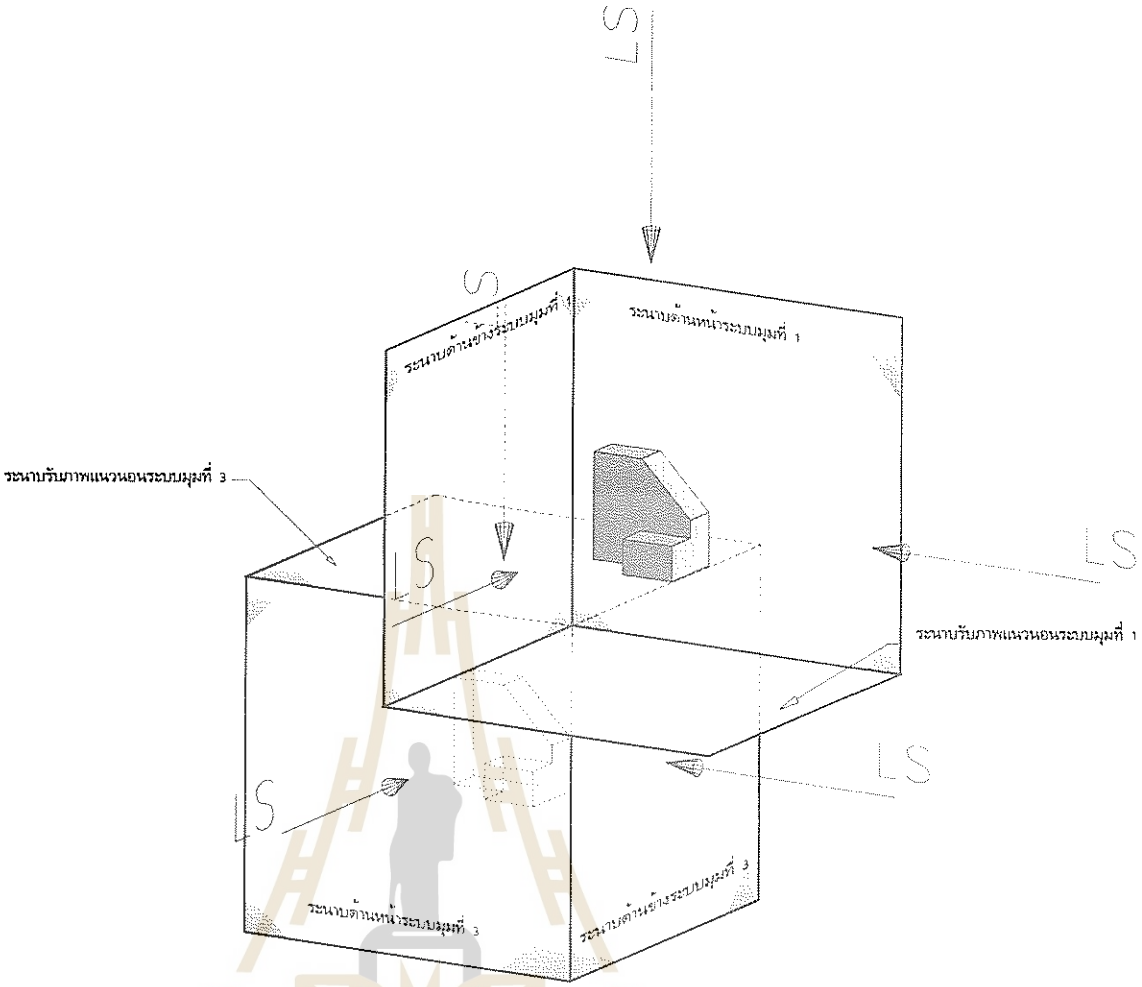
1. วางวัตถุให้ระนาบอ้างอิงขนานกับระนาบรับภาพ
2. ผู้สังเกตการณ์อยู่ห่างโดยมีระยะที่แน่นอนจากวัตถุ
3. ลำแสงฉายสู่เข้าหาจุดสังเกตการณ์และทำมุมเอียงกับระนาบรับภาพ

ภาพฉายแบบนี้แสดงวิวเดียวซึ่งภาพที่เห็นจะคล้ายกับภาพที่ปรากฏแก่สายตาเวลามองทิวทัศน์ระยะไกลๆ

1.5 ภาพฉายตั้งฉากระบบมุมที่ 1 และระบบมุมที่ 3 (First and Third Angle Orthographic Projection)

ได้กล่าวมาแล้วว่า ภาพฉายตั้งฉากสามารถเขียนได้ 2 วิธี คือวิธีของระบบมุมที่ 1 (First Angle Orthographic Projection) และวิธีของระบบมุมที่ 3 (Third Angle Orthographic Projection)

รูปที่ 1.9 แสดงหลักการของการเห็นภาพของวัตถุชิ้นเดียวกัน การมองภาพมาจากจุดเดียวกัน แทนด้วยลูกศรมีอักษรกำกับ LS หมายถึงเส้นสายตา (Line of Sight) ในระบบมุมที่ 1 ตำแหน่งวัตถุอยู่ระหว่างระนาบรับภาพ กับผู้สังเกตุ ส่วนระบบมุมที่ 3 ระนาบรับภาพจะอยู่ระหว่างวัตถุกับผู้สังเกตุ ดังนั้นภาพฉายที่เกิดจากสองระบบจะเหมือนกัน ทั้งสองระบบเส้นสายตาจะตั้งฉากกับระนาบรับภาพเสมอ การเห็นภาพจะมองจากหลายทิศทางซึ่งแต่ละทิศทางจะต้องตั้งฉากซึ่งกันและกัน ส่วนใหญ่ทิศทางการมองจะเป็นด้านหน้าของวัตถุ ด้านข้างจะเป็นซ้ายหรือขวาก็ได้ และอีกทิศทางหนึ่งคือมองจากด้านบนของวัตถุ

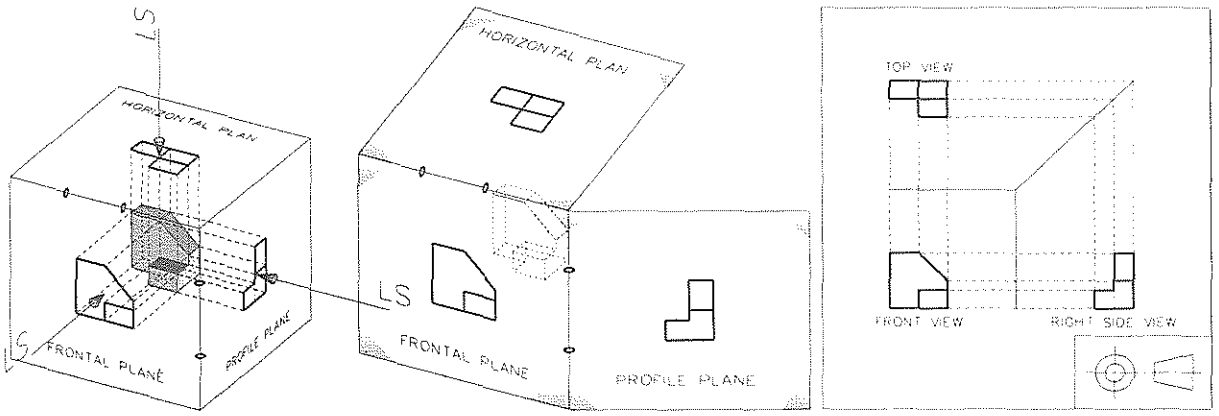


รูปที่ 1.9 ภาพฉายระบบมุมที่ 1 และระบบมุมที่ 3

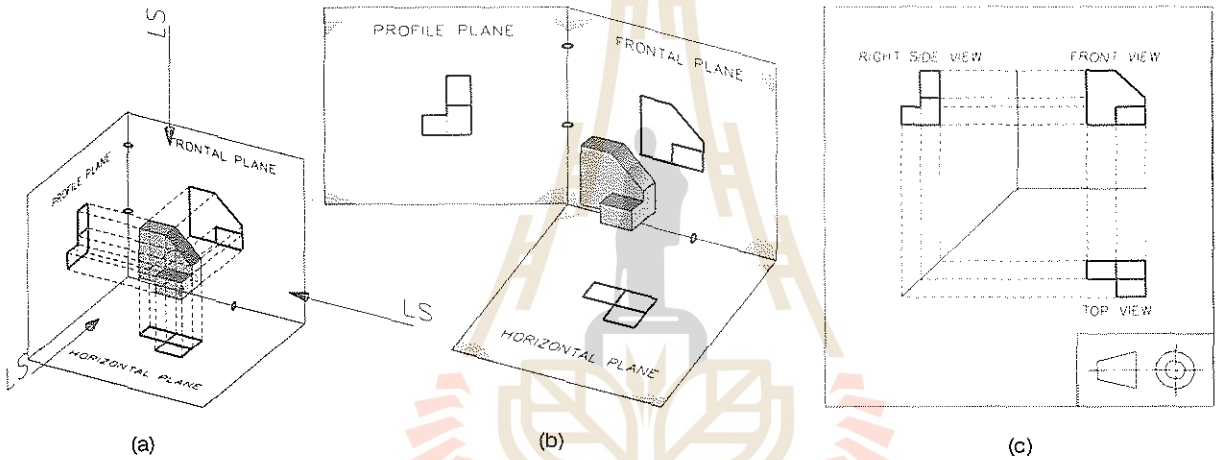
ภาพจะต้องปรากฏที่ระนาบรับภาพโดยการฉายภาพหรือโปรเจคไปในทิศทางตั้งฉากกับระนาบรับภาพ ดั้งนั้นแนวของเส้นที่โปรเจคไปตกบนระนาบจึงขนานกันหมด เนื่องจากระนาบรับภาพอยู่ในตำแหน่งที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันในสามมิติ แต่ภาพจะวางบนระนาบ 2 มิติในการเขียนแบบ ดังนั้นจึงต้องคลี่ระนาบรับภาพออกให้เป็นระนาบเดียวกัน การคลี่ระนาบจะต้องถือเอาระนาบรับภาพด้านหน้าเป็นหลักเสมอไม่ว่าจะเป็นระบบใด ในรูปที่ 1.10 และ 1.11 รูป (a) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างวัตถุ ระนาบและเส้นสายตาของทั้งสองระบบ รูป (b) แสดงวิธีการคลี่ระนาบรับภาพของทั้งสองระบบ โดยการคลี่ให้ระนาบแนวนอนและด้านข้างมาอยู่บนระนาบเดียวกันกับระนาบรับภาพด้านหน้า การเขียนภาพฉายและสัญลักษ์ของระบบจะแสดงที่รูป 1.10 และ 1.11 ภาพ (c) โดยทั่วไปการแสดงภาพฉายจะเขียนบอกตำแหน่งภาพกำกับไว้ที่ใต้หรือบนภาพด้วย

เปรียบเทียบกันแล้วจะเห็นว่า ภาพฉายตั้งฉากทั้งสองระบบนั้นจะแตกต่างที่ตำแหน่งของภาพหรือวิวด้านข้างและด้านบน อย่างไรก็ดีเพื่อไม่ให้สับสนในการอ่านภาพ แบบจะต้องมีสัญญลักษ์ของระบบกำกับเสมอโดยเฉพาะในแบบระบบมุมที่ 1 จะต้องมีสัญญลักษ์ของระบบกำกับทุกแบบ

ในหนังสือเล่มนี้จะใช้ระบบมุมที่ 1 ในภาคเขียนแบบ สำหรับในภาคของเรขาคณิตพรรณนาจำเป็นต้องอธิบายด้วยระบบมุมที่ 3 ซึ่งเป็นที่ปฏิบัติโดยทั่วไปของวิชานี้ นอกจากนั้นในตำรานี้อาจใช้คำว่าภาพหรือ วิว ในความหมายเดียวกัน



รูปที่ 1.10 ภาพฉายระบบมุมที่ 3



รูปที่ 1.11 ภาพฉายระบบมุมที่ 1

1.6 สรุป

สรุปสาระของบทนี้คือ

1 เพื่อให้เข้าใจการสื่อสารด้วยภาพหรือแบบเทคนิค

2 เพื่อให้เข้าใจวิวัฒนาการของแบบเทคนิคเรขาคณิตบรรยายเป็นพื้นฐานของภาพฉายตั้งฉากโมเดล 3 มิติเป็นวิธีการที่จะมีความสำคัญต่อไป ในยุคที่เทคโนโลยีคอมพิวเตอร์พัฒนาอย่างรวดเร็ว

3 เพื่อให้ทราบว่ามาตรฐานและสัญนิยมเป็นหลักที่ต้องยึดและปฏิบัติในการสื่อสารด้วยวิธีนี้

4 เพื่อให้เข้าใจภาพฉายประเภทต่าง ๆ ซึ่งจะกล่าวในรายละเอียดในบทต่อ ๆไป

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

หลักการพื้นฐานของเรขาคณิตพรรณนา

2.1 เรขาคณิตพรรณนา

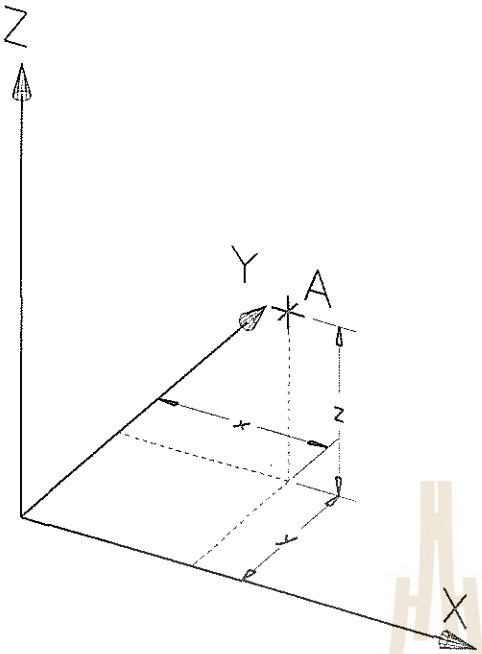
เป็นวิชาที่กล่าวถึง จุด เส้นตรง ระนาบ ผิวโค้ง และรูปทรงเรขาคณิต ที่เกี่ยวกับงานแบบวิศวกรรม เนื่องด้วยวิชาเขียนแบบวิศวกรรมเป็นวิชาที่เน้นเรื่องภาพฉายตั้งฉาก (Orthographic Projection) ดังนั้นจุด เส้น ระนาบ และรูปทรงเรขาคณิต จึงถูกแสดงโดยภาพฉายตั้งฉาก และเป็นการเขียนภาพฉายตั้งฉากในระบบมุมที่ 3 ด้วย

วิชาเรขาคณิตพรรณนา เป็นวิธีที่ช่วยหาความยาวของระยะทางเช่นระยะที่สั้นที่สุดระหว่าง 2ตำแหน่งที่กำหนดให้ หารอยตัดของระนาบ 2 ระนาบ หารอยตัดของระนาบกับผิวโค้ง การคลี่แผ่นโค้งเพื่อคำนวนหาพื้นที่เป็นต้น งานที่กล่าวถึงเหล่านี้จะพบมากในอุตสาหกรรมเกี่ยวกับการขึ้นรูปโลหะแผ่นและงานประกอบโลหะแผ่น

2.2 พิกัดตำแหน่งของที่ว่าง (Coordinate Space)

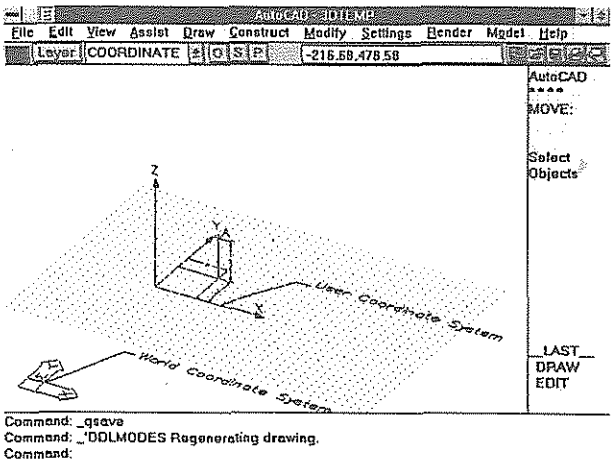
ที่ว่างคืออาณาบริเวณที่ว่างเปล่าไร้ซึ่งขอบเขต ในวิชาคณิตศาสตร์ ตำแหน่งใดๆในที่ว่างจะถูกกำหนดด้วยระบบพิกัดตำแหน่ง ซึ่งในที่นี้จะใช้ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinate System) รูปที่ 2.1 แสดงระบบพิกัดคาร์ทีเซียนที่ใช้กันในวิชาคณิตศาสตร์

สำหรับการเขียนแบบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ (CAD) ระบบพิกัดใน CAD จะใช้ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน แต่จะผู้ใช้สามารถกำหนดพิกัดของตนเองขึ้นมาได้โดยเปรียบเทียบกับพิกัดเดิมที่เรียกว่า



รูปที่ 2.1 ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน

พิกัดโลก (World Coordinates) สำหรับพิกัดใหม่ที่ถูกกำหนดขึ้นโดยผู้ใช้นั้นเรียกว่าพิกัดท้องถิ่น (Local Coordinates) หรือพิกัดที่ผู้ใช้สร้างขึ้น (User-Coordinate System หรือ UCS) ซึ่งแสดงดังรูปที่ 2.2

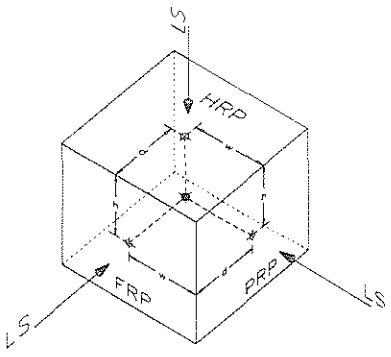


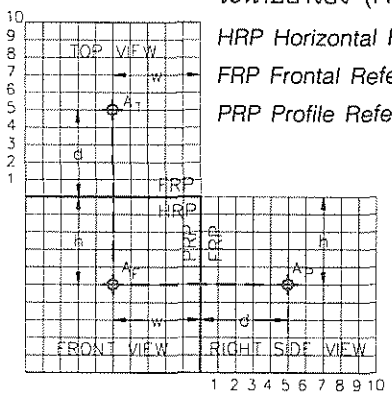
รูปที่ 2.2 ระบบพิกัดในCAD

2.3 ระนาบอ้างอิง (Reference Planes)

ในการเขียนแบบภาพฉายตั้งฉากระบบมุมที่ 3 นั้น ภาพของวัตถุจะปรากฏที่ระนาบรับภาพ (Plane of Projection) ซึ่งประกอบด้วย ด้านหน้า ด้านข้าง และด้านบน ในวิชาเรขาคณิตพรรณนานี้ เราจะเรียกระนาบเหล่านี้ใหม่ภายใต้ชื่อว่า ระนาบอ้างอิง (Reference plane) โดยกำกับตำแหน่งแต่ละระนาบเป็นด้านหน้า ด้านข้างและด้านบนเช่นกัน เหตุผลที่ต้องเป็นเช่นนี้เพราะ เราจะเปลี่ยนการบอกตำแหน่งในที่ว่าง ณ.จุดใดห่างจากจุดกำเนิดของพิกัดคาร์ทีเซียน มาเป็นระยะระหว่างจุดนั้นไปยังระนาบอ้างอิงแต่ละด้าน ซึ่งในการแสดงภาพฉายจะต้องจัดให้ระนาบอ้างอิงวางตามตำแหน่งดังรูปที่ 2.3

การทำเช่นนี้ จะทำให้ดูง่ายเวลาเขียนรูปบนกระดาษเขียนแบบซึ่งเป็น 2 มิติ จะทำให้เห็นความสัมพันธ์ดังนี้ บนกระดาษเขียนแบบ ภาพฉายด้านบนจะเห็นระนาบอ้างอิงด้านหน้า (Frontal Reference Plane) และด้านข้าง (Profile Refer-





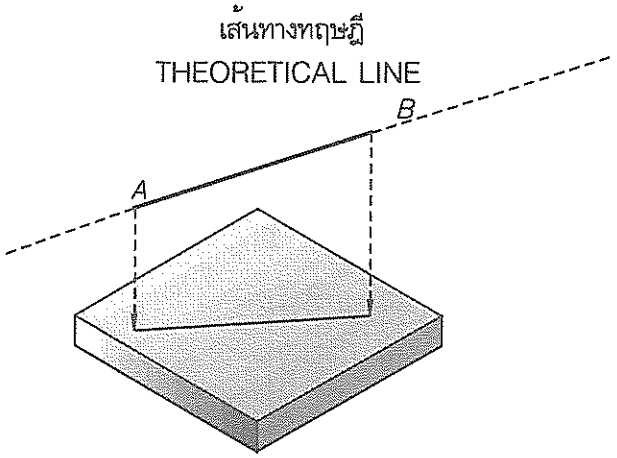
ระนาบอ้างอิง (Reference Plane)

HRP Horizontal Reference Plane ระนาบอ้างอิงด้านบน

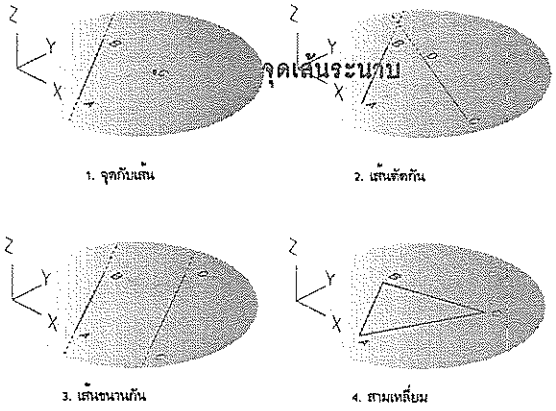
FRP Frontal Reference Plane ระนาบอ้างอิงด้านหน้า

PRP Profile Reference Plane ระนาบอ้างอิงด้านข้าง

รูปที่ 2.3 พิกัดของจุดกับระนาบอ้างอิง



รูปที่ 2.4 เส้นทางทฤษฎี



รูปที่ 2.5 การเกิดระนาบ

ence Plane) เป็นสันของระนาบนั้นๆ(Edge View) เมื่อมองที่วิวด้านหน้า ระนาบอ้างอิงด้านบน (Horizontal Reference Plane) และด้านข้างก็ปรากฏเป็นสัน ทำนองเดียวกันถ้ามองที่วิวด้านข้าง ระนาบด้านบนและด้านหน้าก็ปรากฏเป็นสัน ทำให้ง่ายต่อการหาตำแหน่งในการสร้างรูป**โดยการวัดระยะเทียบกับสันของระนาบอ้างอิง**

เพื่อให้การเขียนแบบไม่ต้องเปลืองพื้นที่มากในแบบแทนที่จะเห็นสันของระนาบอ้างอิงครบถ้วนในแต่ละวิว เราจึงขยับวิวมาต่อกันตัว*อย่างเช่นเส้นแนวนอนที่กั้นระหว่างวิวด้านหน้าและด้านบน จึงเป็นเส้นร่วมที่แสดงว่า ถ้ามองที่วิวบน เส้นนี้คือสันของ **FRP** (Frontal Reference Plane) ถ้ามองวิวด้านหน้าเส้นแนวนอนนี้กลายเป็นสันของ **HRP** (Horizontal Reference Plane) หลักการเดียวกันนี้ก็ถูกใช้กับเส้นในแนวนอนและแนวดิ่งที่เหลือด้วย*

อย่างไรก็ดี การวางตำแหน่งของสันของระนาบก็ไม่ตายตัวว่าจะต้องอยู่ที่กึ่งกลางระหว่างวิว เราสามารถขยับไปที่ใดๆก็ได้ตามความเหมาะสม ซึ่งมักจะถูกกำหนดจากความจำกัดจำเขี่ยของพื้นที่บนกระดาษเขียนแบบนั้นเอง

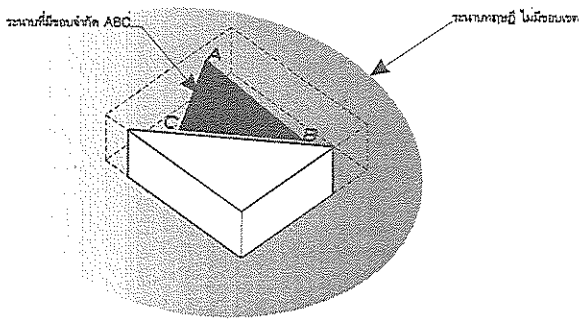
2.4 จุดเส้นและระนาบ

จุดคือวัตถุที่ไม่มีมิติในที่ว่าง การระบุตำแหน่งจะแสดงด้วยระยะห่างจากจุดนั้นไปยังจุดกำเนิด (Origin) ของพิกัดคาร์ทีเซียน ทาง X ทาง Y และทาง Z เท่าไร ทั้งนี้ ตำแหน่งของพิกัดคาร์ทีเซียนจะวางอยู่ที่ใดก็ได้***แต่ในวิชานี้ตำแหน่งของจุดจะเทียบกับสันของระนาบดังที่ได้กล่าวถึงแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา***

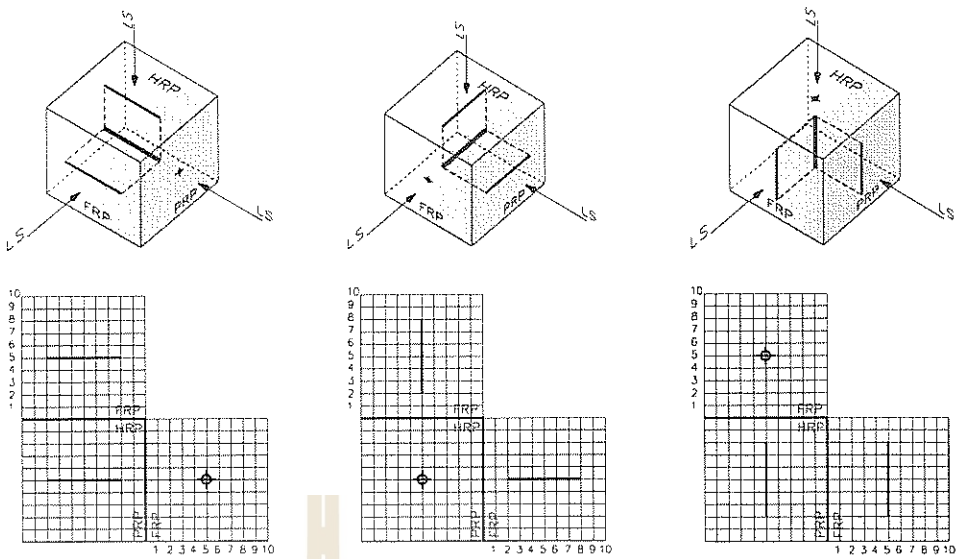
เส้นคือจุดหลายจุดที่วางต่อเนื่องในทิศทางใดทิศทางหนึ่ง เส้นตรงสามารถเกิดขึ้นได้จากจุดสองจุดแล้วลากเส้นเชื่อมต่อกัน เส้นมีมิติเดียวจึงถือว่าไม่มีความหนา

เส้นที่จะกล่าวถึงในวิชานี้หมายถึง**เส้นทางทฤษฎี**(Theoretical Line) คือเส้นตรงที่ไม่จำกัดความยาว แม้ว่าในกระดาษเขียนแบบจะปรากฏความยาวก็ตาม แต่ต้องเข้าใจเสมอว่า เส้นที่เห็นนั้นครอบคลุมถึงแนวของมันทั้งสองข้างด้วย ดังที่แสดงในรูป 2.4

ระนาบ คือวัตถุที่มี 2 มิติ ระนาบเกิดจาก



รูปที่ 2.6 ระนาบทางทฤษฎี



รูปที่ 2.7 เส้นปกติ

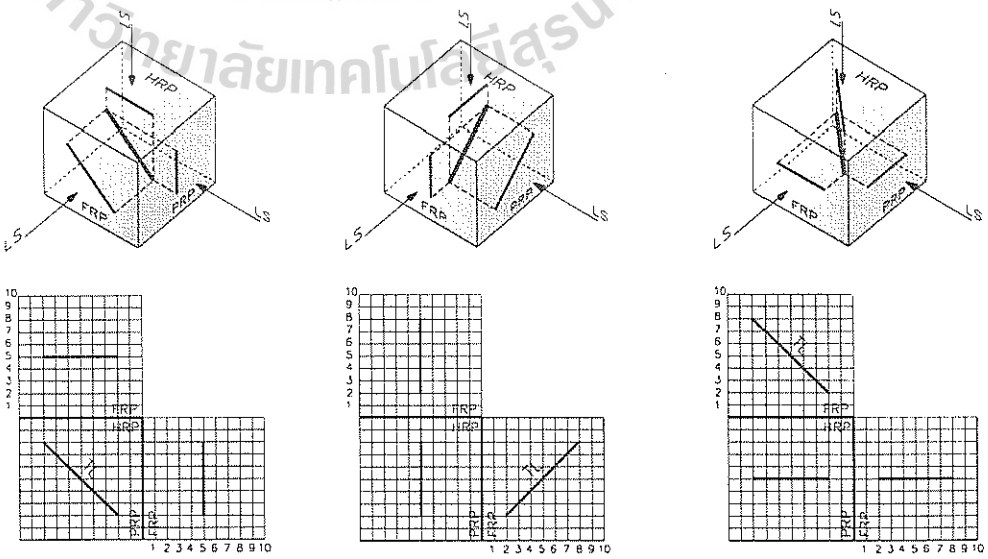
ความสัมพันธ์ระหว่างจุดและเส้น ซึ่งความสัมพันธ์เป็นไปได้ 4 แบบดังต่อไปนี้คือ

1. ระนาบเกิดจากจุด 1 จุดและเส้น 1 เส้น
2. ระนาบเกิดจากเส้น 2 เส้นตัดกัน
3. ระนาบเกิดจากเส้น 2 เส้นขนานกัน
4. ระนาบเกิดจากจุด 3 จุดหรือเกิดจากสามเหลี่ยม ทั้ง 4 กรณีแสดงที่รูป 2.5

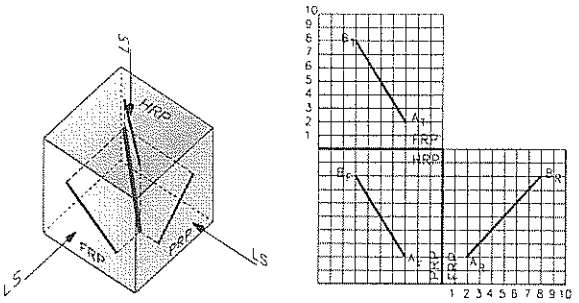
ระนาบทางทฤษฎี(Theoretical Plane) หมายถึงระนาบที่ไม่มีขอบเขตจำกัด เช่นเดียวกันกับเส้นทางทฤษฎี ในวิชานี้การเขียนระนาบอาจเขียนเป็น 3 เหลี่ยม หรือ 4 เหลี่ยมก็ได้ซึ่งเสมือนว่าระนาบนั้นมีขอบเขต แต่การเข้าใจที่แท้จะต้องครอบคลุมแนวที่แผ่กว้างออกไปทุกทิศทางซึ่งแสดงแรเงาให้ปรากฏในรูป2.6

2.5 ประเภทของเส้น

เส้นที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้หมายถึงเส้นตรง การจำแนกเส้นตรงออกเป็นประเภทต่างๆ ขึ้นอยู่กับตำแหน่งของเส้นเหล่านั้นสัมพันธ์อย่างไรกับระนาบอ้างอิง ทำให้ภาพที่ปรากฏให้เห็นที่วิวต่างๆปรากฏให้เห็นแตกต่างกัน ภาพที่เห็นที่วิวต่างๆอาจจะเป็นไปได้ดังนี้ คือ 1.เป็นจุด 2.เป็นเส้นตรงที่มีความยาวเท่าของ



รูปที่ 2.8 เส้นเอียง



รูปที่ 2.9 เส้นเทเอียง

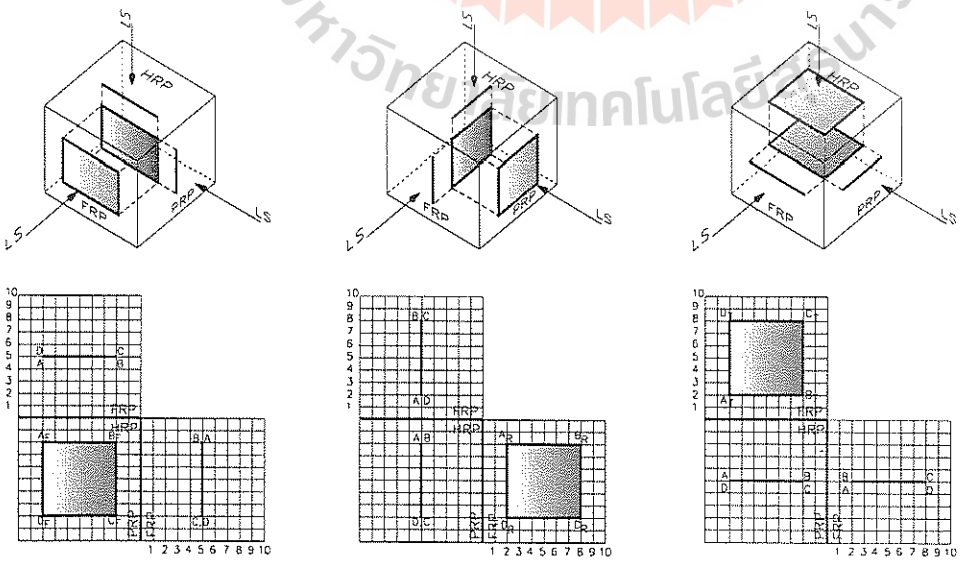
จริง (True Length เขียนตัวย่อกำกับด้วย TL) และ 3.เป็นเส้นที่สั้นกว่าความเป็นจริง เส้นแบ่งเป็นประเภทต่างๆดังต่อไปนี้คือ

2.5.1 เส้นปกติ (Normal Lines)

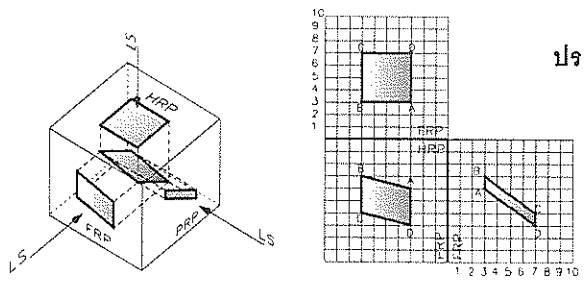
เส้นปกติเป็นเส้นทีวางขนานกันระนาบอ้างอิงสองด้าน ดังนั้นภาพที่แสดงบนระนาบอ้างอิงทั้งสองจึงเป็นความยาวจริง ส่วนวิวที่เหลือจะกลายเป็นจุด เส้นดังกล่าวนี้แสดงที่รูป 2.7

2.5.2 เส้นเอียง (Inclined Lines)

เส้นเอียงคือเส้นที่วางขนานกับระนาบอ้างอิงเพียงหนึ่งด้าน ซึ่งทำให้ปรากฏเป็นความยาวจริงที่วิวด้านนั้น ส่วนวิวอื่นๆอีกสองวิวภาพที่เห็นจะเป็นเส้นที่สั้นกว่าความยาวจริง ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.10 ระนาบปกติ



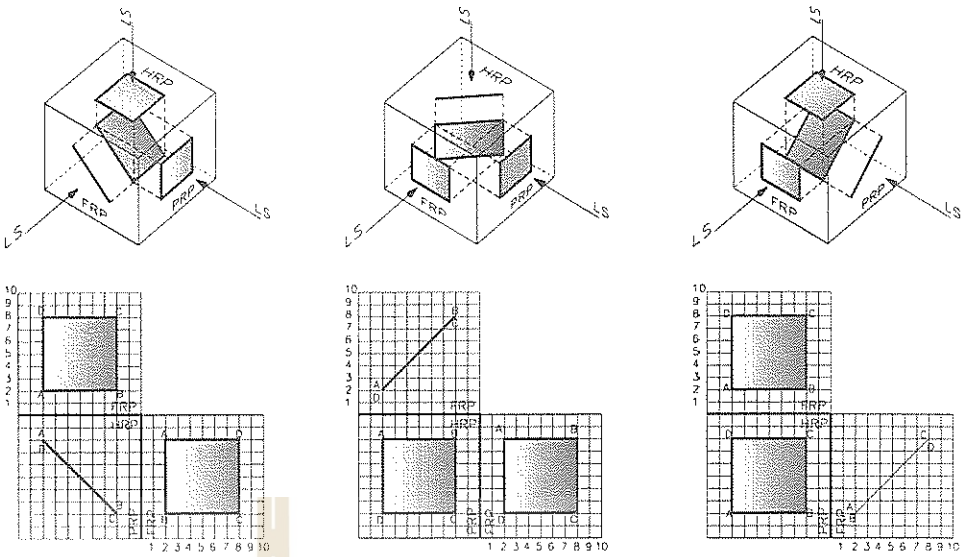
รูปที่ 2.11 ระนาบเทเอียง

2.5.3 เส้นเทเอียง (Oblique or Skew Lines)

เส้นเทเอียงคือเส้นที่วางเอียงทำมุมกับระนาบอ้างอิงทุกด้าน ภาพที่ปรากฏทุกวิวจึงสั้นว่าความยาวจริง ดังรูปที่ 2.9

ข้อสังเกตุ: จากลักษณะของเส้นสามประเภทที่ได้กล่าวถึงนั้น มีข้อสังเกตุที่ต้องสรุปดังนี้คือ

1. ถ้าแนวการฉายหรือโปรเจคชันตั้งฉากกับเส้น ภาพของเส้นในวิวถัดไปจะปรากฏเป็นความยาวจริง ซึ่งแสดงว่าเส้นวางขนานกับระนาบอ้างอิงนั้น พิจารณาที่รูป 2.8 ภาพซ้ายมือด้านล่าง จะเห็นว่าที่วิวบนหรือวิวด้านข้างแนวการฉายเส้นไปยังวิวด้านหน้ามีทิศทางตั้งฉากกับเส้น เส้นที่วิวด้านหน้าจะเป็นความยาวจริง ในบทถัดไปเราสามารถหาความยาวของเส้นด้วยการสร้างระนาบช่วย (Auxiliary Plane) ให้



รูปที่ 2.12 ระนาบเอียง

ขนานกันแนวเส้น ภาพที่ปรากฏบนวิวนั้นจะเป็นความยาวจริง

2. ถ้าแนวการฉายหรือโปรเจคชันขนานกับเส้นที่เป็นความยาวจริงไปยังวิวถัดไป ภาพของเส้นในวิวนั้นจะกลายเป็นจุด ดูรูป 2.7 ประกอบโดยพิจารณาการเกิดจุดของแต่ละภาพ

2.6 ประเภทของระนาบ

เช่นเดียวกันกับเส้น ตำแหน่งของระนาบเอียงทำมุมกับระนาบอ้างอิงทำให้เกิดการแบ่งระนาบออกเป็นประเภทต่างๆ มีหลักที่ว่าระนาบที่วางหันหน้าเข้าหาและขนานกับระนาบอ้างอิงจะปรากฏเป็นระนาบขนาดเท่าของจริง (True Size หรือกำกับด้วยตัวย่อเป็น TS) ที่วิวนั้น ระนาบถูกแบ่งดังนี้คือ

2.6.1 ระนาบปกติ(Normal Planes)

ระนาบปกติ คือระนาบที่ปรากฏเป็นเส้นตรงที่วิวสองวิว และวิวที่เหลือจะเป็นระนาบที่มีขนาดเท่าของจริง การที่จะเห็นระนาบเป็นเส้นตรงได้นั้นหมายความว่าระนาบต้องวางในลักษณะที่หันเอาสันของมันเข้าหาระนาบอ้างอิง (เรามักเรียกวิวเช่นนี้ว่า Edge View) ระนาบปกติแสดงดังรูปที่ 2.10

2.6.2 ระนาบเอียง (Inclined Planes)

ระนาบเอียงเป็นระนาบที่วางเอาสันหันเข้าหาระนาบอ้างอิงด้านเดียว จึงทำให้เอียงทำมุมกับระนาบอ้างอิงที่เหลืออีกสองด้าน ภาพที่ปรากฏจึงเป็นเส้นตรงที่วิวหนึ่งและเป็นระนาบที่มีขนาดไม่เท่ากับของจริงในวิวที่เหลือ ดูรูป 2.11

2.6.3 ระนาบเทเอียง (Oblique Planes)

ระนาบเทเอียงเป็นระนาบที่วางเอียงทำมุมกับระนาบอ้างอิงทั้งสามด้าน ภาพที่ปรากฏในทุกวิวจึงเป็นระนาบที่มีขนาดไม่เท่าขนาดจริงทั้งสามวิวแสดงที่รูป 2.11

2.7 สรุป

1. สิ่งที่ได้กล่าวถึงในบทนี้คือ จุด เส้น และระนาบ

2. การเขียนแบบในวิชาเรขาคณิตพรรณนานี้จะใช้ระยะระหว่างจุดกับสันของระนาบอ้างอิงในการหาตำแหน่งของจุดในวิวต่างๆ ระนาบอ้างอิงที่กล่าวในบทนี้เป็นระนาบปกติ (Normal Planes)

3. นอกจากนั้นยังให้ข้อสังเกตุเกี่ยวกับการเห็นความยาวจริงของเส้น และทิศทางการมองเส้นให้เป็นจุด (End View ของเส้น)

3

จุดเส้นระนาบ

3.1 กล่าวนำ

จุด เส้น ระนาบ ที่จะกล่าวในบทนี้เป็นความสัมพันธ์กัน ของสิ่งเหล่านี้ในที่ว่าง และมีการแสดงออกด้วยภาพฉาย ในบทที่ผ่านมา การเขียนภาพฉายมักจะแสดงถึงสามวิว แต่ในบทนี้การเขียนจะแสดงเพียงแค่สองวิวก็พอ ดังนั้นจึงจำเป็นที่ผู้เขียนจะต้องเข้าใจอย่างดี เกี่ยวกับการหาตำแหน่งของจุด เส้น ระนาบ กับระนาบอ้างอิง ในบทนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์เช่น จุดที่อยู่บนเส้น เส้นตัดกัน การเห็นเส้นที่ทับกันเองหรือทับกับระนาบที่วิวต่างๆว่าเส้นไหนอยู่บนล่าง และหน้าหลัง เส้นที่มีแนวตั้งฉากกัน เส้นขนาน เส้นเสียบทะลุระนาบ และระนาบตัดกันเป็นต้น

3.2 จุดบนเส้น

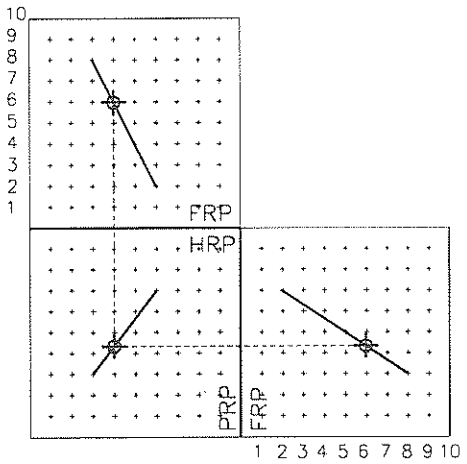
จุดที่อยู่บนเส้นในที่ว่าง เมื่อเขียนภาพฉายตำแหน่งของจุดบนเส้นในแต่ละวิวจะต้องโปรเจคตรงกันหมด แสดงดังรูปที่3.1

3.3 เส้นตัดกัน

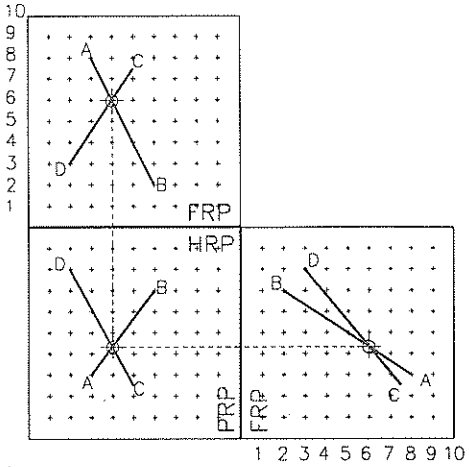
อาศัยหลักการเดียวกันกับหัวข้อ 3.1 โดยการให้จุดตัดกันของทั้งสองเส้นเป็นจุดบนแต่ละเส้น ดังนั้นจุดตัดในแต่ละวิวของภาพฉาย จะต้องโปรเจคตรงกัน แสดงในรูป 3.2

3.4 เส้นซ้อนกัน

เส้นที่ไม่ตัดกันและไม่ขนานกัน จะต้องเห็นจุด



รูปที่ 3.1 จุดบนเส้น

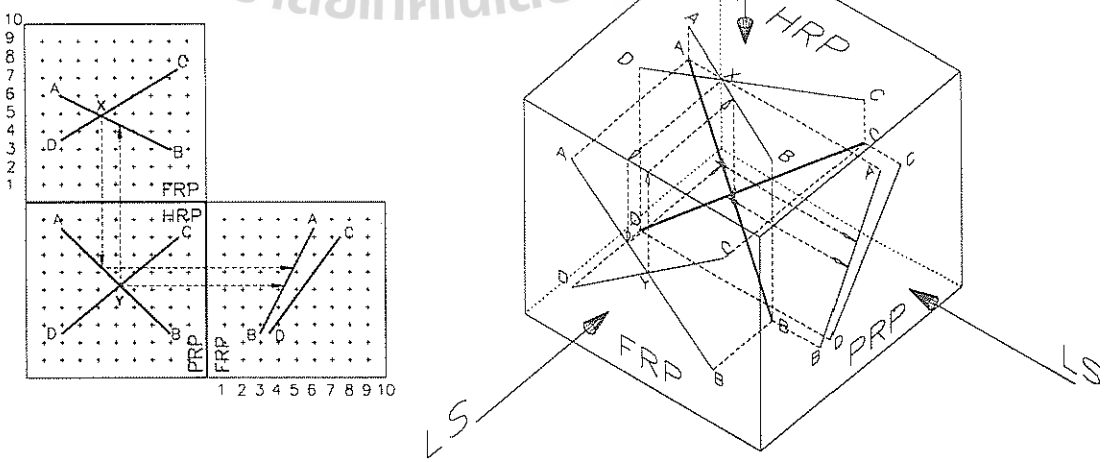


รูปที่ 3.2 เส้นตัดกัน

ซ้อนกันบนภาพฉายของแต่ละวิว แต่จุดที่เส้นทั้งสองพาดซ้อนกันของแต่ละวิวเมื่อโปรเจคจะไม่ตรงกัน อย่างไรก็ดี ในที่นี้จะแสดงให้ทราบว่าถ้ามองที่วิวด้านบน ณ.ตำแหน่งที่เส้นซ้อนกัน เส้นไหนอยู่บน เส้นไหนอยู่ล่าง ทำนองเดียวกันถ้ามองที่วิวด้านหน้า ณ ตำแหน่งที่เส้นซ้อนกัน เส้นไหนอยู่หน้าและเส้นไหนอยู่หลัง

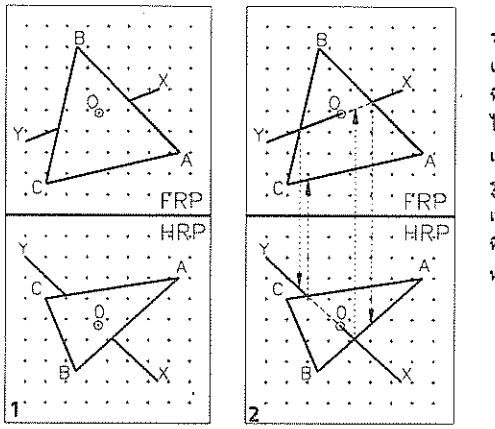
พิจารณารูปที่ 3.3 ที่วิวด้านบน ถ้าโปรเจคจุดซ้อนกันของเส้น AB และ CD คือจุด X มายังวิวด้านหน้า แนวโปรเจคพบกับเส้น AB ก่อน แสดงว่าที่วิวด้านบนนี้เส้น AB อยู่เหนือเส้น CD ทำนองเดียว ที่วิวด้านหน้าถ้าโปรเจคจุดซ้อนกันของเส้นคือจุด Y ไปยังวิวด้านบน แนวโปรเจคจะพบเส้น AB ก่อนเส้น CD แสดงว่าที่วิวด้านหน้า เส้น AB อยู่หน้าเส้น AB สำหรับรูป 3.3 แสดงให้เห็นวิวด้านข้างด้วย ซึ่งที่วิวนี้ เส้น AB อยู่หน้าและเหนือเส้น CD เป็นการพิสูจน์ให้เห็นว่าการเปรียบเทียบระดับของเส้น สามารถอาศัยวิวเพียงสองวิวเท่านั้น เพื่อแสดงให้เห็นชัดเจนขึ้นว่าข้อพิสูจน์เหล่านี้เป็นจริง รูป 3.3 ได้แสดงภาพ 3 มิติให้เห็นด้วย

อาศัยหลักการเดียวกันนี้ สามารถนำมาประยุกต์กับการซ้อนกันของระนาบกับเส้น เนื่องจากขอบของระนาบที่แสดงในภาพเป็นเส้นตรง ดังนั้นการเห็นการซ้อนระหว่างระนาบกับเส้นก็จึงอาศัยหลักของ



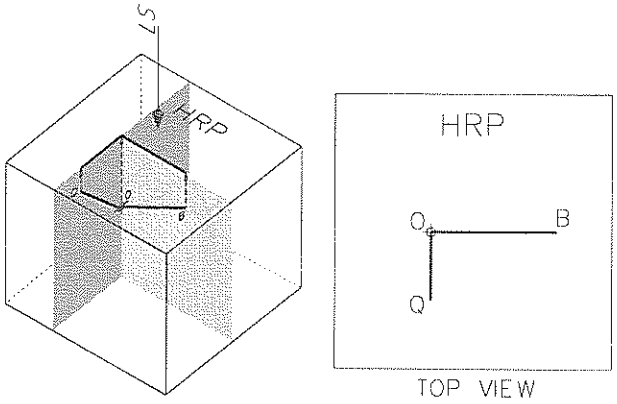
รูปที่ 3.3 เส้นซ้อนกัน

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



ระนาบ ABC ถูกเส้น XYเสียบทะลุที่จุด O รูปที่ 1 ยังไม่รู้ว่าส่วนไหนของเส้นถูกระนาบบัง รูปที่ 2 แสดงวิธีหาเส้นทึบและเส้นประที่ปรากฏที่วิวด้านหน้าและด้านบน

รูปที่ 3.4 การเห็นเส้นซ้อนระนาบ



รูปที่ 3.6 เส้นที่ไม่ตั้งฉากกัน

การซ้อนกันระหว่างเส้นขอบของระนาบกับเส้น ทำให้สามารถรู้ได้ว่าบริเวณใดที่วิวด้านบน ที่ระนาบอยู่เหนือเส้นและบริเวณใดที่ระนาบอยู่หน้าเส้นที่วิวด้านหน้า ดูรูป 3.4 ประกอบ

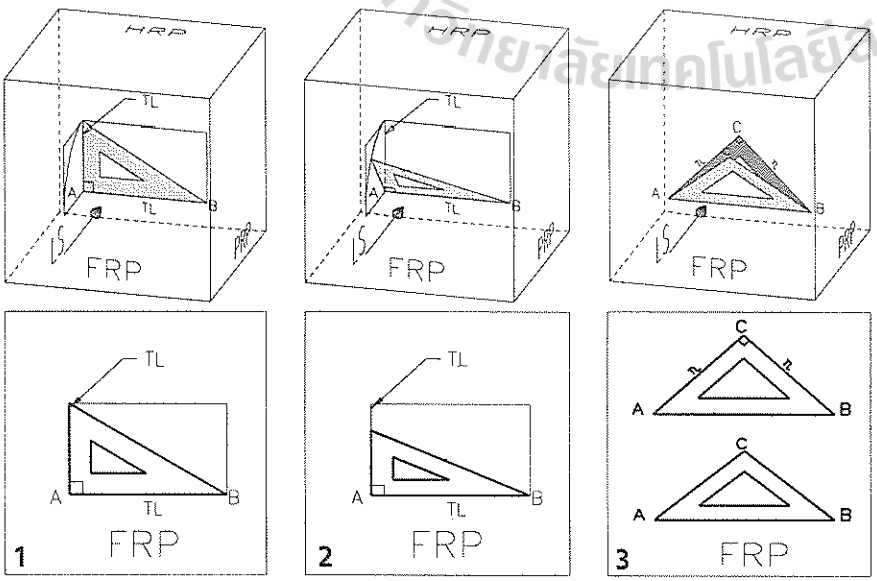
จากรูป 1 กำหนดจุด O เป็นที่เส้นเสียบทะลุระนาบ ABC เส้น XY ที่ผ่านระนาบยังไม่ถูกเขียน เพราะยังไม่ทราบว่าสัมพันธ์อย่างไรกับระนาบ

รูปที่ 2 แสดงวิธีหาโดยพิจารณาที่วิวด้านบนก่อน ว่าระนาบอยู่เหนือเส้นหรือเส้นอยู่เหนือระนาบ โดยการโปรเจคจุดซ้อนกันของเส้น XY กับด้าน CB ลงมาที่วิวด้านหน้าตามแนวลูกศร ซึ่งจะพบกับเส้น XY ก่อน แสดงว่าที่วิวบน เส้น XY อยู่เหนือระนาบ ดังนั้นให้เขียนเส้นทึบจากรอยซ้อนกันไปจนถึงจุด O

ทำนองเดียวกันที่วิวด้านบน ให้โปรเจคจากจุดทับกันระหว่างเส้น XY กับด้าน AB ลงมาที่วิวด้านหน้า ตามแนวลูกศร ก็จะพบขอบระนาบ AB ก่อน แสดงว่าที่วิวด้านบนเส้น XY อยู่ใต้ระนาบ ให้เขียนเส้นประจากจุดซ้อนกันไปยังจุด O สำหรับการหาตำแหน่งหน้าและหลังระหว่างเส้นกับระนาบก็ทำเช่นเดียวกันดังรูปที่2

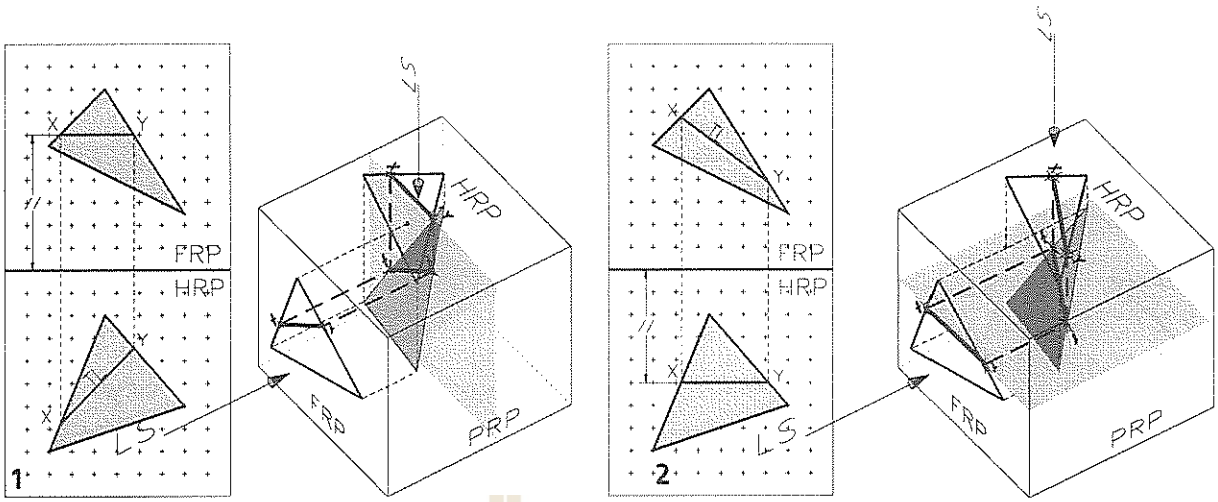
3.5 เส้นตั้งฉากกัน

เส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกันนี้อาจจะ**ไม่ตัดกันหรือตัดกันก็ได้**เมื่อปรากฏเป็นภาพฉายจะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้คือ**ถ้าเส้นใดเส้นหนึ่งหรือทั้ง**



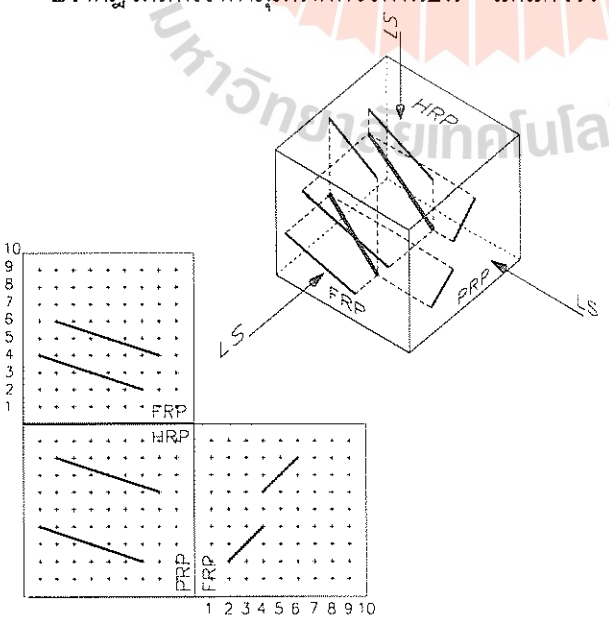
เส้นตั้งฉากกัน

รูปที่ 3.5



รูปที่ 3.7 เส้นเอียงบนระนาบ (การหาความยาวจริง TL)

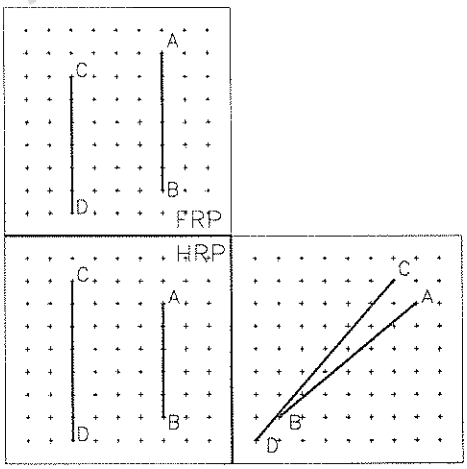
สองเส้นบนภาพฉายเป็นความยาวจริง (TL) มุมที่เห็นจะต้องเป็นมุมฉากด้วย รูป 3.5 แสดงการหมุนไม้ฉาก รูปที่ 1 ไม้ฉากอยู่ในตำแหน่งที่ด้านประกอบมุมฉากปรากฏเป็นความยาวจริงที่ภาพฉายด้านหน้า มุมบนภาพฉายก็จะเห็นเป็นมุมฉากด้วย รูปที่ 2 จะเห็นว่าไม้ฉากอยู่ในตำแหน่งที่ด้านประกอบมุมฉากเป็นความยาวจริงเพียงด้านเดียวที่ภาพฉายด้านหน้าด้าน มุมที่เห็นก็ยังเป็นมุมฉากอยู่ สำหรับรูปที่ 3 รูปล่าง ด้านประกอบมุมฉากไม่เป็นความยาวจริงจึงไม่เห็นเป็นมุมฉากที่ภาพฉายด้านหน้า รูป 3.6 เป็นภาพ 3 มิติของเส้น OBและ OQ ทำมุมกัน และปรากฏให้เห็นว่าทำมุมฉากที่วิวด้านบน แต่แท้จริงแล้วเส้นทั้งสองไม่ได้ทำมุมฉากซึ่งกันและกัน



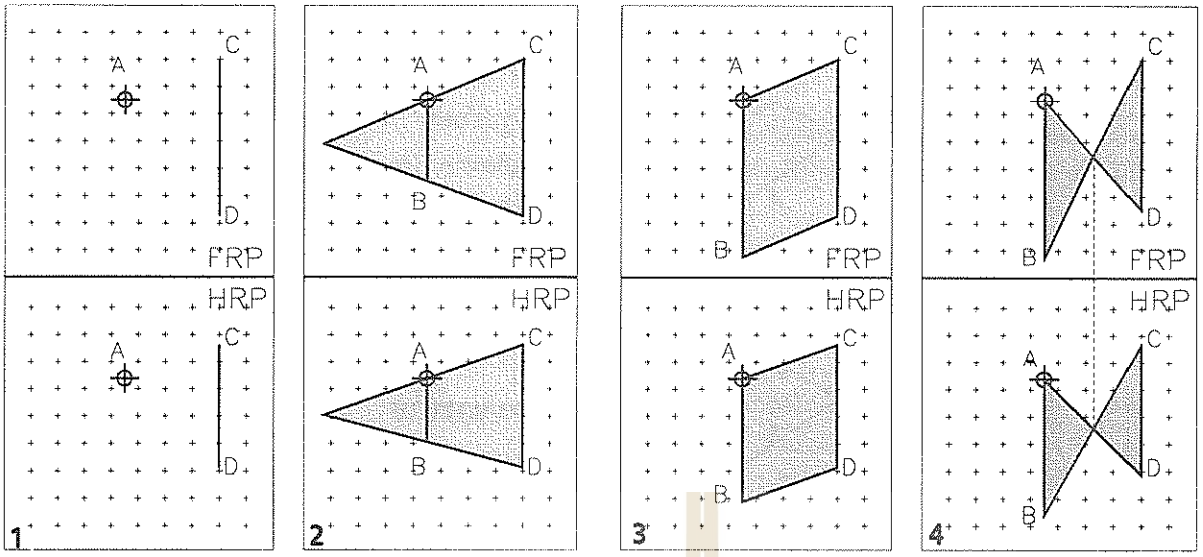
รูปที่ 3.8 เส้นขนานกัน

3.6 เส้นเอียงบนระนาบ

ในหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงความยาวจริง (TL) ของเส้นในภาพฉาย หัวข้อนี้จะแสดงถึงวิธีหาความยาวจริงของเส้นดังกล่าว ความยาวจริงของเส้นปรากฏที่วิวใดแสดงว่าเส้นนั้นจะต้องวางขนานกันระนาบอ้างอิงนั้น เช่นเส้นที่ขนานกับระนาบอ้างอิงด้านหน้าจะเป็นความยาวจริงที่วิวหน้า เส้นที่วางขนานกับระนาบอ้างอิงด้านบนจะเป็นความยาวจริงที่วิวบน การสร้างเส้นบนระนาบเทเอียงให้ปรากฏเป็นความยาวจริงที่วิวที่ต้องการมีวิธีการดังที่แสดงในรูป 3.7 รูปที่ 1 ต้องการสร้างเส้นที่มีความยาวจริงที่วิวหน้า เริ่มที่วิว



รูปที่ 3.9 เส้นไม่ขนานกัน



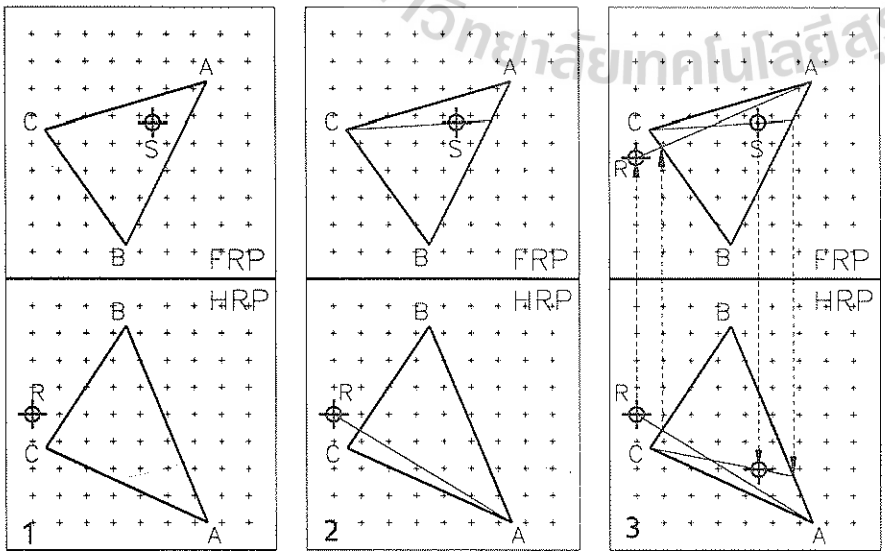
รูปที่ 3.10 การสร้างเส้นเอียงขนานกัน

บนสร้างเส้น XY ขนานกับสันของระนาบอ้างอิงด้านหน้า จากรูป 3 มิติขวามือจะเห็นว่าเส้นนี้จะอยู่บนระนาบที่ขนานกับระนาบอ้างอิงด้านหน้า (FRP) โปรเจคเส้น XY จากวิวบนมาวิวหน้า เส้นนี้จะเป็นเส้นที่มีความยาวจริง (TL) สำหรับรูปที่ 2 ต้องการเส้นที่มีความยาวจริงที่วิวบน จึงสร้างเส้นให้อยู่บนระนาบขนานกับ (HRP) แล้วโปรเจคเส้นจากวิวหน้าขึ้นไปวิวบน เส้นนี้จะมีความยาวจริงที่วิวบนตามต้องการ ในหลักการเดียวกันนี้สามารถสร้างเส้นที่มีความยาวจริงที่วิวอื่นๆได้ เช่นวิวด้านข้างหรือวิวช่วยซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

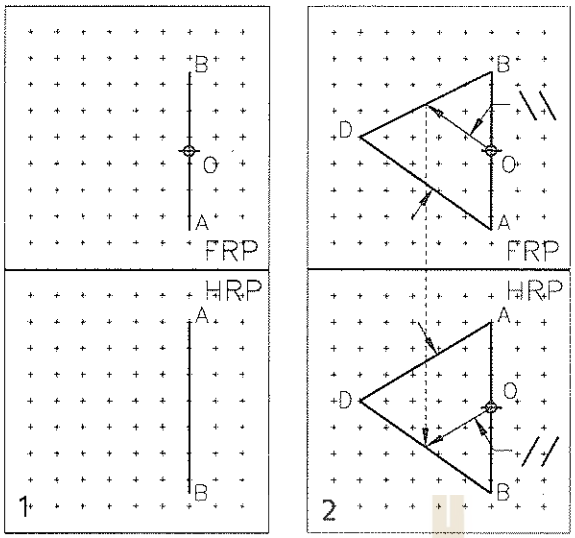
3.7 เส้นขนานกัน

เส้นขนานกันจะปรากฏให้เห็นว่าขนานกันบนภาพฉายทุกวิว ดังที่แสดงในรูปที่ 3.8 สำหรับเส้นเทเอียง (Obique Lines) การเห็นเส้นขนานกันบนภาพฉายเพียง 2 วิวก็เพียงพอที่จะยืนยันได้แล้วว่าเส้นทั้งสองนั้นขนานกันจริง แต่สำหรับเส้นเอียง (Inclined Lines) การเห็นเพียงสองวิวว่าเส้นขนานกันอาจไม่สามารถยืนยันว่าเส้นขนานกันจริงดังที่แสดงที่รูป 3.9

ตัวอย่าง รูป 3.10 รูปย่อยที่ 1 ต้องการให้สร้างเส้น AB ขนานกับเส้น CD ดังรูป โดยโจทย์



จุดบนระนาบ
รูปที่ 3.11



รูปที่ 3.12 จุดบนเส้นเอียง

กำหนดเส้น CD เป็นเส้นเอียง (Inclined Line) ดังนั้นเส้น AB จะต้องเป็นเส้นเอียงด้วย แต่การหาตำแหน่งของจุด B จะทำอย่างไร อาศัยหลักการที่เส้นขนานกันคู่หนึ่งจะประกอบเป็นระนาบหนึ่งขึ้นมา ดังนั้นเส้น AB และ CD จะต้องอยู่บนระนาบเดียวกัน

รูปย่อยที่ 2 แสดงวิธีหาจุด B ด้วยการสร้างสามเหลี่ยม จะเห็นว่าสัดส่วนของด้าน AB ต่อ CD ระหว่างวิวบนและวิวหน้าจะเท่ากัน

รูปย่อยที่ 3 หาจุด B ด้วยการสร้างสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยการลากเส้น AC ขึ้นมา ตำแหน่ง B ทราบโดยการลากเส้น DB ขนานกับ AC ซึ่ง ABCD จะเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

รูปย่อยที่ 4 อาศัยหลักการที่กล่าวมาแล้วว่าระนาบเกิดจาก เส้นขนานกัน หรือเส้นตัดกัน ดังนั้น จุด B จึงหาโดยการสร้างเส้น AD และ CB ตัดกัน แล้วโปรเจคจุดตัดมาที่อีกวิวหนึ่ง ทำให้สามารถหาจุด B ได้

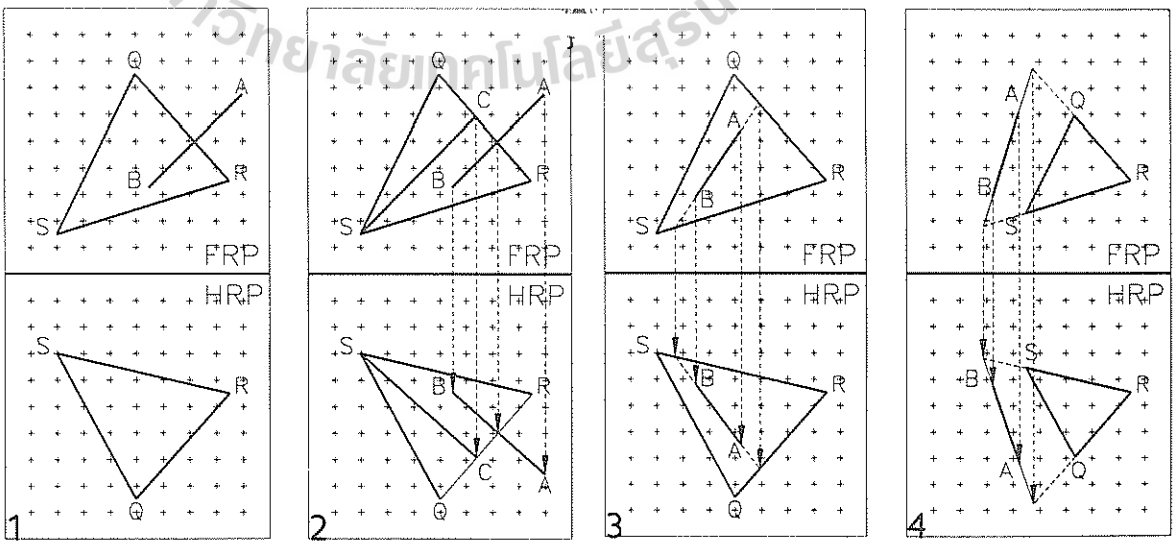
3.8 จุดบนระนาบ

โดยหลักการแล้วไม่มีอะไรซับซ้อน อาศัยหลักให้วางจุดบนเส้นที่อยู่บนระนาบนั้นดังแสดงในรูป 3.11 รูปย่อยรูปที่ 1 กำหนดจุด S บนระนาบ ABC ที่วิวบน และกำหนดจุด R บนระนาบเดียวกันนี้ที่วิวหน้า จากเงื่อนไขที่กำหนดแค่นี้ยังไม่เพียงพอที่จะกล่าวว่า จุดที่เห็นอยู่บนระนาบแล้ว

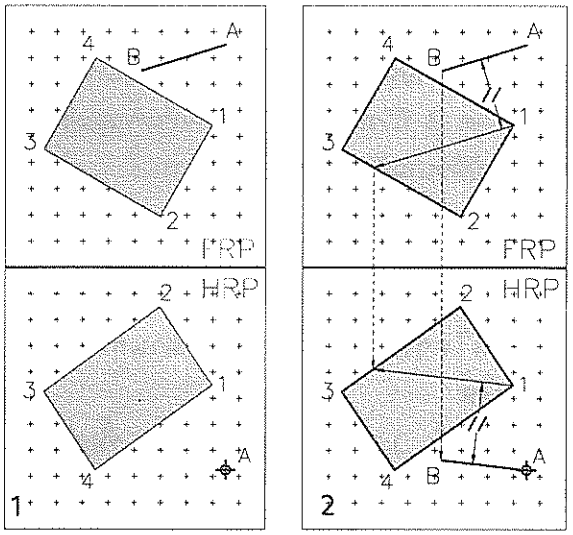
รูปย่อยที่ 2 ลากเส้นจากมุมหนึ่งของระนาบให้ตัดด้านใดด้านหนึ่งของระนาบนั้นแล้วให้ผ่านจุดด้วย ทำให้ทราบ จุดตัดของเส้น และแนวของเส้นที่ผ่านจุด S หรือจุด R รูปย่อยที่ 3 โปรเจคจุดดังกล่าวไปยังอีกวิวหนึ่งจึงจะได้จุดที่อยู่บนเส้นตามต้องการ

3.9 จุดบนเส้นเอียง

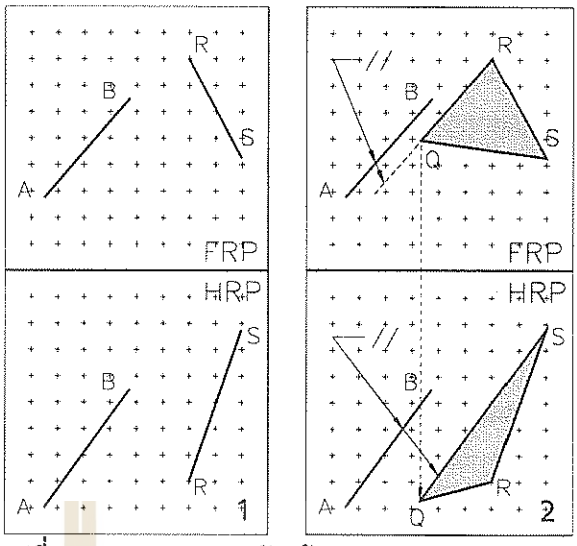
การหาจุดบนเส้นเทเอียง (Oblique Line) ไม่มีปัญหาเพราะสามารถโปรเจคจุดจากวิวหนึ่งสู่อีก



รูปที่ 3.13 เส้นบนระนาบ



รูปที่ 3.14 เส้นขนานกับระนาบ



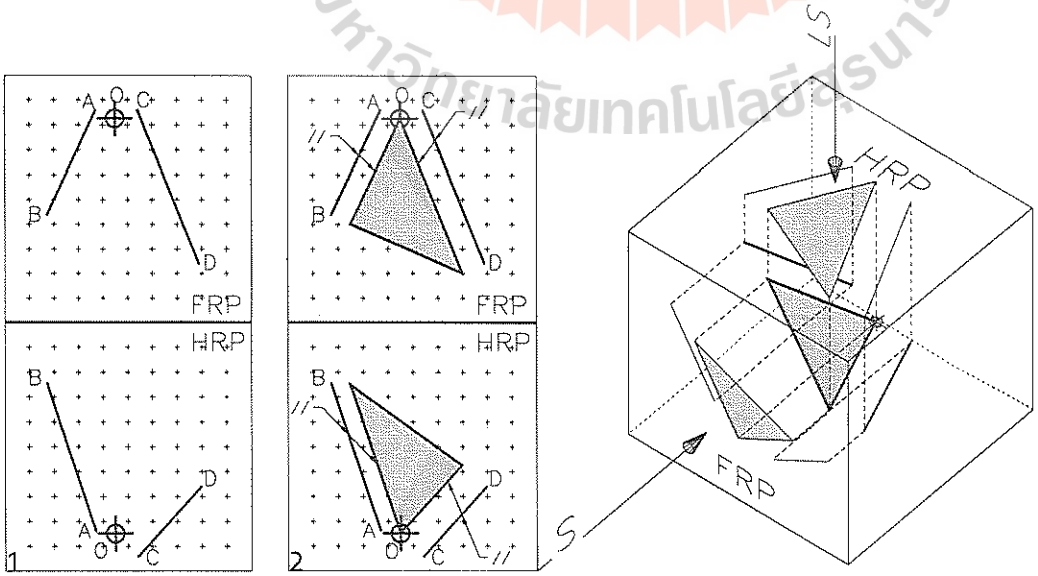
รูปที่ 3.15 ระนาบขนานกับเส้น

วิวหนึ่งได้ กรณีเส้นเอียง (Inclined Line) ที่ขนานกับระนาบข้าง (PRP) ดังที่แสดงในรูปที่ 3.12 รูปย่อยที่ 1 ถ้ากำหนดให้ใช้สองวิวในการหาจุด O บนเส้น AB จำเป็นต้องประยุกต์หลักการของเส้นขนานกันมาช่วย กล่าวคือให้สร้างระนาบ ABD ขึ้นมา จากจุด O สร้างเส้นขนานกับด้าน AD ไปตัดกับ DB โปรเจคจุดตัดลงมาที่วิวหน้า จากจุดนี้สร้างเส้นขนานกับ AD ทำให้สามารถหาจุด O ที่วิวหน้าได้

3.10 เส้นบนระนาบ

เรื่องที่กล่าวต่อไปนี้จะอาศัยการประยุกต์หลักการของเส้นตัดกันและเส้นขนานกันเพื่อวางเส้นให้อยู่บนระนาบที่อีกวิวหนึ่ง รูปที่ 3.13 ในรูปย่อยรูปที่ 1 แสดงภาพฉายสองวิวของระนาบ SRQ และเส้น AB สิ่งที่ต้องการคือเส้น AB จะต้องอยู่บนระนาบ SRQ จากวิวด้านบนแม้จะเห็นว่าเส้น AB ซ้อนบนระนาบก็ไม่ได้หมายความว่าเส้นดังกล่าวจะอยู่บนระนาบ เงื่อนไขที่เส้นจะอยู่บนระนาบจะต้องสร้างขึ้นบนวิวด้านหน้า

พิจารณารูปที่ 2 ที่วิวบน ถ้าเส้น AB วางบนระนาบแสดงว่าเส้นนี้จะตัดกับ QR ดังนั้นจึงโปรเจคจุดตัดจากวิวบนมายังวิวหน้า เนื่องจากยังไม่ทราบทิศ



รูปที่ 3.16 ระนาบขนานกับเส้นเทเอียงสองเส้น

ทางของเส้น AB ที่วิวหน้าจึงต้องไปกำหนดที่วิวบน โดยการสร้างเส้นขนาน SC ให้ขนานกับเส้น AB เนื่องจากจุด C จะต้องเป็นจุดตัดกันของเส้น QR และ SC ดังนั้นจึงสามารถโปรเจคจุดนี้ลงมาที่วิวหน้าได้ เขียนเส้น SC ที่วิวหน้า ซึ่งทำให้ทราบทิศทางของ AB ที่วิวหน้า โปรเจคแนว AB จากวิวบนลงมาวิวหน้า ก็ได้เส้น AB ที่วางอยู่บนระนาบ SRQ

รูป 3 ก็เช่นเดียวกับรูป 2 แทนที่จะสร้างเส้นขนานขึ้นที่วิวบน ให้ยืดแนวเส้น AB ออกไปตัดกับขอบระนาบ โปรเจคจุดตัดทั้งสองลงมาที่วิวหน้า ทำให้สามารถสร้างเส้น AB ที่วิวหน้าโดยเส้นนี้วางอยู่บนระนาบ SRQ

สำหรับรูป 4 เป็นหลักการเดียวกับรูปที่ 3 เนื่องจากเส้นวางอยู่นอกระนาบ จึงขยายขอบของระนาบและแนวเส้นออกไปตัดกัน โปรเจคจุดตัดจากวิวบนลงมาวิวหน้าทำให้ทราบแนวของเส้นที่วิวหน้า จากนั้นโปรเจคจุดปลายทั้งสองข้างของเส้นจากวิวบนลงมาวิวหน้า เส้น AB จะวางบนระนาย SRQ ตามต้องการ

3.11 เส้นขนานกับระนาบ

เส้นตรงขนานกับระนาบต่อเมื่อเส้นตรงนั้นขนานกับเส้นใดๆบนระนาบ รูปที่ 3.14 กำหนดระนาบ 1234 และเส้นAB ให้สร้างเส้นผ่านจุด A ที่วิวหน้าขนานกับระนาบ วิธีทำคือสร้างเส้นบนระนาบให้ขนานกับเส้น AB ขึ้นที่วิวบน โปรเจคเส้นนั้นมาที่วิวหน้าโดยอาศัยจุดตัดกันระหว่างเส้นบนระนาบ ซึ่งจะทราบจุด B ที่วิวหน้า เส้น AB ที่เห็นทั้งสองวิวจะมีคุณสมบัติขนานกับระนาบตามต้องการ

3.12 ระนาบขนานกับเส้น

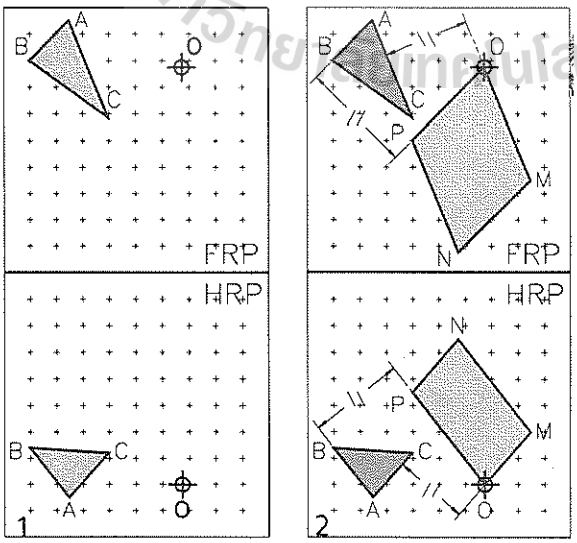
โดยหลักเดียวกันการที่ระนาบขนานกับเส้น คือ **เส้นใดๆบนระนาบจะต้องขนานกับเส้นที่กำหนดให้**

ในรูปที่ 3.15 กำหนดเส้น AB ทั้งสองวิว RS คือขอบของระนาบขอบหนึ่งซึ่งต้องการให้สร้างระนาบนี้ขนานกับเส้น AB วิธีการคือการสร้างขอบระนาบ RQ ขึ้นอีกด้านหนึ่งให้ขนานกับ AB เราสามารถถือเอาการตัดกันของเส้น RS กับ RQ เป็นระนาบได้แล้ว

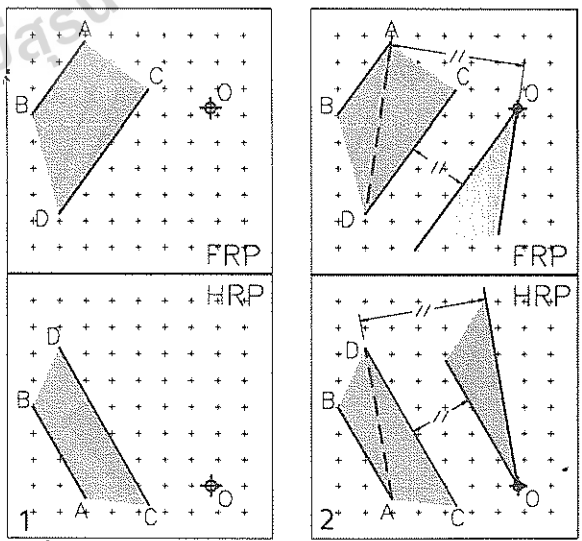
3.13 ระนาบขนานกับเส้นเทเอียงสองเส้น

มีความเป็นไปได้ที่จะมีระนาบหลายระนาบขนานกับเส้นเทเอียงเพียงเส้นเดียว แต่จะมีระนาบที่ขนานกับเส้นเทเอียงสองเส้นเพียงระนาบเดียวเท่านั้น รูป 3 มิติที่แสดงในรูปหมายเลข 3.16 ยืนยันหลักดังกล่าว การเขียนระนาบที่ขนานกับเส้นเทเอียงสองเส้นแสดงวิธีการในรูปย่อยที่ 2

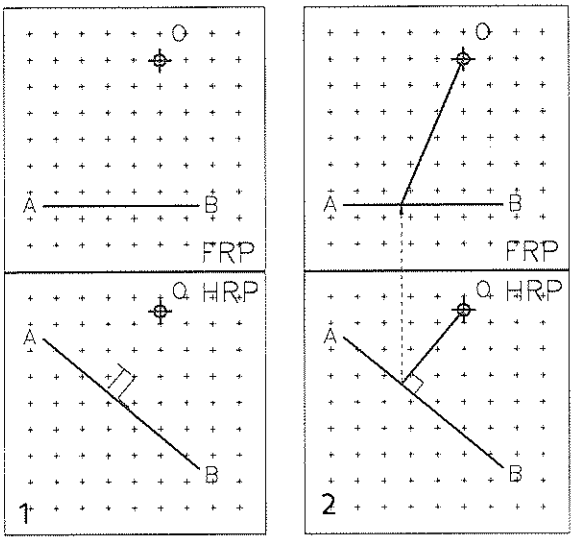
3.14 ระนาบขนานกับระนาบ



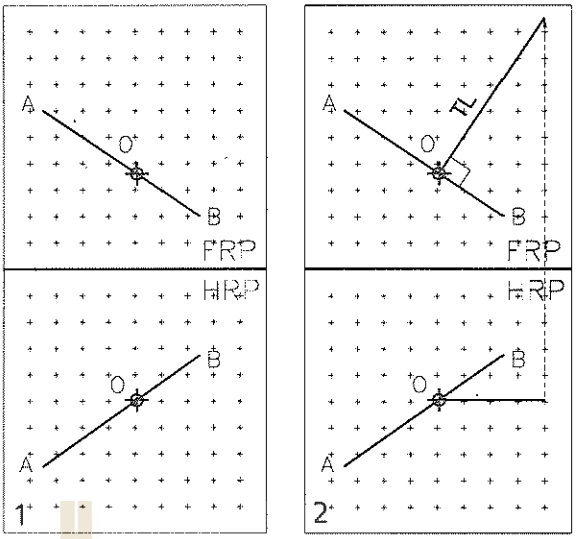
รูปที่3.17การสร้างระนาบขนานกับระนาบ



รูปที่3.18การสร้างระนาบขนานกับระนาบเส้นขนาน



รูปที่3.19การสร้างเส้นตั้งฉากกับเส้นเอียง

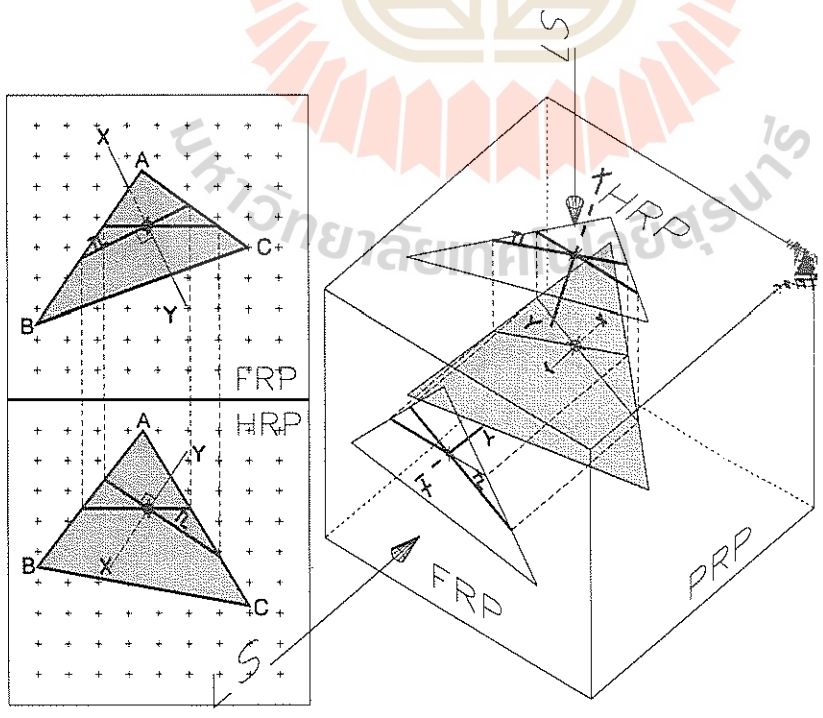


รูปที่3.20การสร้างเส้นตั้งฉากกับเส้นเทเอียง

รูป 3.17 และ 3.18 เป็นการแสดงให้เห็นวิธีสร้างระนาบให้ผ่านจุด O โดยให้ขนานกับระนาบที่กำหนดให้ คือสามเหลี่ยม ABC ในรูป 3.17 และเส้นขนาน AB CD ในรูปที่ 3.18 **หลักการที่ระนาบขนานซึ่งกันและกันต่อเมื่อเส้นตัดกันคู่หนึ่งบนระนาบหนึ่งขนานกับเส้นตัดกันบนอีกระนาบหนึ่ง** ในรูปที่ 3.17 เงื่อนไขที่ทำให้ระนาบทั้งสองขนานกันคือเส้น AB//OP และ AC//OM สำหรับรูป 3.18 ก็เป็นไปทำนองเดียวกันซึ่งในที่นี้จะต้องสร้างเส้น AD ขึ้นมาอีกเส้นหนึ่ง

3.15 เส้นตั้งฉากกับเส้นเอียง

เส้นตั้งฉากกันได้กล่าวถึงแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา กล่าวคือภาพฉายที่จะแสดงว่าเส้นตั้งฉากกันต่อเมื่อ เส้นทั้งสองทำมุมฉากกันบนภาพฉายวิวใดวิวหนึ่ง และที่วิวนี้เส้นใดเส้นหนึ่งหรือทั้งสองเส้นต้อง



รูปที่ 3.21 เส้นตั้งฉากกับระนาบระนาบตั้งฉากกับเส้น

เป็นความยาวจริง ข้อสังเกตุคือเส้นตั้งฉากกันไม่จำเป็นต้องตัดกันเสมอไป

รูปที่ 3.19 กำหนดเส้น AB เอียงขนานกับระนาบอ้างอิงด้านหน้า (FRP) ให้ลากเส้นตั้งฉากจากจุด O มาตั้งฉากกับ AB

เส้น AB ปรากฏเป็นความยาวจริงที่วิวหน้า จากจุด O ลากเส้นตั้งฉากกับ AB ที่จุดตัดกันนี้โปรเจคขึ้นไปที่วิวบน ลากเส้นจากจุด O มายัง AB จะได้เส้นที่ทำมุมฉากกันตามที่ต้องการ

3.16 เส้นตั้งฉากกับเส้นเทเอียง

รูปที่ 3.20 เส้น AB เป็นเส้นเทเอียงให้เขียนเส้นตั้งฉากกับเส้น AB ที่จุด O

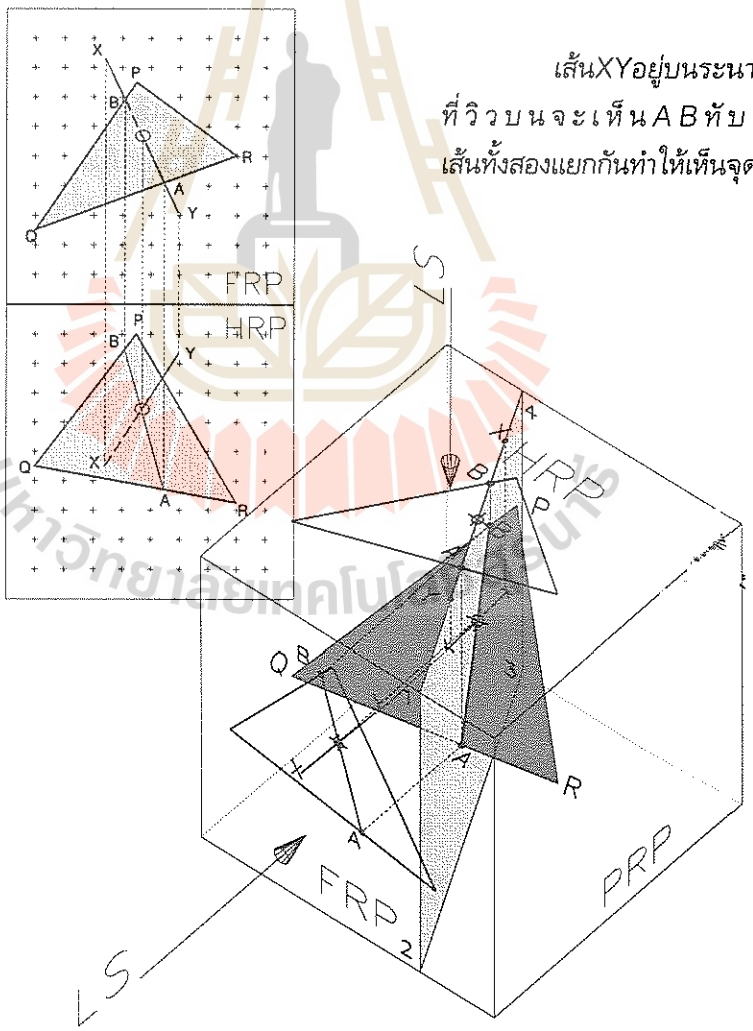
วิธีการคือเส้นที่มาตั้งฉากกับ AB จะต้องเป็นความยาวจริงซึ่งจะปรากฏเป็นความยาวจริงที่วิวไหนก็ได้ ในรูปย่อยที่ 2 ให้เป็นความยาวจริงที่วิวบน ดังนั้นจึงเป็นเส้นที่ขนานกับ HRP ที่วิวหน้า ข้อนี้มีได้ 2 คำตอบ

3.17 เส้นตั้งฉากกับระนาบหรือระนาบตั้งฉากกับเส้น

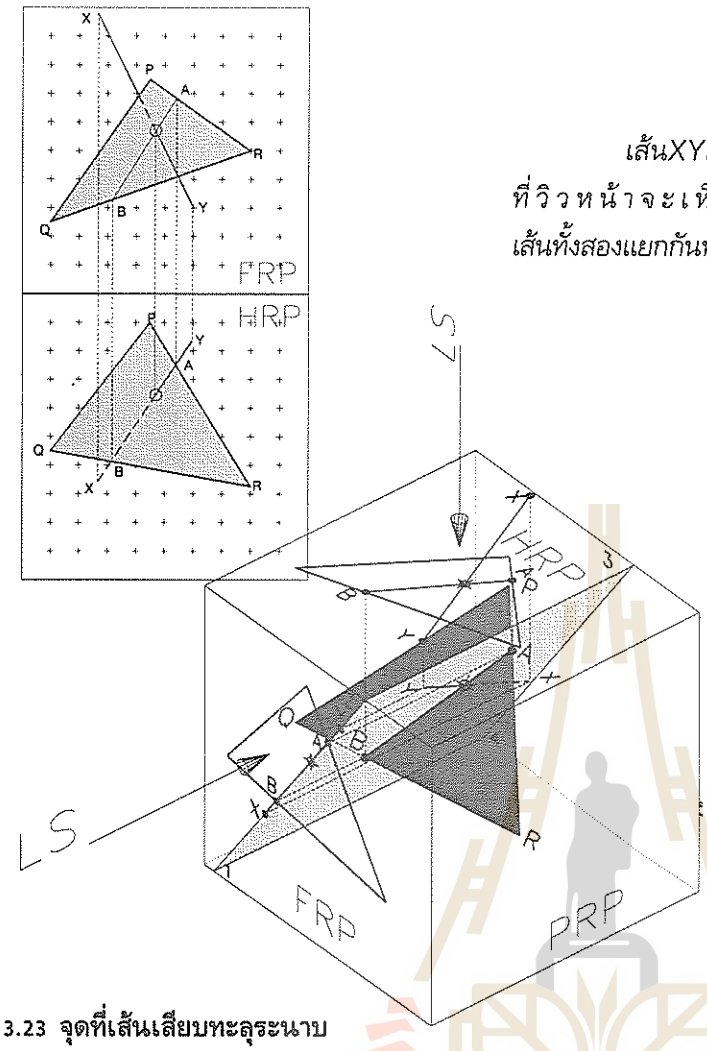
เส้นตรงจะตั้งฉากกับระนาบ**เมื่อเส้นนั้นตั้งฉากกับเส้นตรงทุกเส้นบนระนาบ** ซึ่งเส้นที่ตั้งฉากกันอาจไม่จำเป็นต้องตัดกัน

รูป 3. 21 แสดงให้เห็นหลักการดังกล่าว ในกรณีที่จะสร้างระนาบให้ตั้งฉากกับเส้นนั้น ให้สร้างระนาบโดยการกำหนดเป็นเส้นตรงที่ตัดกันสองเส้นและให้เป็นความยาวจริงที่วิวใดวิวหนึ่งดังรูป

เส้นXYอยู่บนระนาบที่เอียงตั้งฉากกับHRP ที่วิวบนจะเห็นABทับกับXYแต่ที่วิวหน้าเส้นทั้งสองแยกกันทำให้เห็นจุดที่เส้นเสียบทะลุระนาบ



รูปที่ 3.22 จุดที่เส้นเสียบทะลุระนาบ



เส้นXYอยู่บนระนาบที่เอียงตั้งฉากกับFRP ที่วิวหน้าจะเห็นABทับกับXYแต่ที่วิวบน เส้นทั้งสองแยกกันทำให้เห็นจุดที่เส้นเสียบทะลุระนาบ

รูปที่ 3.23 จุดที่เส้นเสียบทะลุระนาบ

3.18 เส้นเสียบทะลุระนาบ

ในหัวข้อนี้ต้องการหาจุดที่เส้นเสียบทะลุระนาบ (Piercing Point of a Line with a Plane) ด้วยการหาจากภาพฉายสองวิวเท่านั้น วิธีการหาค่อนข้างจะเข้าใจยาก ให้พิจารณาจากรูป3มิติ x.22 ระนาบ PQR ถูกเส้น XY เสียบทะลุที่จุดๆ หนึ่ง เราสามารถสร้างระนาบ 1234 ซึ่งเป็นระนาบที่เส้น XY วางอยู่บนนั้น โดยที่ระนาบนี้สามารถเอียงตั้งฉากกับ HRP ตามรูป 3.22 หรือตั้งฉากกับระนาบ FRP ตามรูป 3.23 ก็ได้ ขณะเดียวกันระนาบ 1234 จะต้องตัดกับระนาบ PQR ที่ AB ด้วย ในรูปที่ 3.22 ถ้าโปรเจค XY และ AB มาที่วิวหน้า จะเห็นจุดตัดของเส้นทั้งสอง จุดนี้คือจุดที่เส้น XY เสียบทะลุระนาบ PQR แต่ถ้าโปรเจคขึ้นไปที่วิวบน XY และ AB จะทับกัน

สำหรับรูป 3.23 ถ้าโปรเจค XY และ AB มาที่วิวหน้า เส้นทั้งสองจะทับกัน แต่ถ้าโปรเจคไปที่วิวบน จะเห็นว่าเส้นทั้งสองตัดกันทำให้สามารถเห็นจุดเสียบทะลุได้

จะเห็นว่าวิธีนี้สามารถหาจุดเสียบทะลุ (Piercing Point) ได้ด้วยภาพฉายเพียงสองวิวเท่านั้น

3.19 สรุป

บทนี้ได้แสดงวิธีการหาความสัมพันธ์ของ จุด เส้น และระนาบ โดยการหาจากภาพฉายสองวิวเท่านั้น แม้ว่าวิธีการจะแสดงถึงวิวหน้าและวิวบนเป็นส่วนใหญ่ก็ตาม แต่ก็สามารถใช้วิวหน้าและวิวข้างหาความสัมพันธ์ดังกล่าวได้เช่นกัน

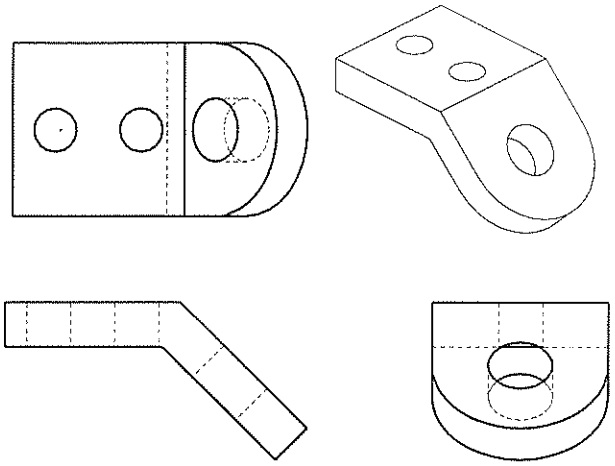
ภาพช่วย

4.1 กล่าวนำ

การเขียนภาพฉายโดยทั่วไป จะฉายภาพของวัตถุไปยังระนาบรับภาพ ซึ่งทำมุมตั้งฉากซึ่งกันและกัน คือระนาบด้านหน้า (Frontal Reference Plane) ระนาบด้านบน (Horizontal Reference Plane) และระนาบด้านข้าง (Profile Reference Plane) ตามลำดับ แต่ในบางครั้งภาพฉายเหล่านั้นไม่สามารถให้รายละเอียดของวัตถุได้เป็นที่น่าพอใจ ดังตัวอย่างเช่น รูปที่ 4.1 ภาพฉายไม่สามารถให้เห็นขนาดและรูปร่างของระนาบเอียงของวัตถุได้ ภาพช่วยหรือวิวช่วย (Auxiliary View) จะสามารถแก้ปัญหานี้ได้ โดยที่ภาพช่วยจะเป็นภาพฉายที่เกิดบนระนาบรับภาพที่เอียงทำมุมกับระนาบอ้างอิงทั้งสาม เราเรียกระนาบรับภาพนี้ว่า ระนาบช่วย (Auxiliary Plane)

ในเนื้อหาที่เกี่ยวกับเรขาคณิตพรรณนา วิวช่วยมีประโยชน์มาก เปรียบเสมือนการหามุมมองรอบๆ วัตถุ เพื่อจะได้มุมมองที่เหมาะสม ซึ่งที่ตำแหน่งนี้จะเห็นรายละเอียดที่อาจหลบซ่อนอยู่ของวัตถุได้ดีที่สุด ในเรขาคณิตพรรณนานั้นประโยชน์ของภาพช่วยคือการหา

1. ความยาวจริงของเส้น (True Length of Line)
2. ภาพของเส้นที่ปรากฏเป็นจุด (Point View of Line)
3. สันของระนาบ (Edge View of Plane)
4. ขนาดจริงของระนาบ (True Size of Plane)

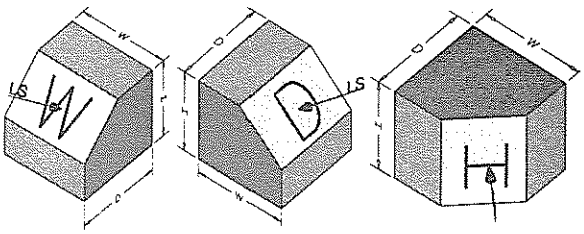


รูปที่ 4.1 วัตถุที่มีระนาบเอียง

4.2 ระนาบช่วย (Auxiliary Plane)

ระนาบช่วยคือระนาบรับภาพช่วย (Auxiliary View) มีลักษณะที่สำคัญคือเป็นระนาบเอียง (Inclined Plane) ที่จะต้องตั้งฉากกับระนาบอ้างอิงระนาบใดระนาบหนึ่ง รูปที่ 4.2 ระนาบช่วยทำมุมฉากกับระนาบอ้างอิงหรือระนาบรับภาพด้านหน้า ระนาบช่วยถูกสร้างขึ้นให้ขนานกับระนาบเอียง P ของวัตถุ เพื่อให้ภาพฉายมีขนาดจริง (True Size ใช้ตัวย่อ TS) ทิศทางการมองจะต้องตั้งฉากกับระนาบช่วย

ในการเขียนภาพฉายจะต้องคลี่ระนาบช่วยและระนาบอื่นๆตามเส้นรอยพับดังรูป 4.2 (b) ให้ทุกระนาบมาอยู่ในระนาบเดียวกันกับระนาบอ้างอิงด้านหน้า การโปรเจคภาพจากวิวหน้าไปยังวิวช่วย

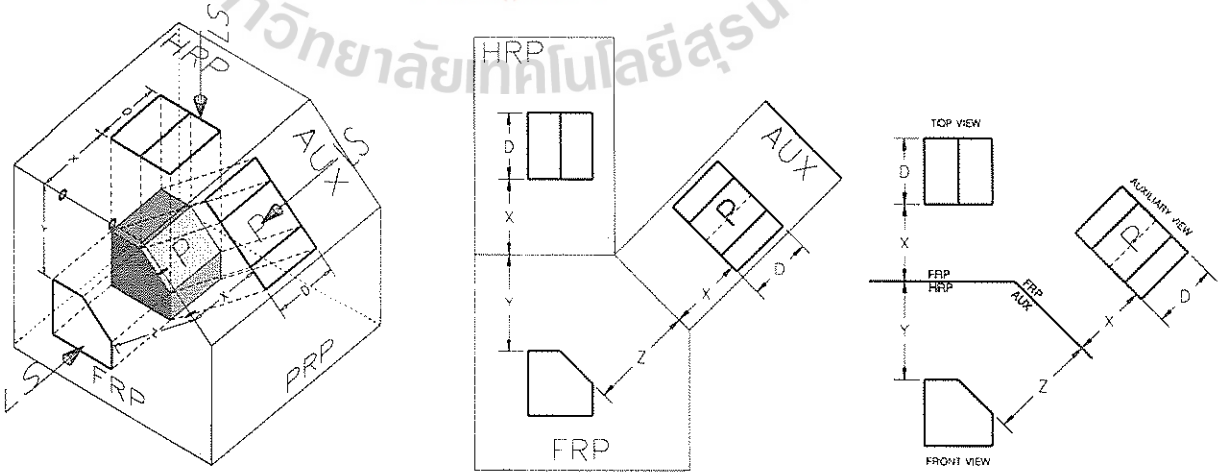


รูปที่ 4.3 วัตถุที่มีระนาบเอียงแตกต่างกัน

แนวของเส้นโปรเจคทุกเส้นจะต้องตั้งฉากกับเส้นรอยพับเสมอ

ในการเขียนภาพฉาย ดูรูป 4.2 (c) ควรเขียนอักษรย่อซึ่งเป็นชื่อระนาบ กำกับไว้ที่เส้นรอยพับโดยมีหลักดังนี้ ที่วิวหน้า เส้นรอยพับจะเป็นสันของระนาบ HRP (Horizontal Reference Plane) และ AUX (Auxiliary Plane) ดังนั้นจึงกำกับตัวย่อดังกล่าวลงที่วิวหน้า เมื่อมองที่วิวช่วยจะเส้นรอยพับจะเป็นสันของระนาบอ้างอิงหน้า จึงเขียน FRP (Frontal Reference Plane) ไว้ที่เส้นรอยพับนี้ สำหรับที่วิวบนก็ให้ทำเช่นเดียวกัน

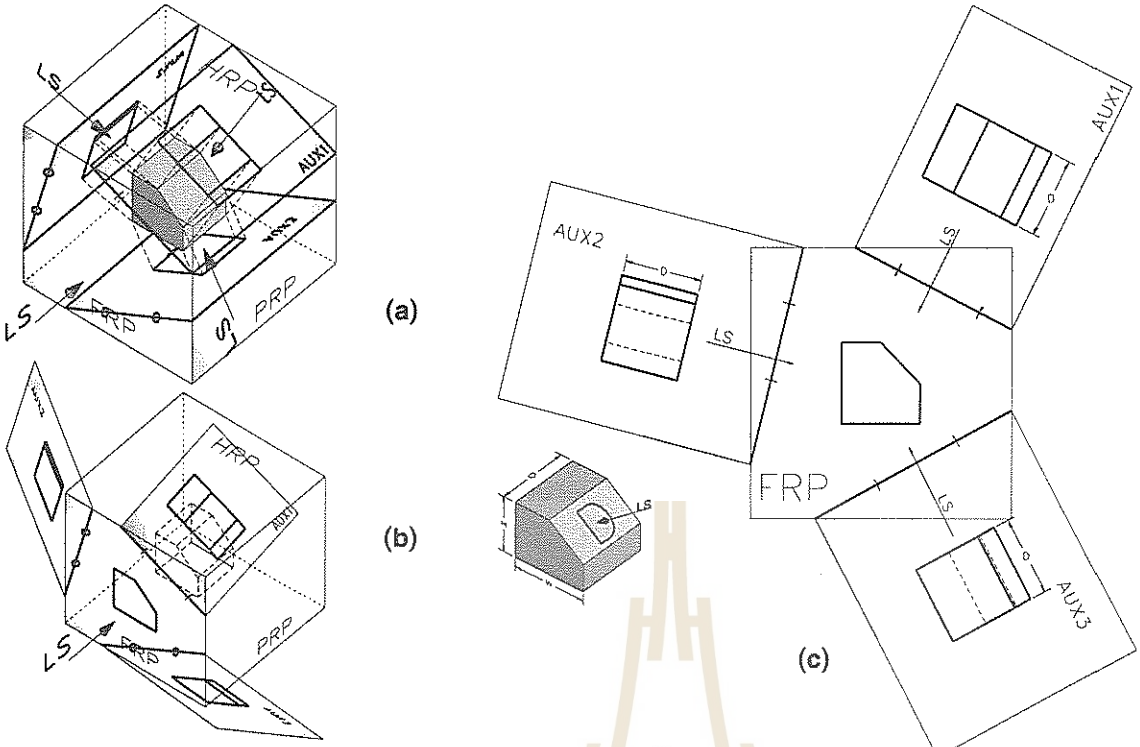
การวางภาพช่วย (Auxiliary View) นั้นจะต้องวางห่างจาก FRP เป็นระยะ x เท่ากับภาพบน (Top View) และจะเห็นความลึกของวัตถุจะเป็น D เช่นเดียวกับการเห็นความลึกของวัตถุที่วิวบน แต่ที่สำคัญคือสามารถเห็นระนาบ P ของวัตถุมีขนานเท่าของจริง



(a) (b) (c)

รูปที่ 4.2 ภาพช่วยที่แสดงขนาดจริงของระนาบ P

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

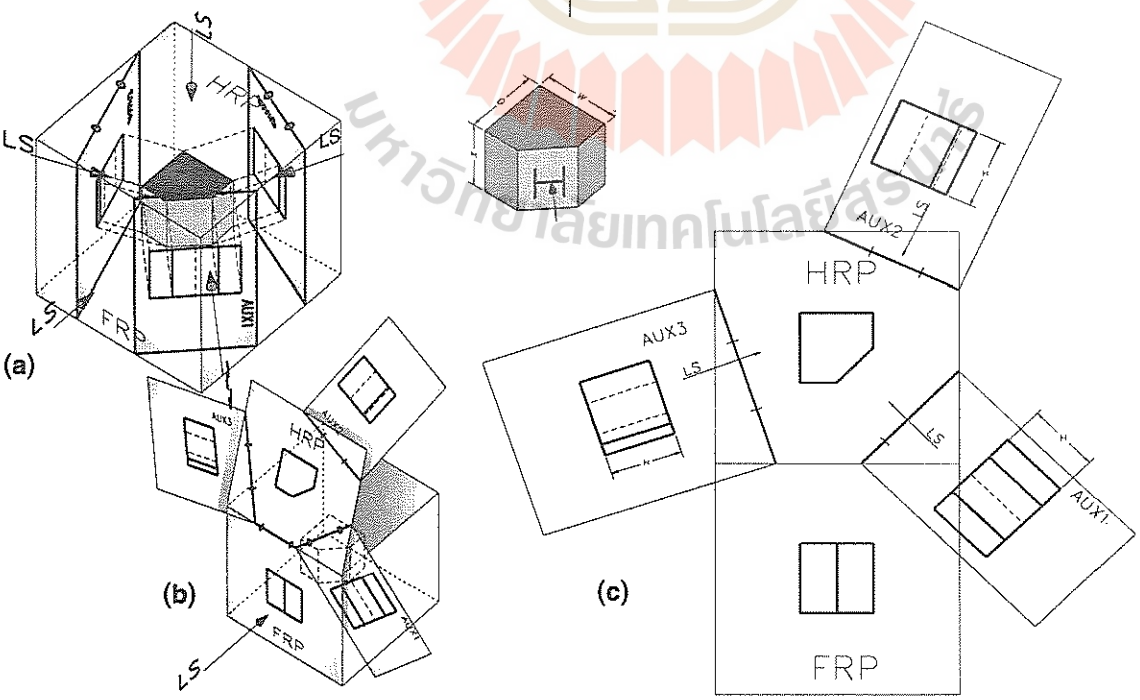


รูปที่ 4.4 ภาพช่วยที่แสดงด้านลึกของวัตถุ

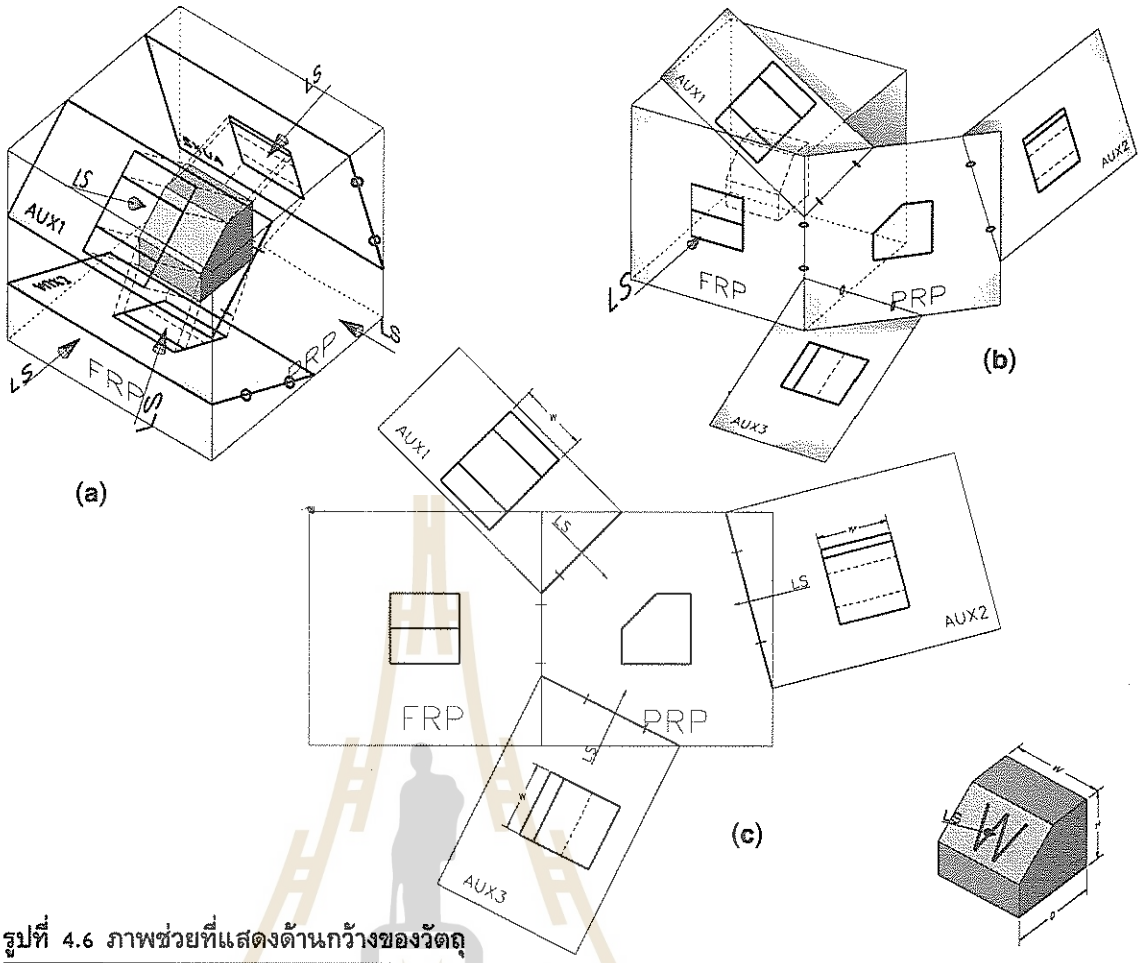
4.3 ระนาบช่วยแสดงขนาดจริงของระนาบเอียง

รูป 4.3 (a),(b),(c) เป็นวัตถุที่มีระนาบเอียง แสดงขนาดความกว้าง (W) ความลึก (D) และความสูง (H) ตามลำดับ การเขียนวิวช่วยที่แสดงขนาดจริงของระนาบเอียงเหล่านี้จะต้องเขียนบนระนาบช่วยที่เอียงขนานกับระนาบเอียงของวัตถุ เพื่อให้เห็นขนาดของวัตถุที่ต้องการ

รูปที่ 4.4 แสดงให้เห็นมุมมองรอบวัตถุที่ตำแหน่งต่างๆ โดยที่เส้นสายตา (LS) ของมุมมองเหล่านี้ตั้งฉากกับระนาบช่วยที่เป็นระนาบเอียงทำมุม



รูปที่ 4.5 ภาพช่วยที่แสดงด้านสูงของวัตถุ



รูปที่ 4.6 ภาพช่วยที่แสดงด้านกว้างของวัตถุ

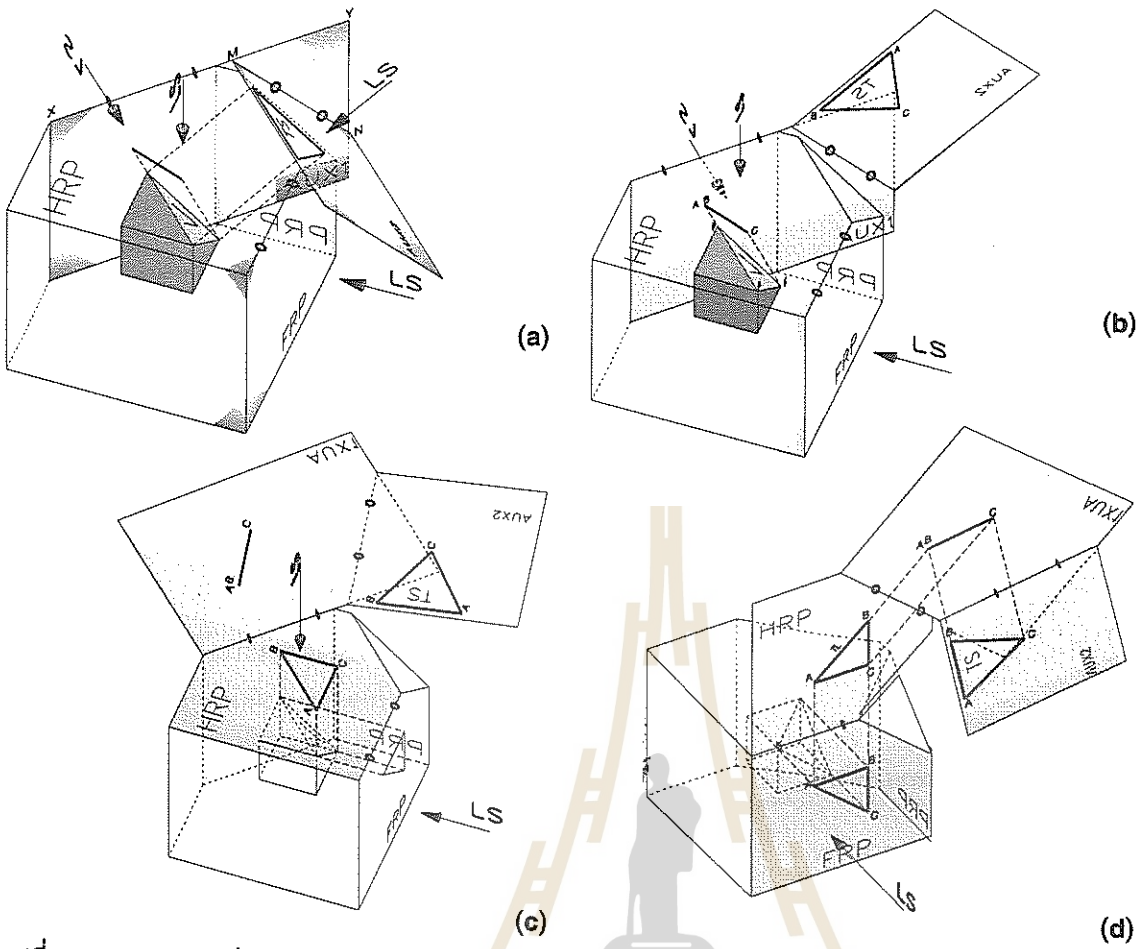
ฉากกับระนาบอ้างอิงหน้า รูป 4.4 (b) แสดงการคลี่ระนาบช่วยทุกด้านตามเส้นรอยพับให้มาอยู่แนวเดียวกับระนาบหน้า รูป 4.4 (c) แสดงการการวางระนาบช่วยหลังจากคลี่มาอยู่ในตำแหน่งเดียวกับระนาบอ้างอิงหน้า ขนาดของวัตถุซึ่งมักจะให้เป็นความกว้าง (W) ความลึก (D) และความสูง (H) การวางระนาบช่วยในลักษณะนี้จะแสดงให้เห็นขนาดความลึก (D) ของวัตถุทุกวิว

การสร้างระนาบช่วยเพื่อให้เห็นความสูง (H) ของวัตถุสามารถทำได้ด้วยการสร้างระนาบเอียงแต่ตั้งฉากกับระนาบบน ตำแหน่งของระนาบช่วยเหล่านี้จะเป็นมุมมองต่างๆที่เห็นความสูงของวัตถุ ในรูป 4.5 (b) แสดงให้เห็นการคลี่ระนาบช่วยที่เส้นรอยพับให้มาอยู่ในระนาบอ้างอิงบนก่อนแล้วจึงหมุนระนาบช่วยทั้งหมดรวมทั้งระนาบอ้างอิงบนมาที่ระนาบอ้างอิงหน้า การจัดความสัมพันธ์ของวิวต่างๆจะเป็นตามรูป 4.5 (c)

สำหรับการเขียนภาพช่วยที่แสดงขนาดความกว้าง (W) ของวัตถุนั้น จะต้องสร้างระนาบเอียงที่ตั้งฉากกับระนาบอ้างอิงด้านข้างให้เป็นระนาบช่วยตามรูป 4.6 (a) การเขียนภาพฉายจะต้องหมุนระนาบช่วยมาอยู่บนระเดียวกันกับระนาบอ้างอิงด้านข้างก่อน แล้วจึงหมุนระนาบทั้งหมดให้มาอยู่ที่ระนาบเดียวกันกับระนาบอ้างอิงด้านหน้า ตามรูป 4.6 (b) และ(c)

4.4 ชุดของภาพช่วย

ภาพช่วยสามารถแสดงได้เป็นชุดที่ต่อเนื่องกัน จากเนื้อหาที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 4.3 นั้นการแสดงภาพช่วยลำดับที่ 1 ซึ่งฉายบนระนาบเอียงที่ตั้งฉากกับระนาบอ้างอิงระนาบใดระนาบหนึ่ง วิวช่วยลำดับที่ 1 สามารถแสดงขนาดจริงของระนาบเอียงบนวัตถุได้เท่านั้น รูป 4.7 (a) แสดงระนาบเทเอียง (Oblique Plane) V บนวัตถุ สิ่งที่ต้องการคือการเขียนวิวช่วย



รูปที่ 4.7 ชุดของภาพช่วย

แสดงขนาดจริงของระนาบ V ในกรณีนี้การหาขนาดจริงของระนาบเทเอียงจะต้องสร้างวิวช่วยขึ้นมาสองลำดับที่ต่อเนื่องกัน

วิวช่วยลำดับที่หนึ่งแสดงบนระนาบช่วย AUX1 ระนาบช่วย AUX1 นี้เป็นระนาบเอียงโดยวางตั้งฉากกับระนาบอ้างอิงด้านบน (HRP) สำหรับมุมมองของระนาบนี้จะต้องเห็นระนาบ V ปรากฏเป็นสันของระนาบ (Edge View) ดังนั้นทิศทางการมองหรือเส้นสายตา (LS) จะต้องขนานกับเส้นความยาวจริงที่ปรากฏที่วิวบน ซึ่งก็คือเส้น AB ทำให้เห็นเส้น AB เป็นจุด ดังนั้นภาพช่วยที่วิวนี้จึงเป็นเส้นหรือสันของระนาบ ABC

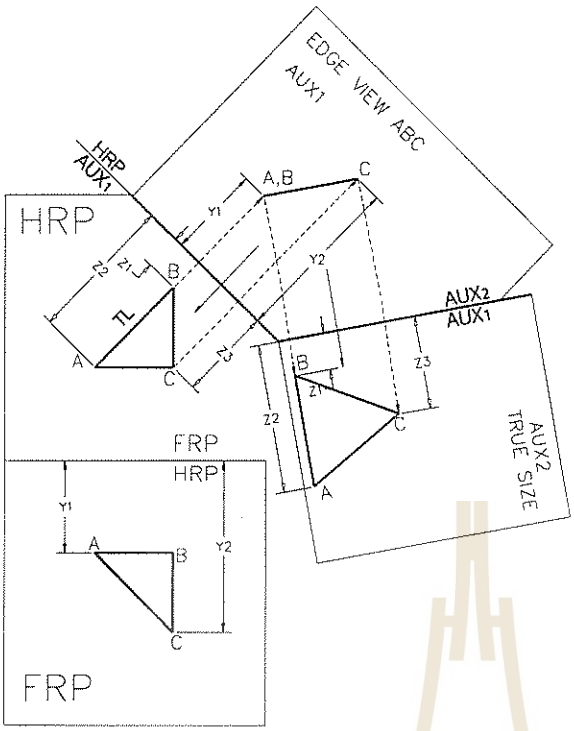
ลำดับต่อไปคือการสร้างระนาบช่วยลำดับที่ 2 คือ AUX2 ดูรูป 4.7 (a) และ (b) ประกอบ ทั้งนี้ในการสร้างจะต้องมีหลักการที่สำคัญคือ

1. ระนาบช่วย AUX2 จะต้องตั้งฉากกับระนาบช่วย AUX1

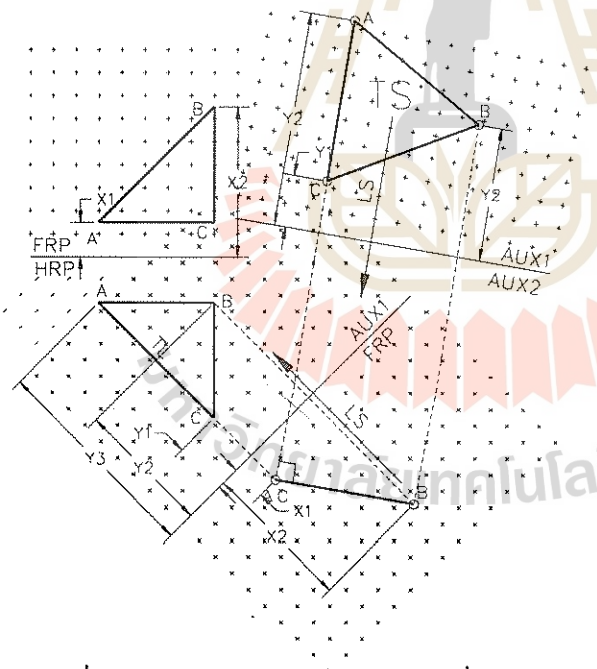
2. เส้นสายตาหรือ LS ที่มองตั้งฉากกับระนาบ AUX2 นี้จะต้องมีทิศทางตั้งฉากกับสันของระนาบ ABC หรือระนาบ V จึงจะทำให้ภาพช่วยที่วิวนี้มีขนาดเท่าของจริง หรือกล่าวอีกลักษณะหนึ่งก็คือระนาบช่วย AUX2 จะวางขนานกับระนาบ ABC ของวัตถุ

สำหรับการคลี่ระนาบต่างๆจะต้องทำให้ถูกต้อง AUX2 ถูกคลี่แผ่มาวางอยู่บนระนาบเดียวกันกับระนาบ AUX1 ก่อนตามรอยพับดังรูป 4.7 (b) จากนั้นหมุนระนาบ AUX2 และ AUX1 ให้มาอยู่ที่ระนาบอ้างอิงด้านบน (HRP) รูป 4.7 (c) สุดท้ายจึงหมุนระนาบทั้งหมดมาวางที่ระนาบด้านหน้า ตำแหน่งของระนาบต่างๆจะต้องวางอย่างถูกต้องตามรูป 4.7 (d) สำหรับวิธีเขียนภาพฉายแสดงที่รูป X.8

ชุดของภาพช่วยสามารถเขียนได้ไม่มีที่สิ้นสุด แต่ต้องไม่ลืมหลักที่ว่า ระนาบช่วยลำดับใดๆจะต้องตั้งฉากกับระนาบช่วยลำดับก่อนนั้นหน้าเสมอ ขณะ



รูปที่ 4.8 วิธีเขียนชุดของภาพช่วยแบบที่ 1



รูปที่ 4.9 วิธีเขียนชุดของภาพช่วยแบบที่ 2

เดียวกันผู้เขียนต้องวางวัตถุประสงค์ของการเขียนภาพช่วยให้ชัดเจนเพื่อที่จะได้กำหนดมุมมองหรือทิศทางของเส้นสายตา (LS) ได้ถูกต้อง วิวที่ได้จึงจะสมบูรณ์ตามวัตถุประสงค์ที่วางไว้และสุดท้ายการคลี่ระนาบช่วยก็ต้องทำให้ถูกต้องตามลำดับด้วย

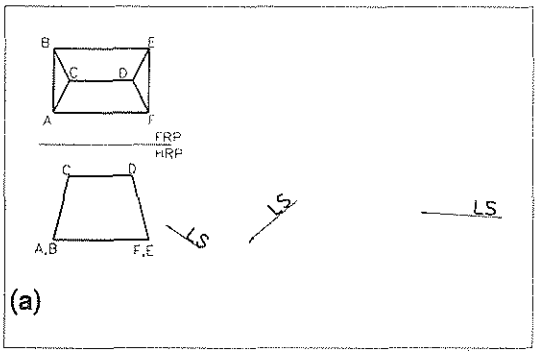
จากตัวอย่างเดียวกันนี้ การเขียนภาพช่วยเพื่อแสดงขนาดจริงของ ABC อาจมีได้หลายวิธี แต่ทั้งนี้แต่ละวิธีล้วนมีหลักการเดียวกัน รูปที่ 4.9 แสดงการสร้างภาพช่วย AUX1 ที่ตั้งฉากกับระนาบอ้างอิงด้านหน้า ซึ่งแตกต่างจากวิธีที่ผ่านมา ที่ระนาบช่วยตั้งฉากกับระนาบอ้างอิงด้านบน มุมมองหรือเส้นสายตาที่ตั้งฉากกับระนาบ AUX1 ยังจะต้องขนานกับเส้นที่แสดงความยาวจริงที่วิวหน้า คือเส้น AC ทำให้ ABC ที่วิวช่วยลำดับที่ 1 นี้เป็นเส้น จากนั้นให้สร้างระนาบช่วยตั้งฉากกับ AUX1 ขึ้นมาโดยมีมุมมองตั้งฉากกับเส้นAB หรือ CB ที่วิวช่วยนี้จะได้ขนาดจริงของ ABC ตามต้องการ

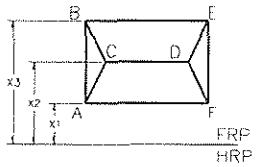
4.5 การสร้างภาพช่วยด้วยการใช้เส้นรอยพับ

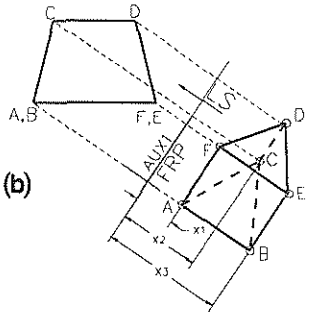
การสร้างภาพช่วยที่ได้กล่าวมาแล้วนั้นเป็นการสร้างด้วยการใช้เส้นรอยพับของระนาบอ้างอิง ในหัวข้อนี้จะทบทวนวิธีการสร้างอย่างละเอียด รูป 4.10 แสดงวิธีสร้างเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 โจทย์มักกำหนดภาพฉายของวัตถุให้สองวิว ซึ่งจะเป็นวิวหน้ากับวิวบนหรือวิวหน้ากับวิวข้างก็ได้ นอกจากวิวสองวิวแล้วก็จะบอกวัตถุประสงค์ของการสร้างมาให้ ในกรณีนี้โจทย์บอกแนวเส้นสายตา (LS) มาให้สามแนว หมายความว่าจะต้องสร้างวิวช่วยสามลำดับตามแนวของเส้นสายตาที่กำหนดให้ เพื่อไม่ให้สับสนในการโปรเจค ควรกำหนดตัวอักษรกำกับวัตถุไว้ทุกจุดบนภาพฉายทุกวิว ตรวจสอบด้วยว่าจุดเดียวกันบนแต่ละวิวต้องถูกกำกับด้วยอักษรตัวเดียวกัน

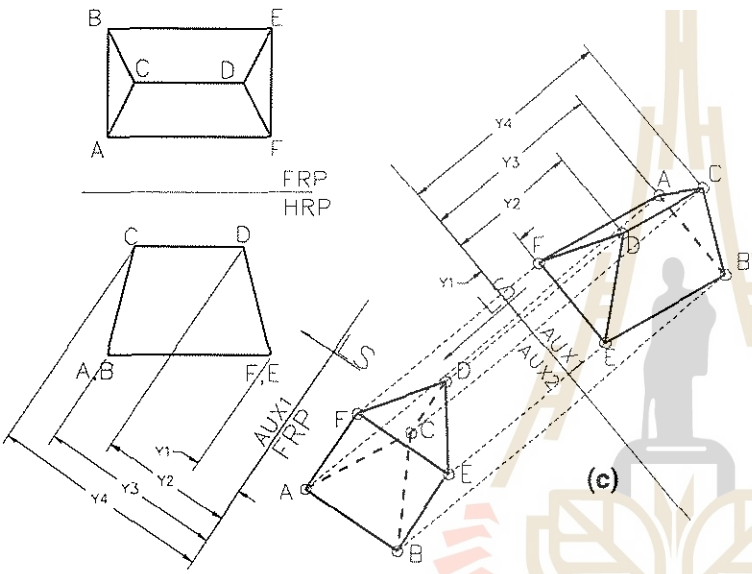
ขั้นที่ 2 ดูรูป 4.10 (b) เขียนเส้นแสดงรอยพับของระนาบอ้างอิงและระนาบช่วยAUX1 ก่อนพร้อมเขียนชื่อระนาบกำกับที่เส้นนี้ให้ถูกต้อง เนื่องจากการสร้างวิวช่วยนี้อาศัยการโปรเจคจากวิวหน้า จึงกำกับเส้นรอยพับด้วย AUX1 ที่วิวหน้าและ FRP ที่วิวช่วยลำดับที่ 1 จากนั้นโปรเจคจุดของวัตถุบนวิวหน้าในทิศทางตั้งฉากกับเส้นรอบพับไปยังระนาบ AUX1 ถ่ายระยะ 41,42,43 ซึ่งเป็นระยะที่จุดต่างๆของวัตถุห่างจากรอยพับ FRP แต่ไปปรากฏให้เห็นที่วิวบนมายังวิวช่วยลำดับที่ 1 ที่วิวนี้ระยะของจุดเหล่านั้นจะ





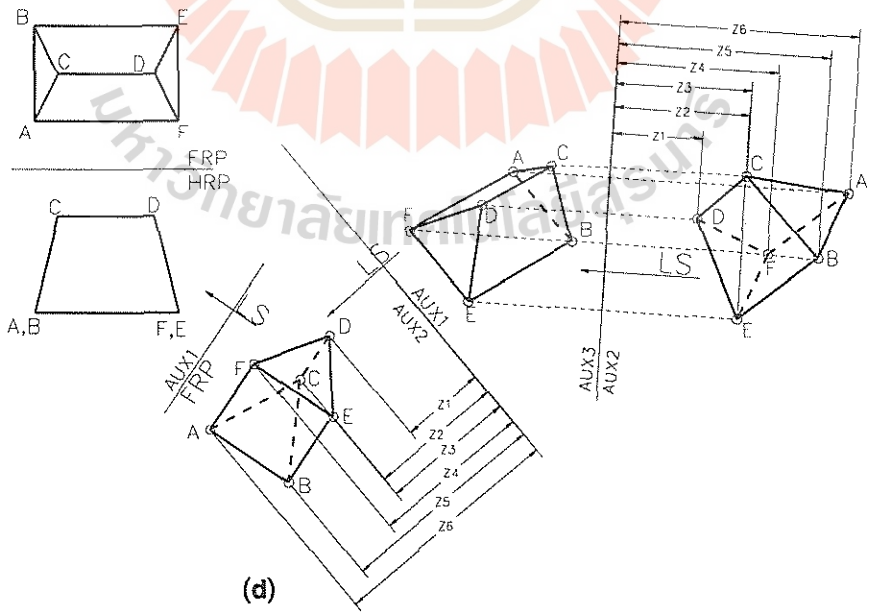


(b) เส้นรอยพับแสดงสันของระนาบต้องตั้งฉากกับ LS แนวเส้นโปรเจคจากวิวหน้าไปวิวช่วยขนานกับ LS สังเกตุการให้ชื่อระนาบที่เส้นรอยพับ



(c) สร้างเส้นรอยพับแสดงสันของระนาบ AUX1 และ AUX2 ตั้งฉากกับLS เส้นโปรเจคจากวิวช่วย 1ไปยัง 2 ขนานกับ LS สร้างภาพช่วยภาพที่ 2 สังเกตุการวัดระยะ x.1,2...และระยะ y..1,2....ในรูป (b) และรูป (c)

(d) เขียนวิวช่วยที่ 3 โดยอาศัยหลักการเดียวกันกับที่กล่าวถึงใน (b) และ (c) การเขียนวิวช่วยลำดับต่อๆไปก็ทำ เช่นเดียวกัน



รูปที่ 4.10 วิธีเขียนภาพช่วยโดยใช้เส้นรอยพับ

ห่างจาก FRP เหมือนกัน เขียนภาพวัตถุที่วิวนี้ให้สมบูรณ์โดยต้องพิจารณาด้วยว่าส่วนไหนของวัตถุถูกบังมองไม่เห็น ซึ่งจะต้องเขียนด้วยเส้นประให้ถูกต้อง พร้อมทั้งเขียนตัวอักษรกำกับไว้ทุกมุมของวัตถุ

ขั้นที่ 3 ดูรูป 4.10 (c) เขียนเส้นรอยพับของระนาบ AUX1 และ AUX2 โดยให้ตั้งฉากกับเส้นสายตา ทำเช่นเดียวกับการเขียนวิวช่วยลำดับที่ผ่านมา คือโปรเจคจุดต่างๆจาก AUX1 ให้ครบแล้วถ่ายระยะ Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ซึ่งเป็นระยะที่วัตถุห่างจาก AUX1 ที่วิวหน้ามายังวิวนี้ ทำวิวช่วยลำดับที่ 2 ให้สมบูรณ์

ขั้นที่ 4 ดูรูป 4.10 (d) ทำเช่นเดียวกับขั้นที่ 2 และขั้นที่ 3 การถ่ายระยะ $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, \ldots$ ก็ถ่ายจากวิวช่วยลำดับ 1 มายังลำดับ 3 เพราะเป็นระยะที่ห่างจากระนาบ AUX2 เหมือนกัน

4.6 การสร้างภาพช่วยด้วยระนาบอ้างอิง

การใช้ระนาบอ้างอิงในการสร้างภาพช่วยคล้ายกับการใช้เส้นรอยพับที่ได้กล่าวมาแล้ว ข้อดีคือผู้เขียนสามารถวางระนาบอ้างอิงไว้ที่ตำแหน่งใดก็ได้ ดังรูปที่ 4.11 แสดงการวางตำแหน่งของระนาบอ้างอิงที่แตกต่างกัน ระนาบอ้างอิงจะถูกอ้างอิงได้เมื่ออยู่ในวิวที่ปรากฏเป็นเส้นของระนาบ จากรูประยะ D จะใช้อ้างอิงระหว่างวิวบนและวิวช่วย สิ่งสำคัญอีกประการหนึ่งคือ แนวของเส้นที่โปรเจคและเส้นสายตาต้องตั้งฉากกับเส้นของระนาบอ้างอิง

4.7 ประโยชน์ของภาพช่วย

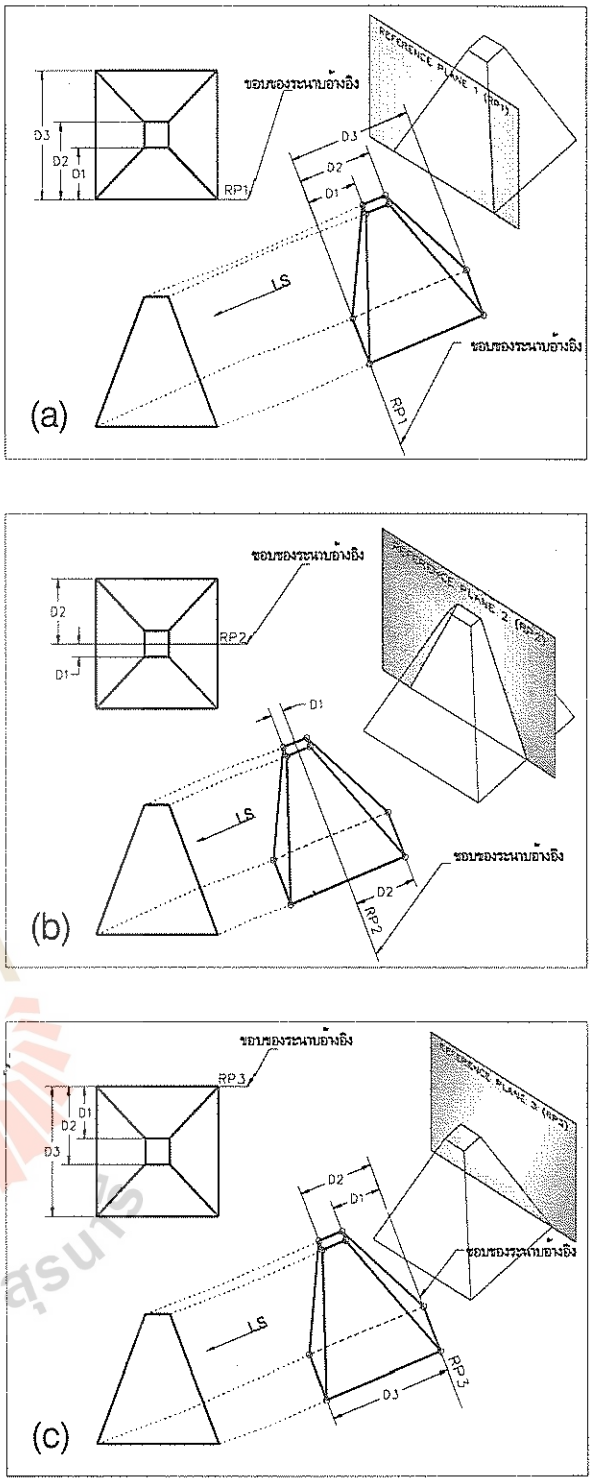
ประโยชน์ของภาพช่วยที่นำมาใช้อย่างกว้างขวางคือ

ใช้หาความยาวจริงของเส้น (True Length of Line)

ใช้แสดงภาพที่เห็นเส้นเป็นจุด (Point View of Line)

ใช้แสดงภาพที่เห็นระนาบเป็นเส้น (Edge View of Plane)

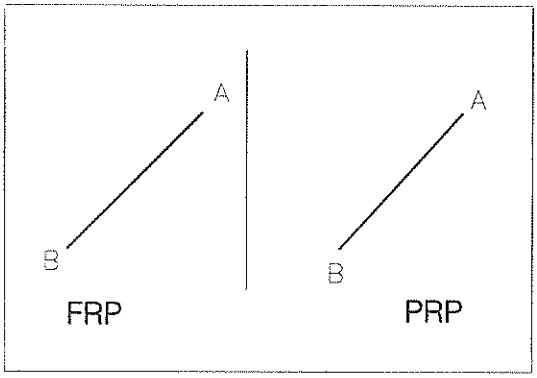
ใช้หาขนาดจริงของระนาบ (True Size of Plane)

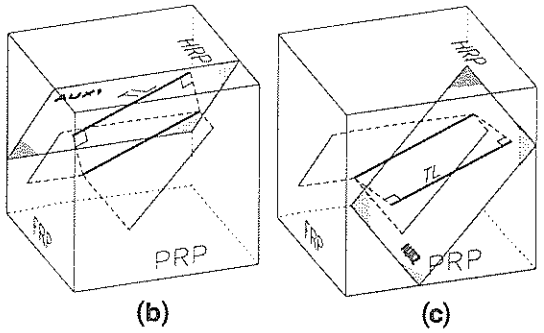


รูปที่ 4.11 การสร้างภาพช่วยด้วยระนาบอ้างอิง

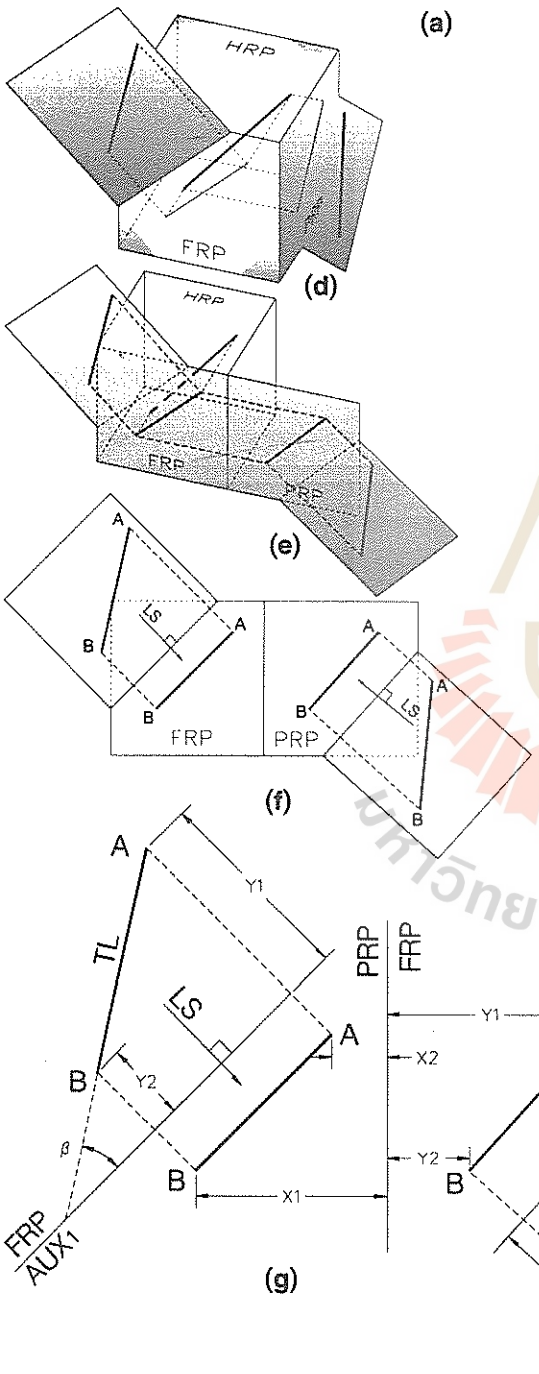
4.7.1 ความยาวจริงของเส้น (True Length of Line)

รูป 4.12 (a) โจทย์กำหนดเส้น AB มาให้สองวิว คือวิวหน้าและวิวข้าง ต้องการหาความยาวจริงของเส้น AB ความยาวจริงของเส้น AB หาได้





(a) กำหนดเส้น AB มาให้สองวิวคือวิวหน้าและวิวข้างให้หาความยาวจริงของ AB ถ้ามองเส้นเป็นภาพสามมิติจะสามารถเห็นตามที่แสดงในรูป (b) และ (c) ในรูป (b) แสดงระนาบช่วย AUX1 ที่ตั้งฉากกับระนาบอ้างอิงหน้า (FRP) ระนาบช่วยนี้จะรับภาพฉายที่มีความยาวจริงของเส้น ส่วนรูป (c) แสดงระนาบช่วย AUX2 ที่ตั้งฉากกับระนาบอ้างอิงด้านข้าง (PRP) ระนาบช่วยนี้จะรับภาพฉายที่เป็นความยาวจริงของเส้นตรงเดียวกัน ความยาวจริงสามารถฉายไปปรากฏในระนาบช่วยที่เอียงโดยวางตั้งฉากกับระนาบอ้างอิงด้านบนได้ (HRP)



รูป (d) เป็นการคลี่ระนาบช่วยทั้งสอง โดยการคลี่มีหลักการที่ว่า ระนาบช่วยที่ตั้งฉากกับระนาบอ้างอิงใด ให้คลี่ระนาบช่วยไปอยู่ในระนาบเดียวกันกับระนาบอ้างอิงนั้นๆ ดังที่แสดงในรูป (d)

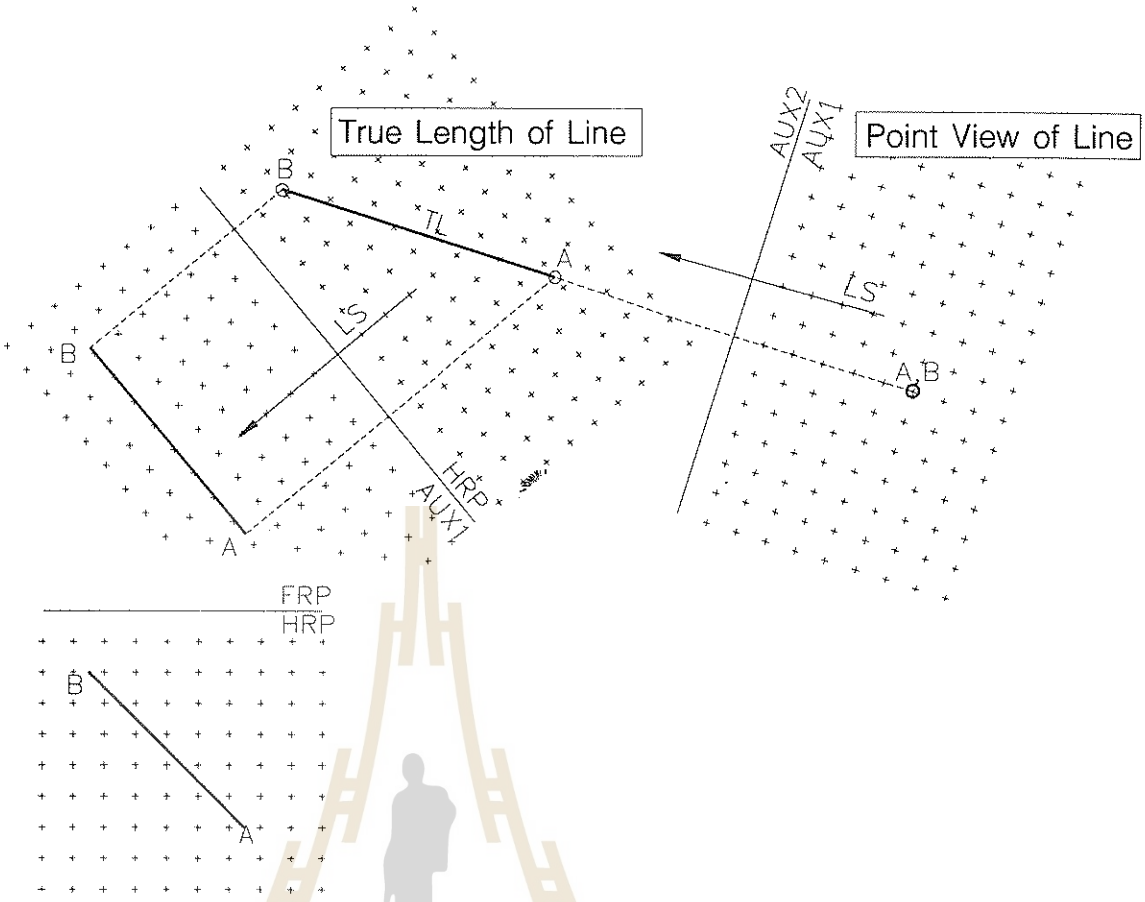
รูป (e) เป็นการคลี่ครั้งที่สองคือคลี่ระนาบ PRP และระนาบช่วย AUX2 มาที่ระนาบอ้างอิงด้านหน้า

รูป (f) เป็นภาพฉายที่มองตั้งฉากกับระนาบอ้างอิงด้านหน้า จะเห็นภาพช่วยที่แสดงความยาวจริงของเส้น AB ที่วิวช่วยทั้งสองวิว

รูป (g) เป็นการเขียนภาพฉายแสดงวิวช่วยที่โปรเจคจากระนาบด้านหน้าและระนาบด้านข้าง การเขียนวิวช่วยจะต้องวัดระยะที่เส้น AB ห่างจากสันของระนาบให้ถูกต้อง การกำกับชื่อของระนาบมีความสำคัญจะทำให้ไม่ผิดพลาดในการถ่ายระยะ x และ y

ที่ภาพช่วยบน AUX1 จะสามารถทราบมุม β ซึ่งเส้นกระทำกับ FRP ได้ เพราะ AB เป็นความยาวจริงและ FRP เป็นสันของระนาบทำนองเดียวกัน ภาพช่วยบนระนาบ AUX2 ก็สามารถทราบมุม α ที่เส้นทำกับ PRP ได้ด้วยเหตุผลเดียวกัน

รูปที่ 4.12 การหาความยาวจริงของเส้น

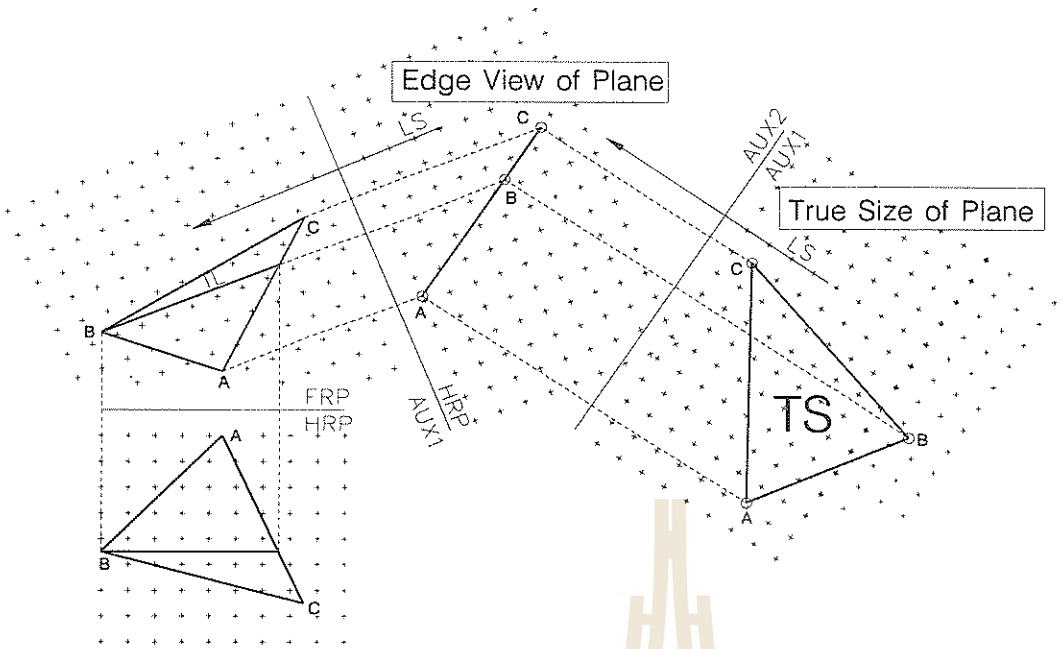


รูปที่ 4.13 ภาพของเส้นที่ปรากฏเป็นจุด

โดยการสร้างวิวช่วยซึ่งอาจสร้างขึ้นจากวิวหน้าโดยการโปรเจคในทิศทางที่เส้นสายตาตั้งฉากกับเส้น AB ที่ปรากฏในวิวหน้า ดูรูป 4.12 (b) หรือการสร้างวิวช่วยจากวิวด้านข้าง โดยการโปรเจคในทิศทางที่เส้นสายตาตั้งฉากกับ AB ที่ปรากฏในวิวด้านข้าง ดูรูป 4.12 (c) ความยาวจริงที่ได้ทั้งสองวิธีเป็นอันเดียวกัน ผลลัพธ์ที่แตกต่างกันประการหนึ่งคือ ภาพช่วยที่เกิดจากวิวหน้า ทำให้ทราบมุมที่เส้น AB กระทำกับระนาบ FRP การที่สามารถวัดมุมนี้ได้เพราะเส้น AB เป็นความยาวจริงและ FRP ที่วิวช่วยปรากฏเป็นสันของระนาบ ทำนองเดียวกันความยาวจริงของ AB ในวิวช่วยที่โปรเจคออกจากวิวข้าง ทำให้ทราบมุมที่ AB กระทำกับ PRP ทั้งนี้ด้วยเหตุผลเดียวกันซึ่งได้กล่าวถึงแล้ว เพื่อเป็นการทำให้เข้าใจดีขึ้นเกี่ยวกับภาพช่วยจึงแสดงให้เห็นด้วยภาพสามมิติ รูปที่ 4.12 (d) แสดงการคลี่ระนาบช่วย AUX_1 มาที่ระนาบหน้า และคลี่ระนาบช่วย AUX_2 มาที่ระนาบข้าง รูป 4.12 (e) แสดงการคลี่ระนาบข้างและ AUX_2 มาที่ระนาบหน้า รูป 4.12 (f) แสดงภาพฉายของภาพช่วยที่เขียนจากระนาบหน้าและระนาบข้าง รูป 4.12 (g) แสดงระยะ x...,y... ในการเขียนภาพฉาย นอกจากนั้นในรูปนี้ได้แสดงให้เห็นมุมที่เส้นกระทำกับระนาบหน้าและระนาบข้างด้วย

4.7.2 เส้นปรากฏเป็นจุด (Point View of Line)

หลักการที่จะเห็นเส้นปรากฏเป็นจุดก็คือการมองในทิศทางที่เส้นสายตาขนานกับเส้นที่มีความยาวจริง แต่ในภาพฉายเส้นที่เห็นในวิวต่างๆนั้นเป็นเส้นที่เอียงกับระนาบรับภาพ ถ้าเส้นนั้นไม่ใช่เส้นที่มีความยาวจริง ในวิวที่ใดๆก็ตามถ้าเห็นความยาวจริงของเส้นแสดงว่าเส้นนั้นต้องขนานกับระนาบรับภาพเสมอ จากข้อสรุปนี้การจะหาวิวที่แสดงจุดของเส้น วิวนั้นจะต้องมองขนานกับความยาวจริงของเส้น รูป 4.13 กำหนดเส้นในวิวหน้าและบนมาให้ ภาพช่วยลำดับที่



รูปที่ 4.14 สันของระนาบและขนาดจริงของระนาบ

1 สร้างเพื่อแสดงความยาวจริงของเส้น ภาพช่วยลำดับที่สอง แสดงจุดของเส้นซึ่งเส้นสายตาจะต้องขนานกับเส้นที่เป็นความยาวจริงที่ปรากฏในวิวช่วยลำดับที่ 1

4.7.3 สันของระนาบ (Edge View of Plane)

การสร้างวิวช่วยให้เห็นสันระนาบจะต้องอาศัยหลักการในหัวข้อที่ผ่านมา คือการหาความยาวจริงของเส้นและการเห็นจุดของเส้น เพราะถ้าเส้นที่กล่าวถึงนี้วางอยู่บนระนาบ ในวิวที่เห็นเส้นเป็นจุด ระนาบที่เส้นนั้นวางอยู่ก็จะต้องปรากฏให้เห็นเป็นสัน กรณีที่กล่าวถึงนี้ได้แสดงให้ดูมาแล้วในหัวข้อ 4.4 เกี่ยวกับชุดของภาพช่วย รูป 4.14 กำหนดระนาบ ABC ให้สองวิว ต้องการให้เขียนวิวที่แสดงสันของระนาบ ลำดับแรกสร้างเส้นบนระนาบโดยให้เป็นความยาวจริงที่อีกวิวหนึ่ง สมมุติว่าให้สร้างเส้นแนวนอนที่วิวหน้า ดังนั้นเส้นนี้จะต้องเป็นความยาวจริงที่วิวบน ลำดับต่อมาสร้างวิวช่วยให้เห็นเส้นเป็นจุดโดยการโปรเจคขนานกับเส้นที่มีความยาวจริง ระนาบ ABC ที่เห็นในวิวนี้จะกลายเป็นสัน

4.7.4 ขนาดจริงของระนาบ (True Size of Plane)

จากตัวอย่างที่กล่าวในหัวข้อที่แล้ว ถ้าสร้างวิวช่วยโดยโปรเจคตั้งฉากกับสันของระนาบ จะได้ขนาดจริงของระนาบ ดูรูปที่4.14ประกอบ

4.8 สรุป

ในบทนี้กล่าวถึงการสร้างภาพช่วย เพื่อหามุมมองวัตถุในตำแหน่งที่เหมาะสม ภาพช่วยคือภาพฉายบนระนาบช่วยที่เป็นระนาบเอียง เทียบกับระนาบอ้างอิง ภาพช่วยอาจถูกสร้างขึ้นเป็นชุดต่อเนื่องกัน ประโยชน์ของภาพช่วยมีหลายประการดั้งที่ได้กล่าวมาแล้ว

การประยุกต์ใช้ภาพช่วย

กล่าวนำ

ในบทนี้จะเป็นตัวอย่างที่ประยุกต์ใช้ภาพช่วยเพื่อแก้ปัญหาเรขาคณิตพรรณนา นอกจากนั้นอาจถือได้ว่าเป็นการแสดงวิธีแก้โจทย์ปัญหาเรขาคณิตพรรณนาด้วยวิธีการต่างๆที่หลากหลาย ตัวอย่างที่นำมาแสดง พยายามที่จะให้ครอบคลุมปัญหาที่ทำให้ผู้อ่านเกิดความเข้าใจและสามารถนำวิชานี้ไปประยุกต์แก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง ตัวอย่างที่นำมาจึงมีทั้งง่ายและยาก

โดยทั่วไป ปัญหาเรขาคณิตพรรณนาไม่ใช่ปัญหาที่ยาก ถ้าโจทย์ไม่กำหนดเงื่อนไขในการแก้ปัญหากำกับไว้ เราสามารถฉายภาพหรือสร้างภาพช่วย (Auxiliary Views) เพื่อได้มุมมองที่ต้องการได้ ที่ตำแหน่งนั้นๆจะสามารถเห็นความสัมพันธ์ของจุด เส้น ระนาบ ได้ตามต้องการ

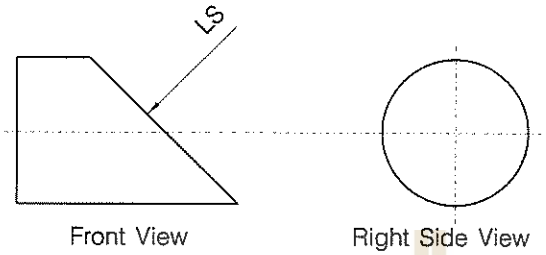
แต่ในทางวิชาการ เราจะถูกกำหนดให้แก้ปัญหาภายใต้เงื่อนไขที่จำกัด เช่นการไม่ยอมให้สร้างภาพช่วยในการแก้ปัญหา เป็นต้น ทำให้ต้องสร้างจินตนาการให้เกิดความเข้าใจ แล้วจึงแก้ปัญหาได้ สิ่งที่จะช่วยให้ผู้อ่านเกิดความเข้าใจได้ดีขึ้นก็คือ การสร้างรูปสามมิติประกอบในตัวอย่างต่างๆ ที่นำมาแสดงต่อไปนี้

หลักทฤษฎีที่นำมาใช้ในบทนี้ ไม่จำเพาะที่เกี่ยวกับเรื่องภาพช่วยเท่านั้น หากยังคลุมไปถึงบทต้นๆของวิชาเรขาคณิตพรรณนาด้วย โดยเฉพาะเนื้อหาในบทที่เกี่ยวกับ จุด เส้น ระนาบ จะมีการนำมากล่าวถึงและอ้างถึงบ่อยๆ บางตัวอย่างเช่นการหาจุดเสียบทะลุที่เส้นกระทำต่อระนาบก็จะนำมาอ้างถึงด้วย การเห็นการซ้อนกันของเส้นกับระนาบว่าส่วนไหนอยู่บนอยู่ล่างเมื่อฉายที่วิวบน ส่วนไหนอยู่หน้าอยู่หลังที่ภาพด้านหน้า ก็จะถูกกล่าวถึงด้วยเช่นกัน

ตัวอย่างที่ 1 การหาขนาดจริงของพื้นที่

กำหนดให้

รูปทรงกระบอกตัดเฉียง ให้ภาพฉายด้านหน้าและด้านขวา ดูรูปที่ 5.1 ให้สร้างวิวช่วยตามแนวเส้นสายตา (LS) เพื่อแสดงขนาดจริงของพื้นที่บนระนาบที่เอียงทำมุมกับแกนของทรงกระบอก



รูปที่ 5.1 ทรงกระบอกตัดเฉียง

ทฤษฎี

ภาพด้านหน้าแสดงสันของระนาบ ที่ต้องการหาขนาดและรูปร่างจริง แนวสายตา (LS) ตั้งฉากกับสันของระนาบนี้ ดังนั้นภาพช่วยในทิศทางนี้จะแสดงขนาดและรูปร่างจริงของพื้นที่ๆต้องการ

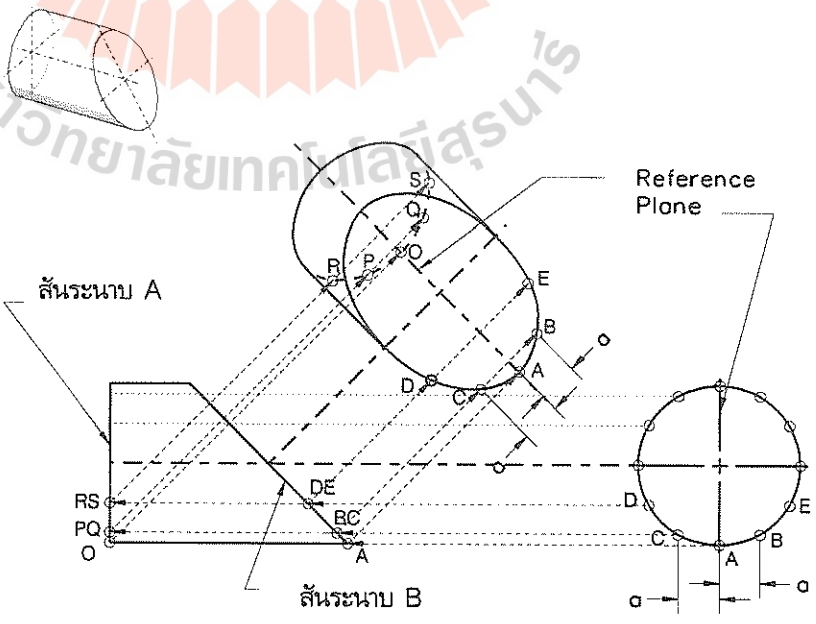
วิธีสร้าง

ที่วิวข้างขวา เป็นภาพแสดงพื้นที่หน้าตัดของระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของทรงกระบอก แบ่งเส้นรอบวงออกเป็นส่วนเท่าๆกัน ในที่นี้แบ่งเป็น 12 ส่วน (การแบ่งเส้นรอบวงออกเป็นจำนวนมาก จะทำให้ได้เส้นรอบรูปของระนาบเอียงที่เรียบ แต่จะใช้เวลามากในการสร้างรูป) ดูรูป 5.2

ตั้งแกนระนาบอ้างอิง (Reference Plane) ที่เส้นผ่าศูนย์กลางวงกลมของภาพด้านข้าง แล้วสร้างแกนระนาบอ้างอิงที่วิวช่วยโดยสร้างให้ตั้งฉากกับเส้นสายตา (LS) โดยวางให้ห่างจากวิวหน้าพอสมควร

โปรเจคจุดแบ่งเส้นรอบรูปจากวิวข้างไปยังวิวหน้า ให้ตัดสันระนาบ A และ B จากนั้นโปรเจคจุดดังกล่าวไปตัดกับแกนระนาบอ้างอิงที่วิวช่วย ต้องคำนึงตำแหน่งของจุดเดียวกันในแต่ละวิวโดยการให้สัญญลักษณ์กำกับให้ตรงกัน เช่น A B C

ถ่ายระยะระหว่างจุดแบ่งกับแกนระนาบอ้างอิงจากวิวข้างไปยังวิวช่วย (ระยะ a) ทำจนครบหมดทุกจุด ลากเส้นต่อระหว่างจุด จะได้ภาพช่วยตามต้องการ

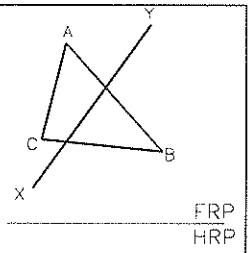


รูปที่ 5.2 แสดงวิธีหาขนาดจริงของระนาบเอียง

ตัวอย่างที่ 2 การหาจุดที่เส้นตรงเสียบทะลุระนาบ

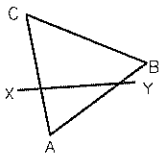
กำหนดให้

ระนาบ ABC และเส้นตรง XY ดูรูปที่ 5.3 (1) ประกอบ ให้หาจุดที่เส้น XY เสียบทะลุระนาบ ABC



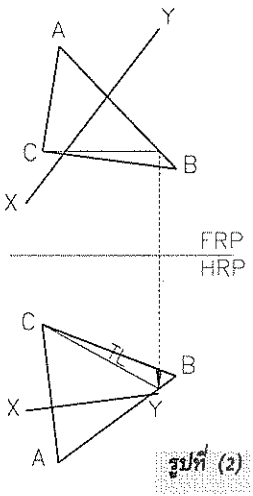
ทฤษฎี 1

สร้างภาพช่วยให้เห็นสันของระนาบโดยการโปรเจคขนานกับเส้นตรงที่มีความยาวจริง จะเห็นจุดตัดของระนาบกับเส้นตรง

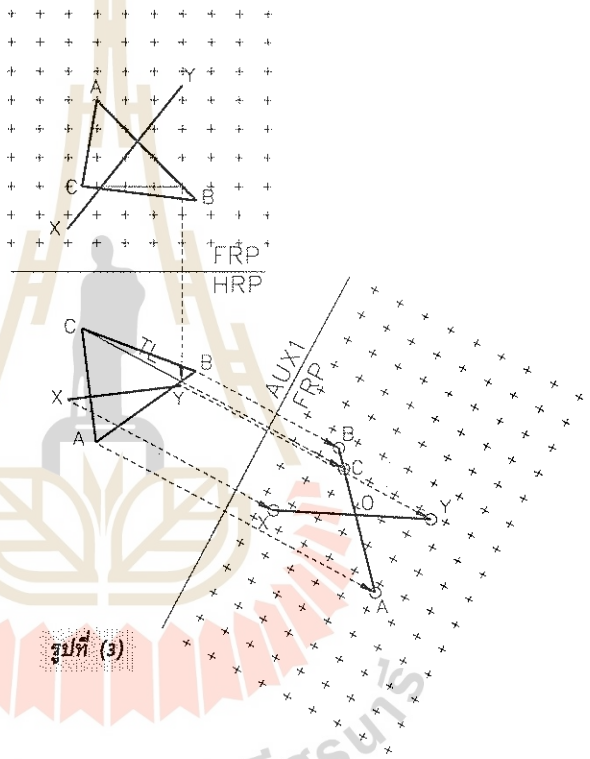


รูปที่ (1)

วิธีสร้างรูปที่ (2) แสดงวิธีหาความยาวจริงของเส้นที่อยู่บนระนาบ ABC โดยการลากเส้นขนานกับ FRP ที่วิวบน โปรเจคเส้นนี้มาที่วิวหน้า (หลักการสร้างเส้นที่มีความยาวจริง กล่าวถึงแล้วในบทก่อน หัวข้อ X.6 เส้นเอียงบนระนาบ)

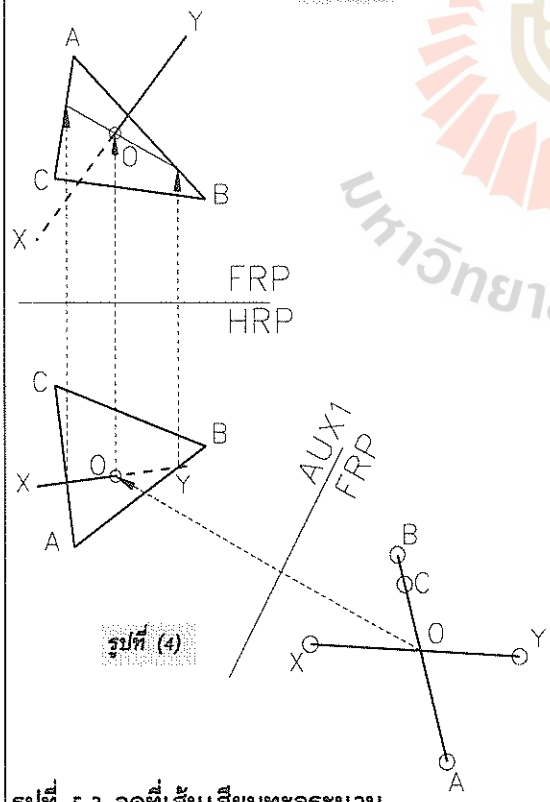


รูปที่ (2)



รูปที่ (3)

รูปที่ (3) แสดงวิธีสร้างภาพช่วยด้วยการสร้างระนาบช่วยในทิศทางที่เส้นสายตาขนานกับเส้นที่มีความยาวจริงในภาพหน้า ที่ภาพช่วยจะเห็นสันของระนาบ ABC ตัดกับเส้น XY



รูปที่ (4)

รูป (4) แสดงวิธีหาจุดเสียบทะลุโดยโปรเจคจุดตัดที่ภาพช่วยมายังภาพด้านหน้า และจากภาพด้านหน้าไปยังภาพด้านบน จากนั้นให้หาส่วนที่เส้นทับระนาบและระนาบทับเส้นโดยเขียนเส้นทึบและเส้นประที่วิวหน้าและวิวบน

รูปที่ 5.3 จุดที่เส้นเสียบทะลุระนาบ

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่างที่ 3 สร้างเส้นตรงตั้งฉากกับระนาบ

กำหนดให้

ระนาบ ABC กำหนดจุด O บนระนาบที่วิวหน้า ซึ่งเป็นจุดที่เส้นตรงเส้นหนึ่งเสียบทะลุและตั้งฉากกับระนาบนี้ ดูรูป 5.4 (1)

ทฤษฎี

เส้นตรงตั้งฉากกับระนาบจะต้องตั้งฉากกับเส้นที่อยู่บนระนาบนั้น และที่วิวใดๆการเห็นเส้นทำมุมฉากซึ่งกันและกันโดยที่เส้นใดเส้นหนึ่งหรือทั้งสองเส้นปรากฏเป็นความยาวจริงด้วย ย่อมแสดงว่าเส้นทั้งสองตั้งฉากกันจริงตามที่เห็น

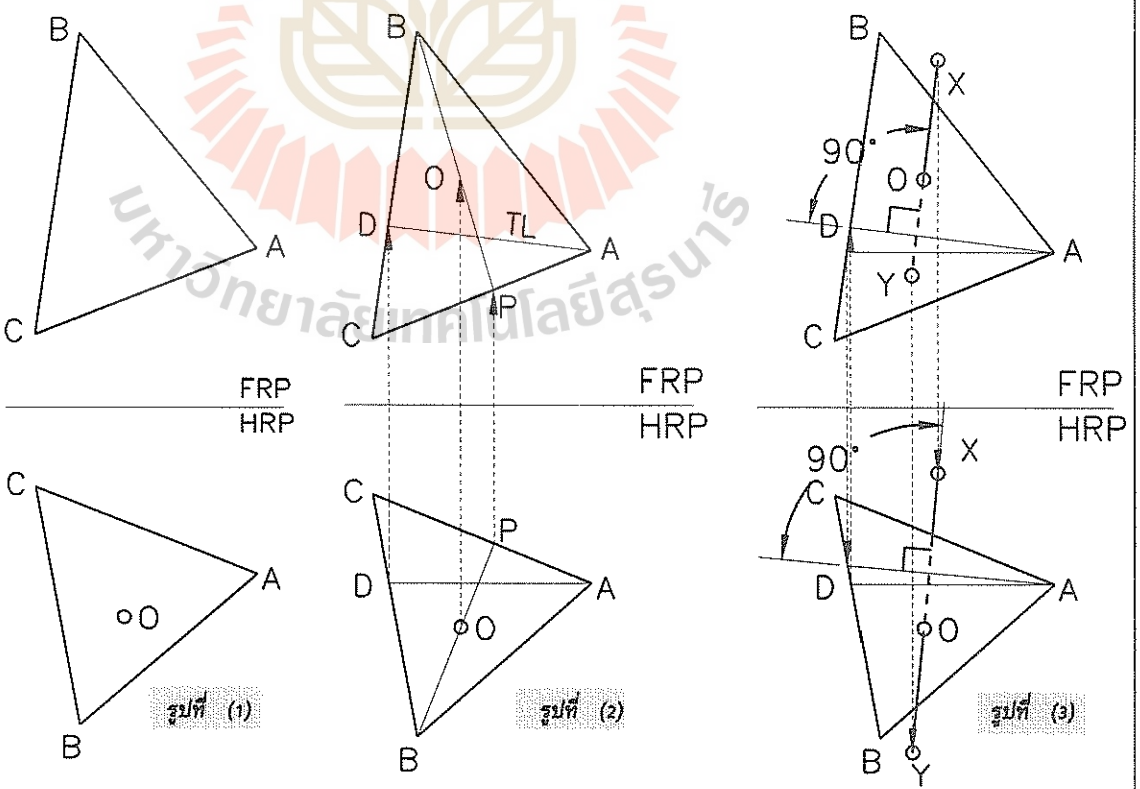
วิธีสร้างที่ 1

ไม่ใช้ภาพช่วย เริ่มจากหาจุด O ที่วิวบนก่อนโดยสร้างเส้น BP ที่วิวหน้าผ่านจุด O โปรเจคเส้น BP ขึ้นไปวิวบน แล้วโปรเจคจุด O จากวิวหน้าไปวางบนเส้น BP ที่วิวบน ดังที่แสดงในรูป (2)

สร้างเส้น AD ให้มีความยาวจริงที่วิวบนโดยการสร้าง AD ที่วิวหน้าให้ขนานกับสันของระนาบ HRP แล้วโปรเจคขึ้นไปวิวบนดังรูป (2) อาศัยหลักการที่อ้างในทฤษฎีที่กล่าวมาแล้ว สร้างเส้นตั้งฉากกับ AD ที่วิวบนโดยผ่านจุด O แล้วกำหนดจุด X และ Y ขึ้นเอง โปรเจคเส้นดังกล่าวมาที่วิวหน้า การหาแนวของเส้น xy ที่วิวหน้า ก็ทำเช่นเดียวกับการหาแนวเส้น XY ที่วิวบน คือแนวของเส้นจะต้องตั้งฉากกับเส้นที่มีความยาวจริงบนระนาบ ABC ที่วิวหน้าซึ่งแสดงวิธีการดังกล่าวในรูป (3)

ข้อสังเกตุ

เส้น XY ที่สร้างตั้งฉากกับ AD ไม่จำเป็นตัดกับ AD



รูปที่ 5.4 การสร้างเส้นตังฉากกับระนาบโดยไม่ใช้ภาพช่วย

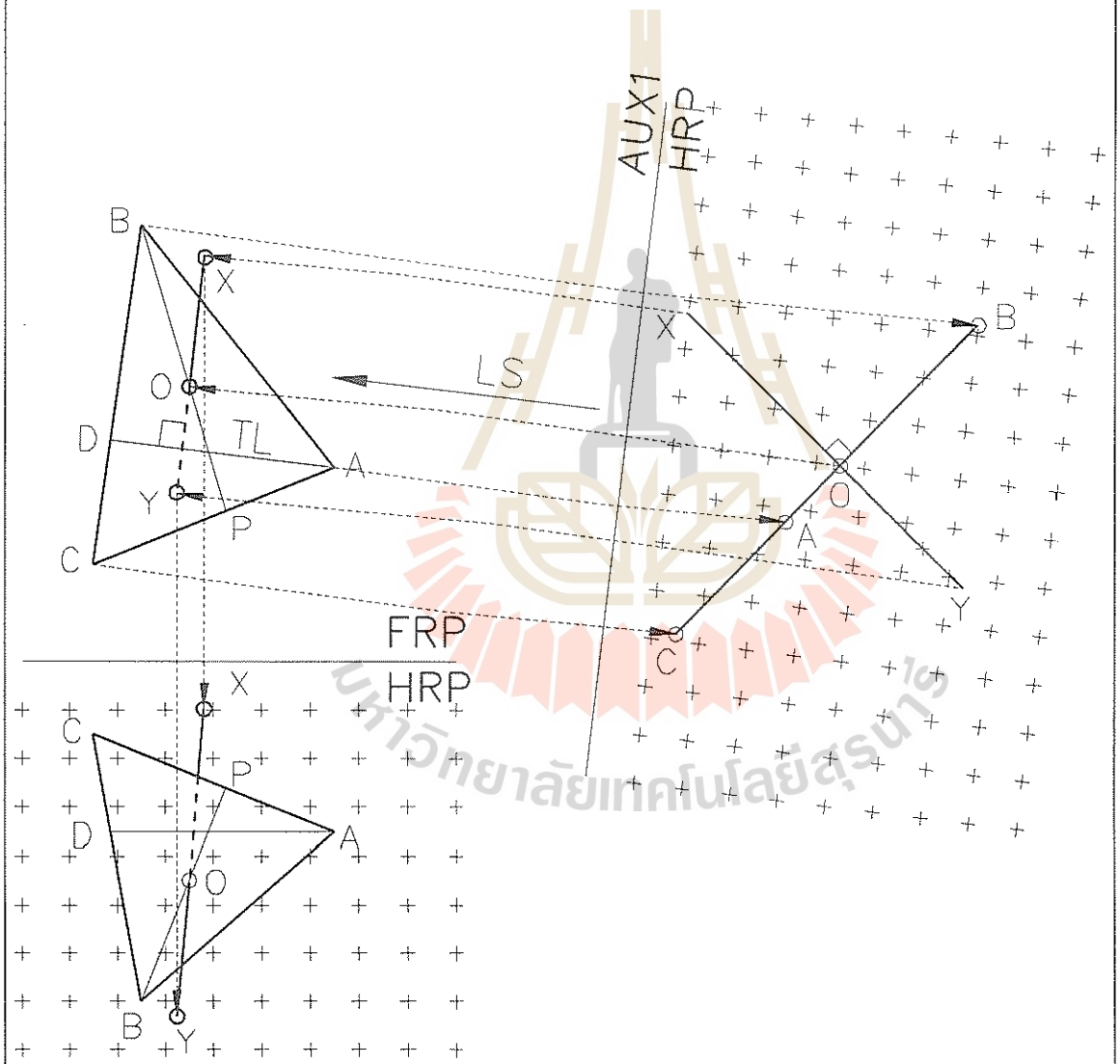
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

วิธีสร้างที่ 2

ใช้วิธีการสร้างภาพช่วย สร้างภาพช่วยให้เห็นสันของระนาบ ABC ซึ่งทำโดยการสร้างระนาบช่วยในทิศทางขนานกับเส้นความยาวจริง DA ที่วิวบน โปรเจคจุด O จากวิวบนไปวิวช่วย สร้างเส้น XY ตั้งฉากกับเส้น ABC ผ่านจุด O แล้วโปรเจคกลับมาที่วิวบนและวิวหน้า ตามรูปที่ 5.5 จุดกากบาทที่ปรากฏบนวิวช่วยและวิวหน้าแสดงการอ้างอิงระยะของจุดต่างๆจากวิวหน้าไปวิวช่วย

ข้อสังเกตุ

ปัญหานี้หรือปัญหาอื่นๆในวิชาเรขาคณิตพรรณนา สามารถหาคำตอบได้หลายวิธี แต่มักนิยมวิธีที่สั้นที่สุด



รูปที่ 5.5 การสร้างเส้นตั้งฉากกับระนาบโดยใช้ภาพช่วย

ตัวอย่างที่ 4 การสร้างระนาบตั้งฉากกันเส้น

กำหนดให้

เส้น AB ในวิวหน้าและวิวบน ดูรูปที่ 5.6 (1)

ทฤษฎี

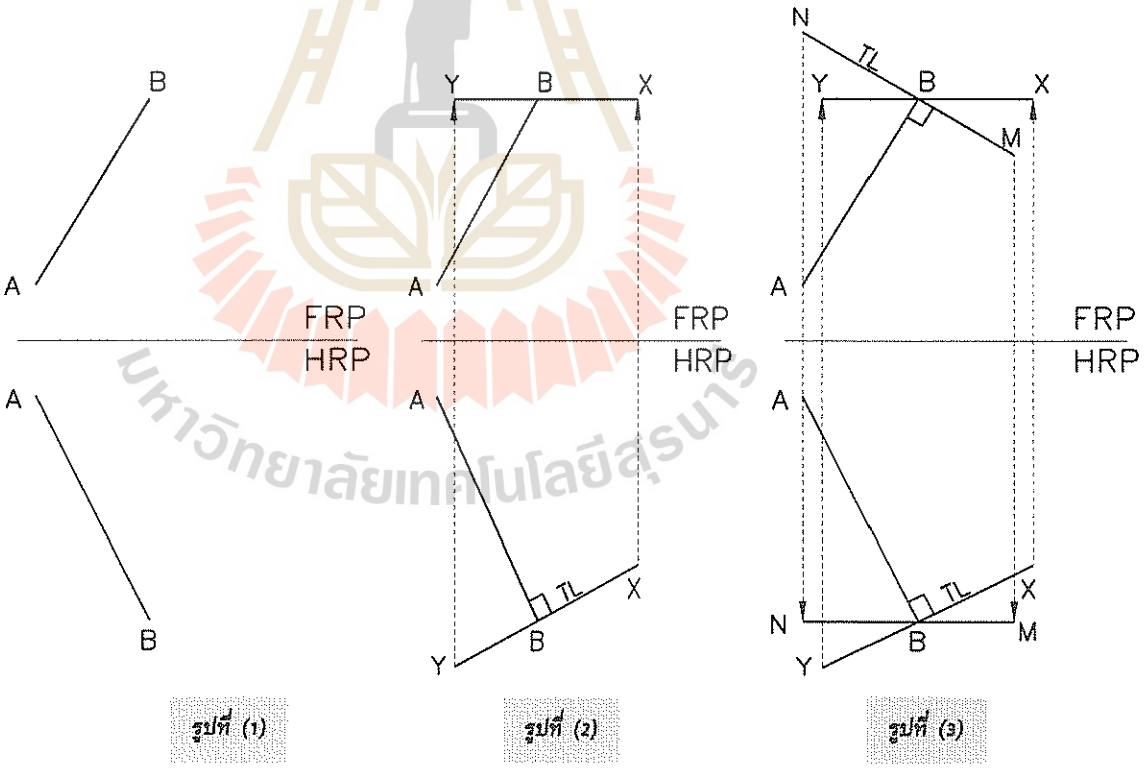
ใช้หลักเดียวกับตัวอย่างที่ 3

วิธีสร้างที่ 1

ไม่ใช้ภาพช่วย ดูรูปที่ (2) ที่วิวบน สร้างเส้น XY ผ่านจุด B โดยให้ขนานกับ FRP เส้นนี้ถ้าโปรเจคมาที่วิวหน้าจะเป็นเส้นที่มีความยาวจริง เนื่องจากเราต้องการให้เส้น XY ตั้งฉากกัน AB ดังนั้นที่วิวหน้าจึงกำหนดให้ XY ตั้งฉากกับ AB

รูปที่ (3) สร้างเส้น MN ขนานกับ HRP ที่วิวหน้าและผ่านจุด B ทำนองเดียวกันเส้นนี้จะกำหนดให้เป็นเส้นตั้งฉากกัน AB ดังนั้นเส้นนี้จะต้องตั้งฉากกับ AB ที่วิวบน จึงโปรเจคเส้น MN ขึ้นไปวิวบนและให้ผ่านจุด B

เนื่องจากหลักการที่ว่า เส้นสองเส้นตัดกันทำให้เกิดเป็นระนาบ ดังนั้นการตัดกันของ XY และ MN จึงเกิดเป็นระนาบที่ตั้งฉากกับเส้น AB ตามต้องการ



รูปที่ (1) รูปที่ (2) รูปที่ (3)

รูปที่ 5.6 ระนาบตั้งฉากกับเส้น

วิธีสร้างที่ 2

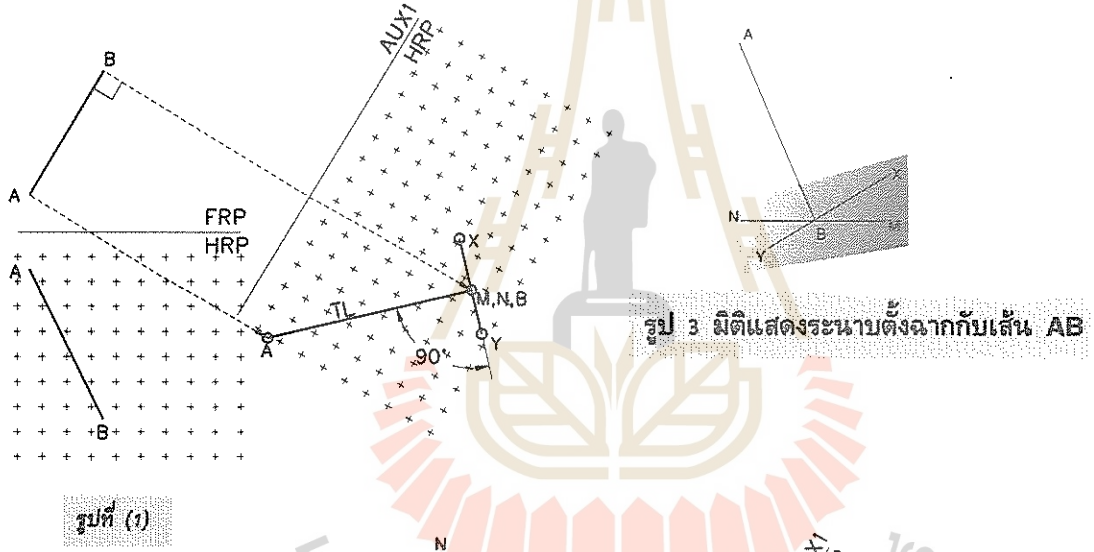
รูปที่ 5.7 (1) สร้างภาพช่วยบนระนาบที่เห็นเส้น AB เป็นความยาวจริง ภาพช่วยนี้จึงถูกสร้างโดยการโปรเจคตั้งฉากกับเส้น AB ที่วิวบน ที่ภาพช่วยจะต้องเห็นระนาบ XYMN เป็นสันที่ตั้งฉากกับเส้น AB ด้วย ดังนั้นจึงสร้างเส้นตั้งฉากกับเส้น AB ซึ่งเส้นนี้คือสันของระนาบ XYMN นั่นเอง

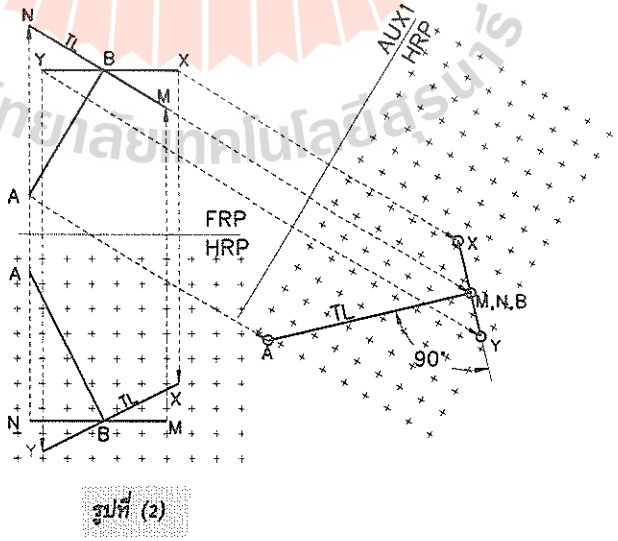
เนื่องจากที่วิวบน เส้น AB ตั้งฉากกับเส้น MN ซึ่งเป็นความยาวจริง ดังนั้นที่วิวช่วยนี้ จะเห็นเส้น MN เป็นจุด (End View) ส่วน XY ก็จะเห็นเป็นเส้นที่ตั้งฉากกับ AB

เมื่อกำหนดจุดต่างๆเรียบร้อยแล้วก็โปรเจคย้อนกลับไปยังวิวบน ซึ่งตำแหน่งต่างๆของแต่ละจุด ถูกกำหนดขึ้นเองโดยจะต้องอยู่ในแนวที่โปรเจคมาจากวิวช่วย สำหรับที่วิวหน้า ให้โปรเจคแต่ละจุดจากวิวบนลงมาแล้วถ่ายระยะจากวิวช่วยซึ่งเป็นระยะที่แต่ละจุดห่างจาก HRP มาที่วิวหน้า ตามรูปที่ (2)

ข้อสังเกตุ

การนำวิธีสร้างที่ 2 มาแสดงให้ดูนี้เพื่อจะให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับการใช้ประโยชน์ภาพช่วยและเป็นการพิสูจน์ว่า วิธีที่ 1 นั้นถูกต้อง





รูปที่ 5.7 ระนาบตั้งฉากกับเส้น(ภาพช่วย)

ตัวอย่างที่ 5 การหาระยะสั้นที่สุดระหว่างเส้นเทเอียงสองเส้น

กำหนดให้

กำหนดเส้น AB และเส้น CD มาให้สองวิวคือวิวหน้าและวิวบนดังรูป 5.8 (1)

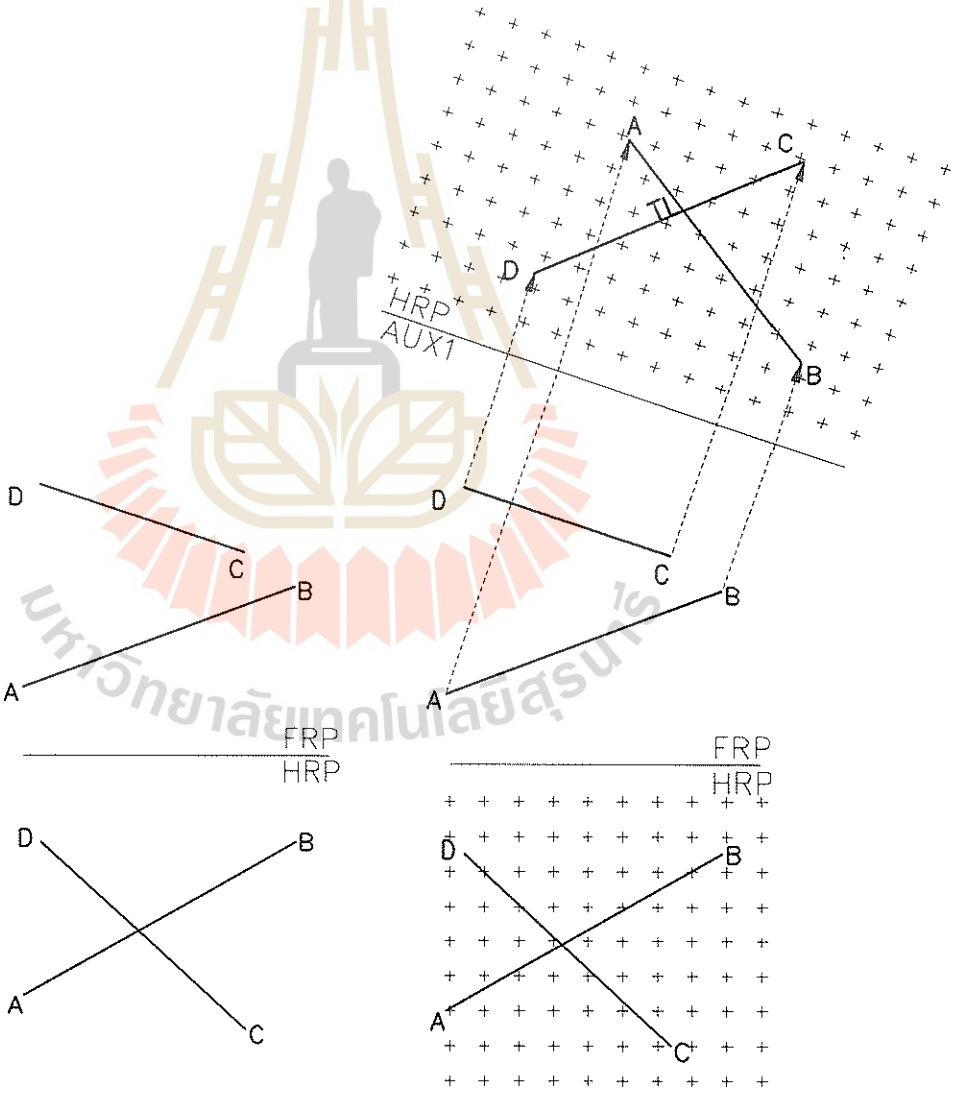
ทฤษฎี

ระยะที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นสองเส้นคือความยาวของเส้นที่เชื่อมต่อเส้นทั้งสองโดยที่เส้นนี้จะต้องตั้งฉากกับเส้นทั้งสองด้วย

วิธีสร้างที่ 1

อาศัยหลักการที่หามุมมอง หรือสร้างภาพช่วยในตำแหน่งที่มองเห็นเส้นใดเส้นหนึ่งเป็นจุด ในที่นี้จะสร้างภาพช่วยที่เห็นเส้น CD เป็นจุด ในวิวช่วยวิวนี้ลากเส้นจากจุด CD ให้ตั้งฉากกับเส้น AB ซึ่งเส้นนี้คือเส้น XY ซึ่งเป็นเส้นที่สั้นที่สุดที่เชื่อมต่อ AB และ CD

รูปที่ (2) แสดงการสร้างภาพช่วยที่เห็นเส้น CD เป็นความยาวจริงโดยการโปรเจคตั้งฉากกับเส้น CD ออกไปจากวิวบน ถ่ายระยะจากวิวหน้ามายังวิวช่วย



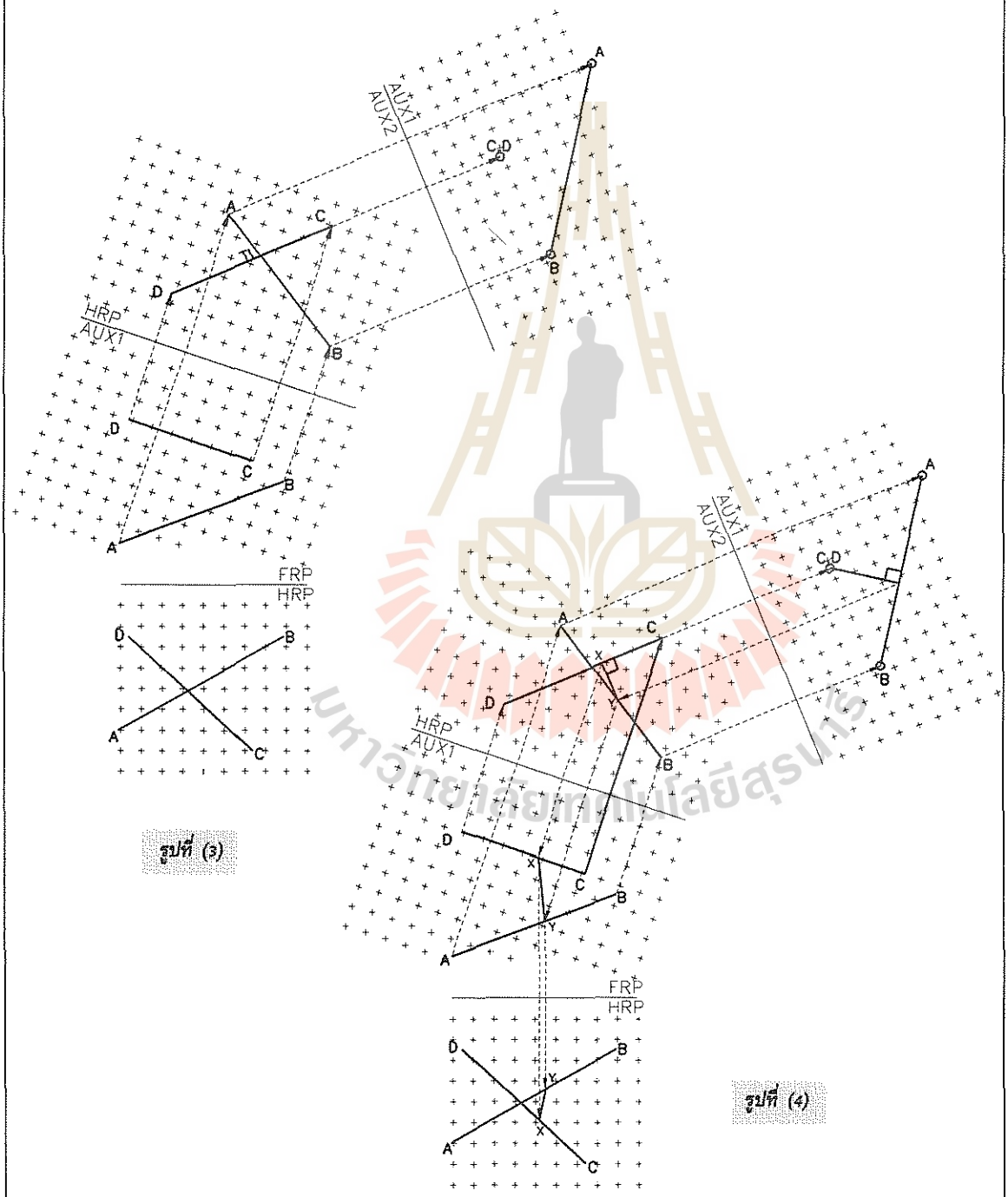
รูปที่ (1) รูปที่ (2)

รูปที่ 5.8 การหาระยะที่สั้นสุดระหว่างเส้นเทเอียงสองเส้นด้วยวิธีภาพช่วย

รูปที่ (3) สร้างภาพช่วยชุดที่ 2 โดยให้เห็นเส้น CD เป็นจุด ดังนั้นจะต้องโปรเจคในทิศทางขนานกับเส้นความยาวจริง CD ที่วิวเดียวกันนี้ลากเส้นจากจุด CD ให้ตั้งฉากกับเส้น AB ซึ่ง**เส้นนี้จะเป็นเส้นที่มีความยาวจริง** ดูรูปที่ (4) ประกอบ

โปรเจคจากภาพช่วยชุดที่ 2 มายังภาพช่วยชุดที่ 1 เขียนเส้น XY โดยจุด Y ได้จากการโปรเจคจากภาพช่วยชุดที่ 2 มาที่ภาพช่วยชุดที่ 1 ลากเส้นจาก Y ตั้งฉากกับ CD ที่ X (CD เป็นความยาวจริงที่วิวนี้)

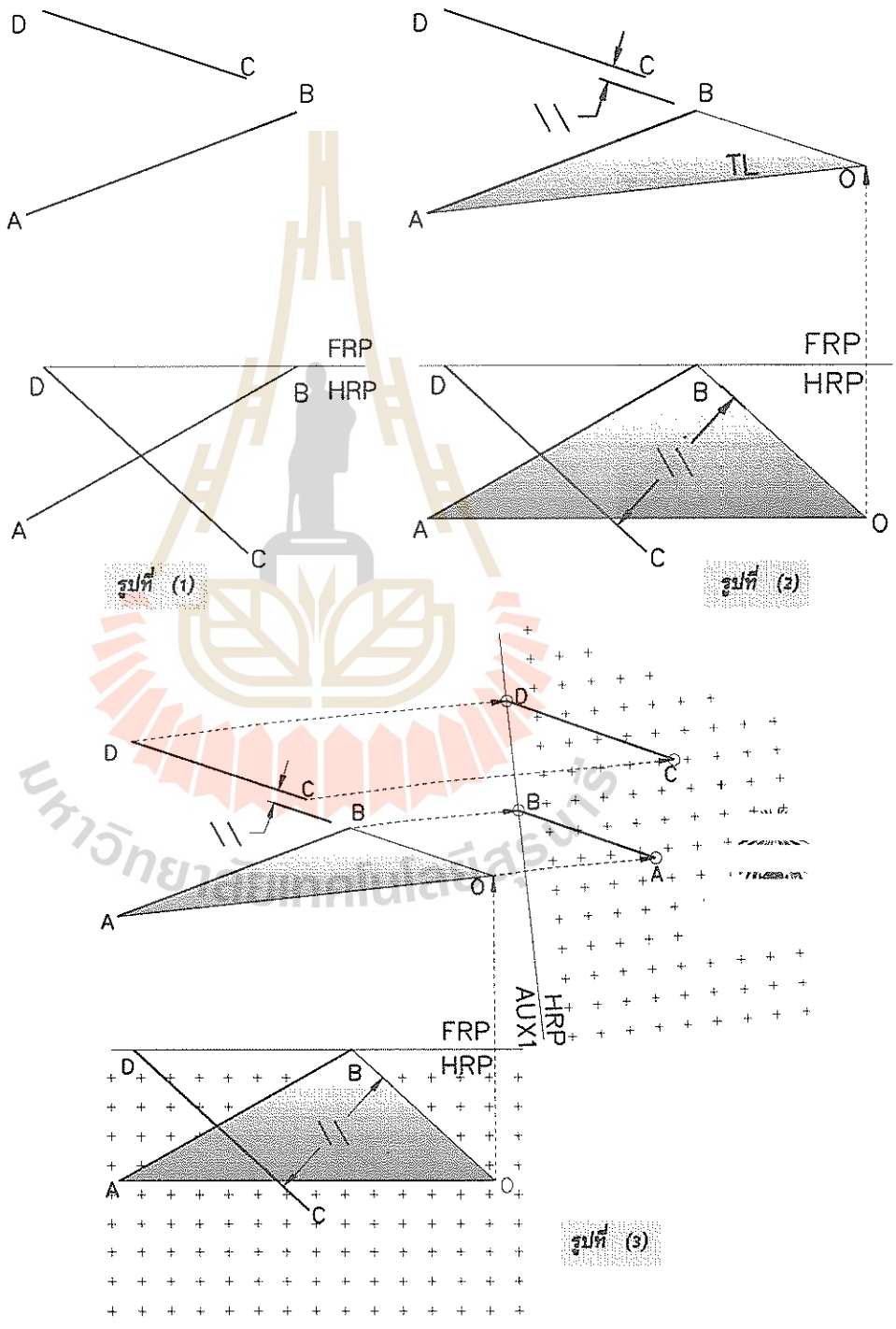
โปรเจคเส้น XY ย้อนกลับมาที่วิวบนและวิวหน้าก็จะได้ระยะที่สั้นที่สุดระหว่างเส้น AB และ CD



รูปที่ 5.8 (ต่อ)การหาระยะที่สั้นสุดระหว่างเส้นเทเอียงสองเส้นด้วยวิธีภาพช่วย

วิธีสร้างที่ 2

สร้างระนาบที่ให้เส้น AB วางอยู่บนระนาบนั้นและต้องเป็นระนาบที่ขนานกับเส้น CD พร้อมกันไปด้วย หามุมมองที่เห็นระนาบเป็นสัน ซึ่งที่วิวช่วยนี้จะปรากฏเป็นเส้นขนานกันโดยที่เส้นหนึ่งเป็นสันของระนาบ อีกเส้นหนึ่งคือเส้น CD สร้างภาพช่วยลำดับที่ 2 ในทิศทางที่ตั้งฉากกับเส้นทั้งสองในภาพช่วยลำดับที่ 1 ซึ่งที่วิวนี้เส้น CD และ AB เป็นเส้นที่มีความยาวจริง จุดตัดของเส้นทั้งสองบนวิวนี้จะต้องเป็นตำแหน่งเดียวกันกับเส้นที่เชื่อมและตั้งฉากกับเส้นทั้งสอง ซึ่งเป็นระยะที่สั้นที่สุดระหว่างเส้น AB และ CD



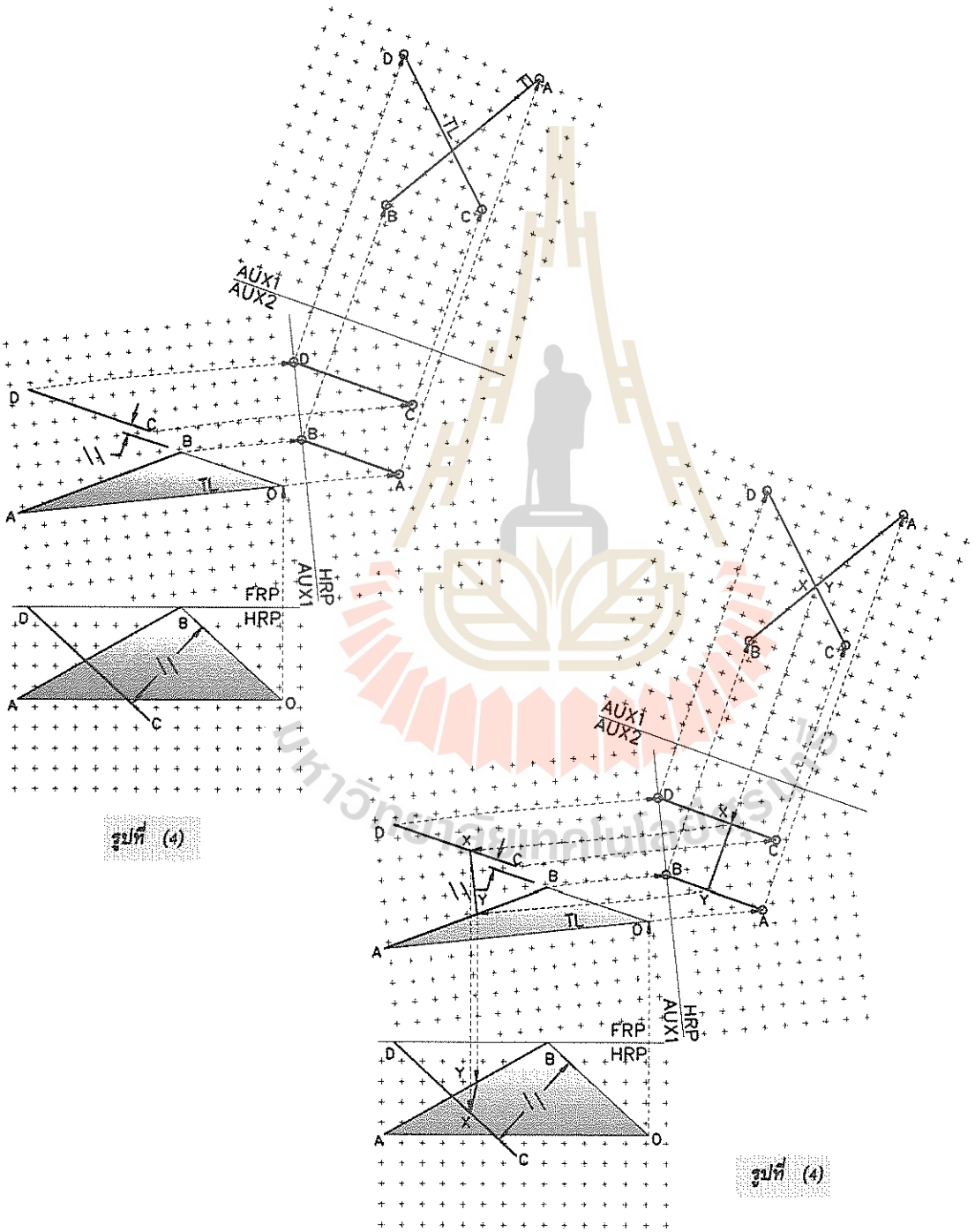
รูปที่ 5.9 การหาระยะที่สั้นสุดระหว่างเส้นเทเอียงสองเส้นด้วยวิธีสร้างระนาบขนานกับเส้น

รูปที่ 5.9(2) แสดงวิธีสร้างระนาบ ABO ที่ขนานกับเส้น CD

รูปที่ 5.9(3) แสดงวิธีสร้างภาพช่วยลำดับที่ 1 ซึ่งโปรเจคขนานกับเส้นความยาวจริง AO ที่วิวนี้เส้น AB เป็นสันของระนาบ ABO

รูปที่ (4) แสดงการสร้างภาพช่วยลำดับที่ 2 โปรเจคตั้งฉากกับเส้นทั้งสอง ที่วิวนี้ไม่ได้แสดงระนาบ ABO เพราะไม่จำเป็น เส้น AB และ CD เป็นเส้นที่มีความยาวจริง ที่วิวนี้เห็นจุดตัดของเส้นทั้งสอง

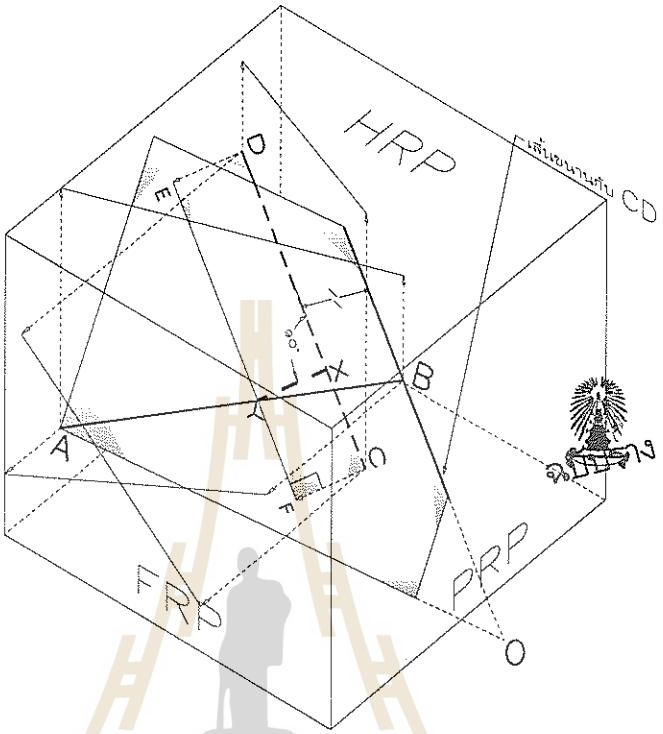
รูปที่ (5) โปรเจคจุดตัดกลับมาที่ภาพช่วยลำดับที่ 1 จะได้เส้น XY และโปรเจคจุด X,Y กลับมาที่วิวบนและวิวหน้าตามลำดับ



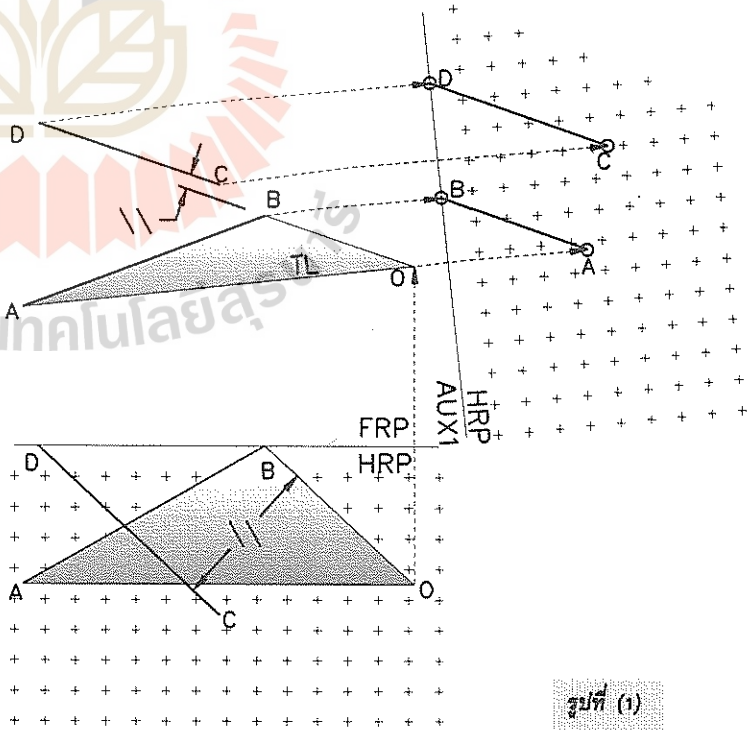
รูปที่ 5.9 (ต่อ) การหาระยะที่สั้นสุดระหว่างเส้นเทเอียงสองเส้นด้วยวิธีสร้างระนาบขนานกับเส้น

วิธีสร้างที่ 3

เป็นวิธีสร้างที่ไม่ต้องใช้ภาพช่วยลำดับที่ 2 ให้ดูรูป 3 มิติ 5.10 ประกอบ ที่รูปนี้จะเห็นระนาบ CDEF ซึ่งเส้น EF ได้จากการโปรเจค CD ลงมาตั้งฉากกับระนาบ ABO จุดตัดกันของ AB และ EF คือจุด Y

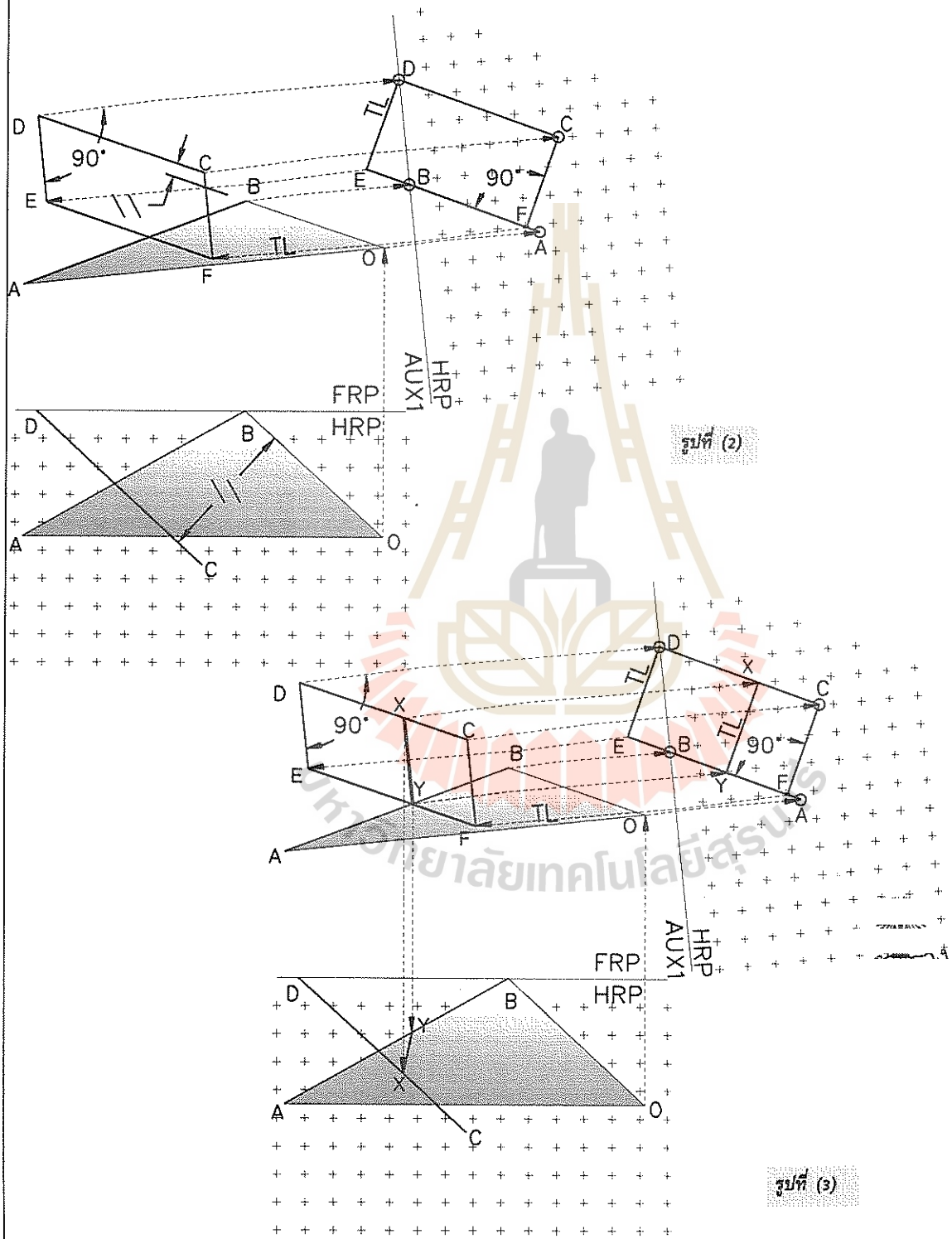


รูปที่ 5.10 หาระยะสั้นสุดระหว่าง AB และ CD โดยการโปรเจค CD ไปที่ระนาบ ABO



รูปที่ 5.11 การหาระยะที่สั้นสุดระหว่างเส้นเทเอียงสองเส้นด้วยวิธีลัด

ในการสร้างบนภาพที่เป็นสองมิติ การหาจุด Eและ F ทำได้โดยดูรูป 5.11 (3) จะเห็นว่า ที่วิวช่วยเส้นAB และ CD เป็นเส้นขนานกัน สร้างเส้น DE และ CF ตั้งฉากกับเส้นทั้งสอง ซึ่งจะต้องเป็นความยาวจริงที่วิวนี้ด้วย ถ้าโปรเจคเส้นทั้งสองย้อนกลับไปที่วิวบน เส้นทั้งสองจะต้องตั้งฉากกับแนวโปรเจค ทำให้สามารถหาจุด E และจุด F บนวิวบนได้ จากนั้นลากเส้น EF ซึ่งจะตัดกับ AB ที่ Y ลากเส้น YX ขนานกับ DE ไปตัดกับเส้น CD ดังนั้น XY เป็นระยะที่สั้นสุดระหว่างเส้นABและCD



รูปที่ 5.11 (ต่อ) การหาระยะที่สั้นสุดระหว่างเส้นเทเอียงสองเส้นด้วยวิธีลัด

ตัวอย่างที่ 6 การหาเส้นในแนวราบ (Horizontal Line) ที่สั้นที่สุดที่เชื่อมเส้นเทเอียงสองเส้น

กำหนดให้

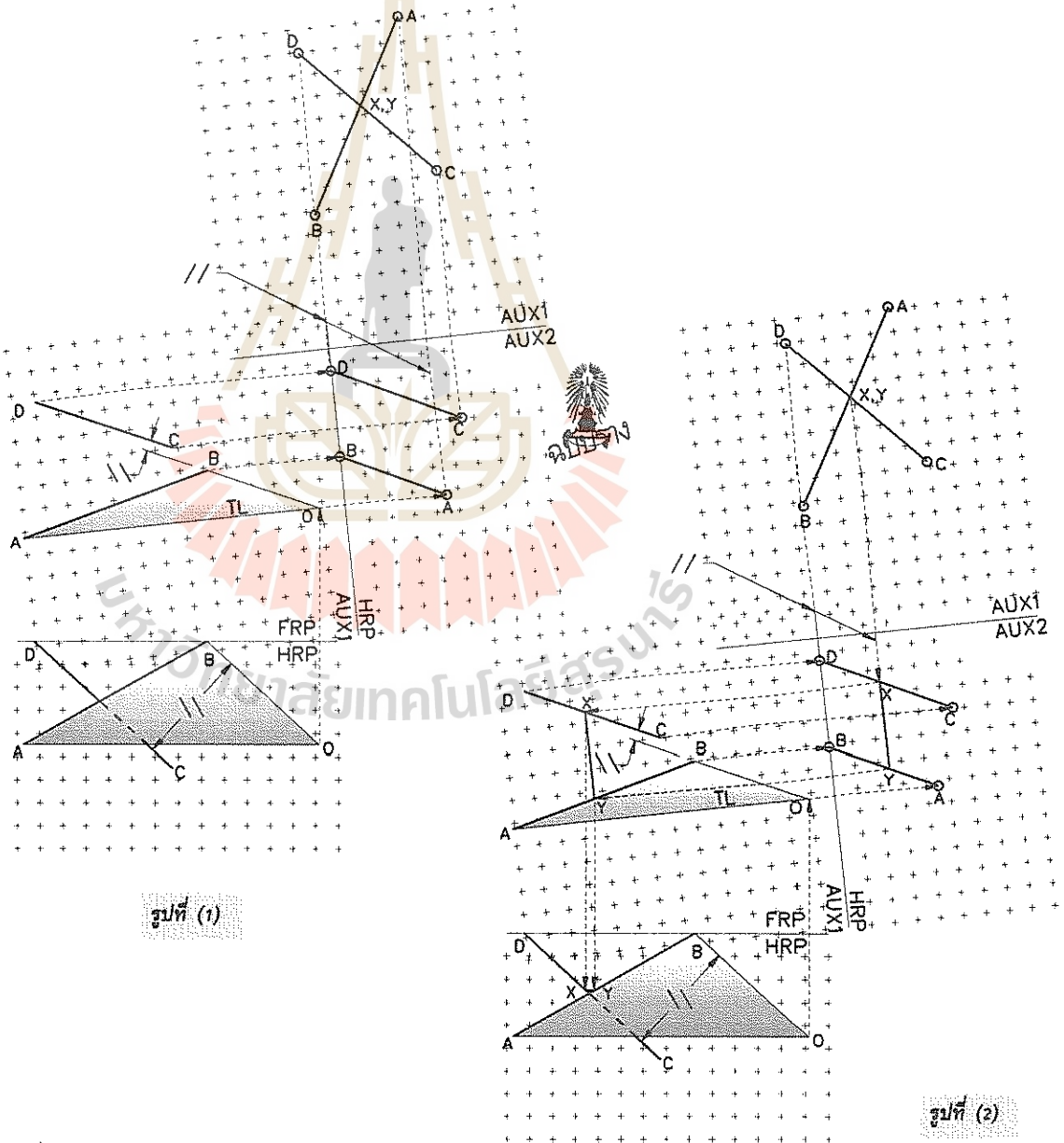
เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 5

ทฤษฎี

เหมือนกับตัวอย่างที่ 5 แต่สิ่งที่เพิ่มเติมคือ เส้นแนวราบจะต้องขนานกับเส้นที่เป็นสันของระนาบ HRP

วิธีสร้าง

ทำเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 5 (ดูรูป 5.12 ประกอบ) ในการสร้างภาพช่วยลำดับที่ 2 ให้โปรเจคออกไปในแนวที่ขนานกับสันของระนาบ HRP ที่วิวนี้จะเห็นเส้น AB ทับกับ CD จุดทับกันคือจุด X และ Y บนเส้น CD และ AB ตามลำดับ โปรเจคจุดดังกล่าวกลับมาที่ วิวช่วยลำดับที่ 1 วิวบนและวิวหน้า เส้น XY ที่ปรากฏที่วิวหน้าจะต้องเห็นเป็นเส้นในแนวนอนด้วย ดูรูป (2) ประกอบ



รูปที่ 5.12 ระยะระหว่างเส้นในแนวนอน

ตัวอย่างที่ 7 การหาเส้นที่มีความชัน 25% เกรด ที่สั้นที่สุดที่ต่อเส้น AB และ CD

กำหนดให้

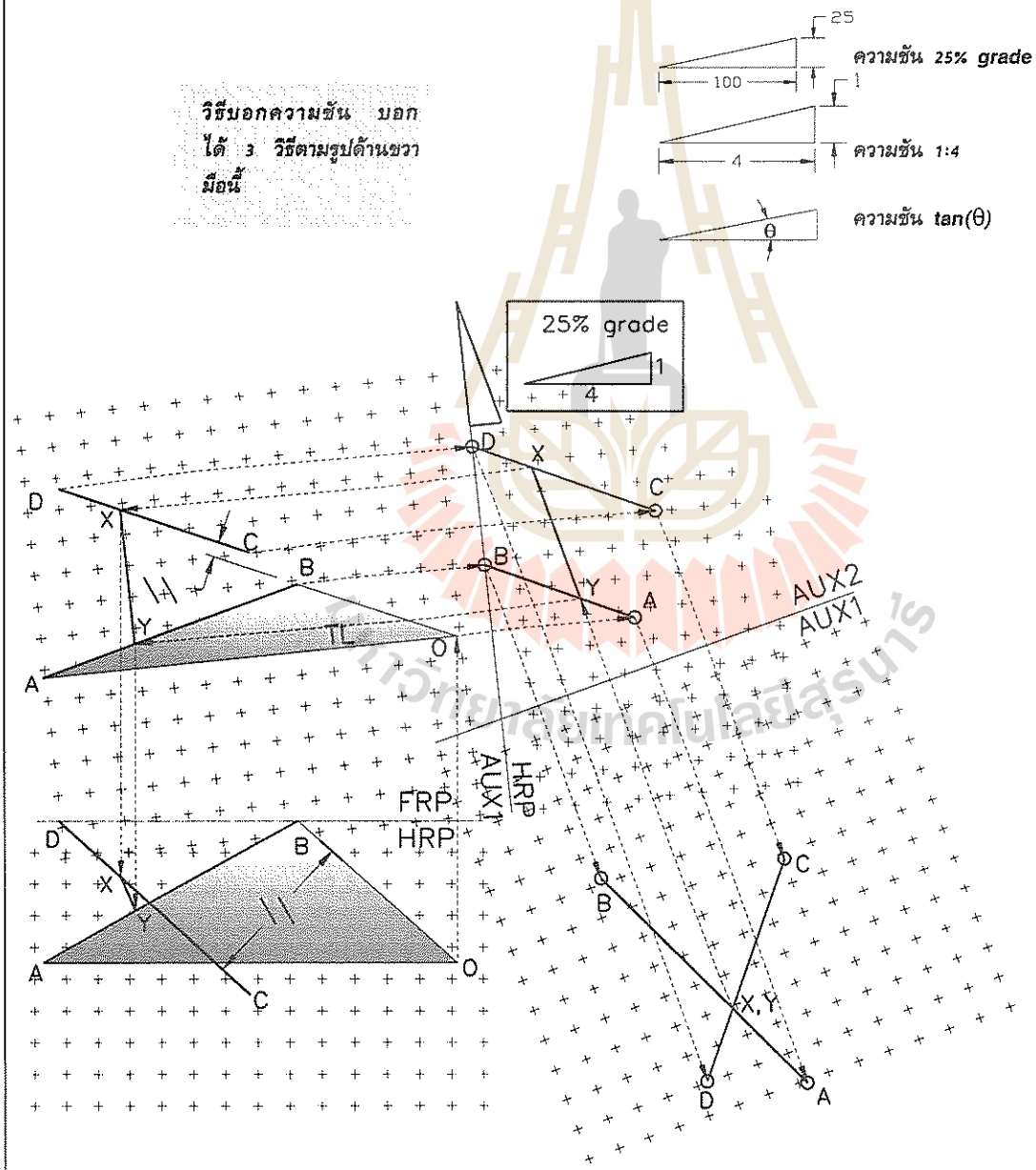
เช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 5

ทฤษฎี

ความชันจะมีวิธีบอกได้ 3 วิธีดังนี้คือ (พิจารณารูปที่ 5.13)

วิธีที่ 1 ความชันบอกเป็น % เกรด โดยบอกค่าความสูงในแนวดิ่งเทียบกับค่า 100 หน่วยในแนวนอน วิธีที่ 2 ความชันบอกเป็นอัตราส่วนระหว่างความสูงในแนวดิ่งกับความยาวในแนวนอนและวิธีที่ 3 บอกเป็นค่า tan(θ)

วิธีสร้าง ในการสร้างรูปก็ทำคล้ายกับตัวอย่างที่ 5 จะแตกต่างกันที่การสร้างภาพช่วยลำดับที่ 2 ซึ่งแนวการโปรเจคจะเป็นแนวเดียวกับความชัน ดูรูป 5.13 ที่ภาพช่วยลำดับที่ 2 จะเห็นเส้น AB และ CD ซ้อนกัน โปรเจคจุดดังกล่าวมายังภาพช่วยลำดับที่ 1 จะเห็นเส้น XY โปรเจคเส้น XY กลับมาที่วิวด้านบนและด้านหน้า



รูปที่ 5.13 ระยะระหว่างเส้นในแนว 25% เกรด

ตัวอย่างที่ 8 การหาเส้นรอยตัดของระนาบที่ตัดกัน

กำหนดให้

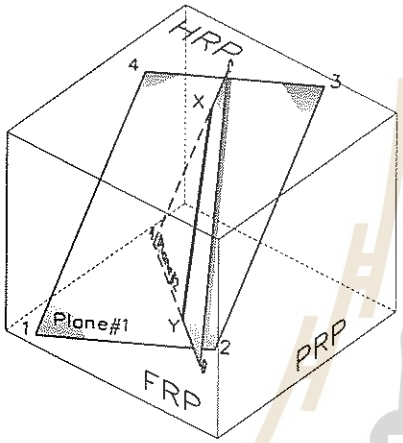
ระนาบ ABC และระนาบ 1234 ในภาพด้านหน้าและบนดูรูปที่ 5.14(2)

ทฤษฎีที่ 1

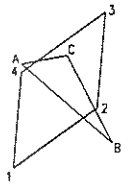
การหารอยตัดของระนาบวิธีที่ 1 คือการสร้างภาพช่วยที่เห็นระนาบใดระนาบหนึ่งเป็นสัน ตำแหน่งที่ซ้อนกันของสันของระนาบหนึ่งกับระนาบที่เหลือคือรอยตัดกันของระนาบทั้งสอง

วิธีสร้างที่ 1

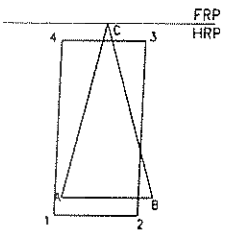
ดูรูปที่ 5.14 (3) สร้างภาพช่วยในทิศทางขนานเส้น 12 ในวิวบนซึ่งเป็นความยาวจริง ที่ภาพช่วยจะเห็นสันของระนาบ 1234 ซ้อนระนาบ ABC จากรูปที่ (4) ที่ XY โปรเจคจุด Xและ Yบนระนาบ ABC ย้อนกลับไปที่วิวบนและวิวหน้า เส้น XY คือรอยตัดของระนาบทั้งสอง รูปที่ (1) แสดงภาพ 3 มิติ

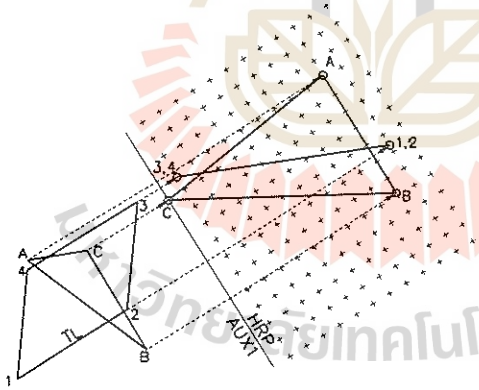


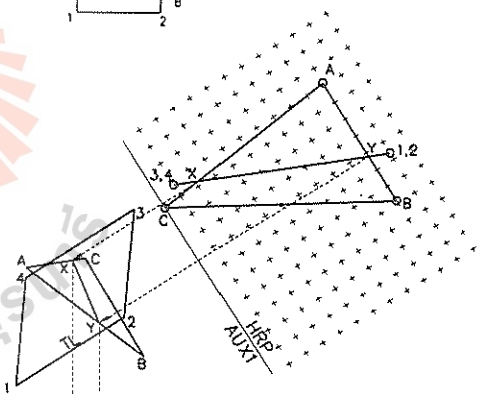
รูปที่ (1)

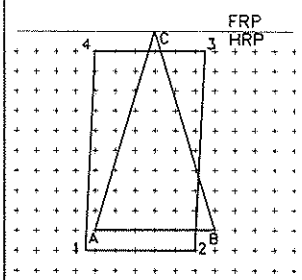


รูปที่ (2)

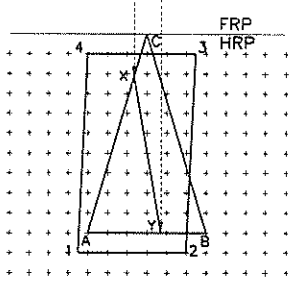








รูปที่ (3)



รูปที่ (4)

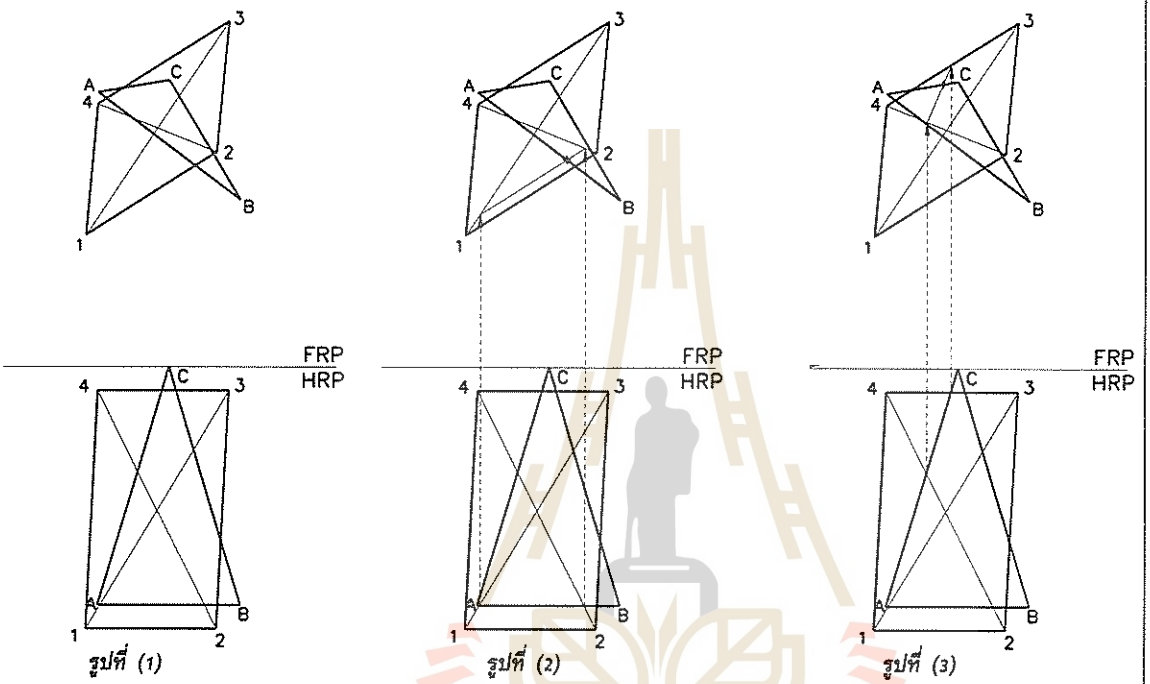
รูปที่ 5.14 การหารอยตัดของระนาบด้วยการใช้ภาพช่วย

ทฤษฎีที่ 2

หลักการเดียวกันกับการหาจุดเสียบทะลุ ซึ่งได้กล่าวถึงในบทที่ผ่านมา ในรูปที่ 5.15 หาจุดที่ด้าน AB ของระนาบ ABC เสียบทะลุระนาบ 1234 และด้าน AC ของระนาบ ABC เสียบทะลุระนาบ 1234 เมื่อโยงจุดเสียบทะลุทั้งสองเข้าด้วยกันจะเป็นรอยตัดของระนาบทั้งสอง ข้อที่ต้องระวังคืออาจหาจุดเสียบทะลุไม่พบ เช่นด้าน CB ซ้อนกับระนาบ 1234 ดังนั้นจึงไม่มีจุดเสียบทะลุ

วิธีสร้างที่ 2

ในปัญหานี้จะเห็นว่า ด้าน 14 และ 23 เป็นด้านที่เอียงเกือบเป็นเส้นดิ่ง การหาจุดเสียบทะลุด้วยการ



รูป 5.15 การหารอยตัดด้วยวิธีหาจุดเสียบทะลุ

โปรเจคจุดซ้อนกันของเส้น AB และเส้น 23 หรือ 14 จากวิวหน้าไปวิวบนทำได้ยาก จึงสร้างเส้น 13 และ 24 ขึ้นมาซึ่งเป็นเส้นที่อยู่บนระนาบ 1234 เช่นกัน ดูรูป (1) ประกอบ เส้นดังกล่าวเอียงกว่า เส้น 14 และ 2 3

โปรเจคจุดที่เส้น AB ทับกับ 13 และ 24 ที่วิวหน้าไปยังวิวบน จะหาจุดเสียบทะลุที่เส้น AB กระทำกับระนาบ 1234 ได้ แสดงที่รูป (2)

สำหรับรูป (3) โปรเจคจุดที่เส้น AC ทับเส้น 24 และ 34 จากวิวหน้าขึ้นไปวิวบน จะเห็นจุดเสียบทะลุที่เส้น AC กระทำกับระนาบ 1234

รูปที่ (4) แสดงรอยตัดกันของระนาบ ABC กับ 1234 โดยการลากเส้นเสียบทะลุทั้งสองที่วิวบนแล้วโปรเจคเส้นดังกล่าวมาที่วิวหน้า

ข้อสังเกตุ

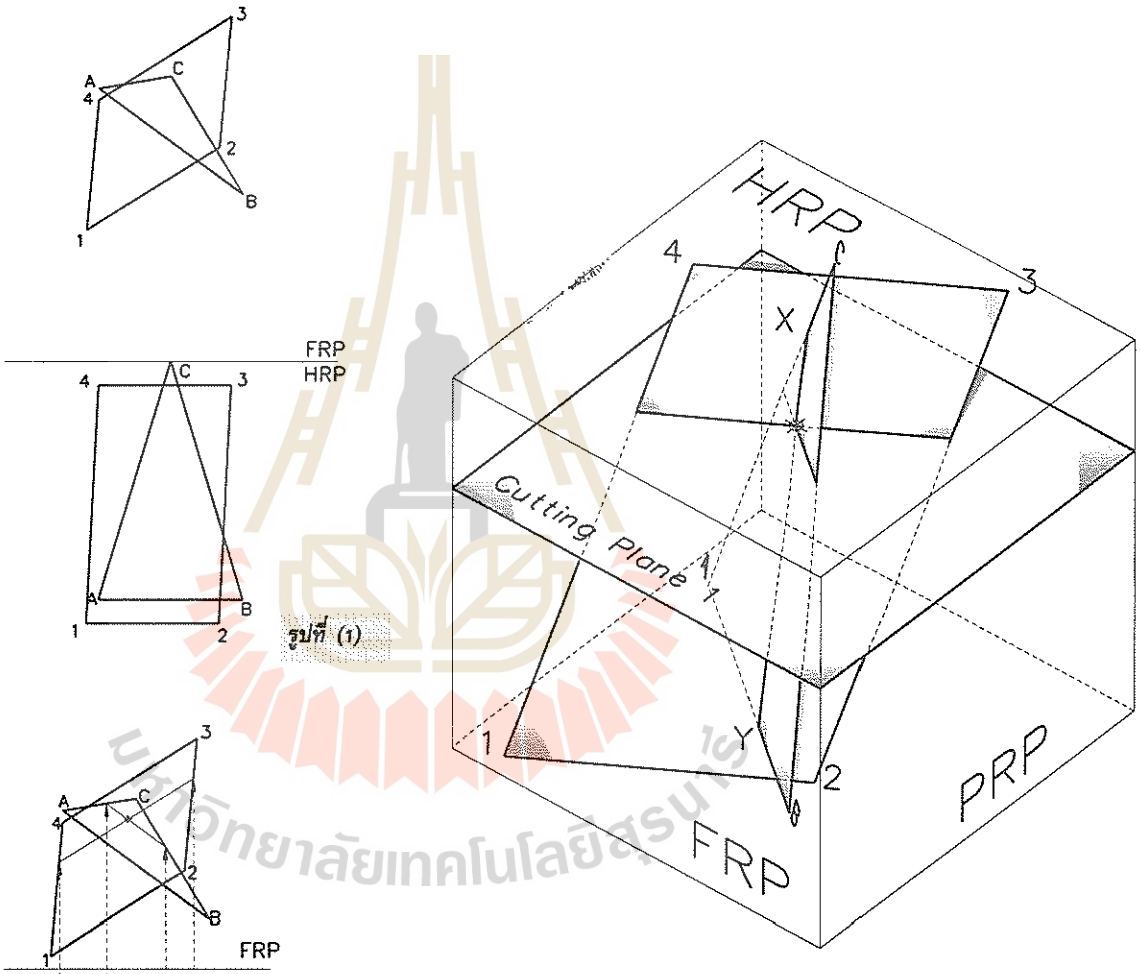
วิธีนี้ไม่ต้องใช้ภาพช่วย แต่ต้องเข้าใจหลักการให้ดี มิฉะนั้นจะสับสนได้

ทฤษฎีที่ 3

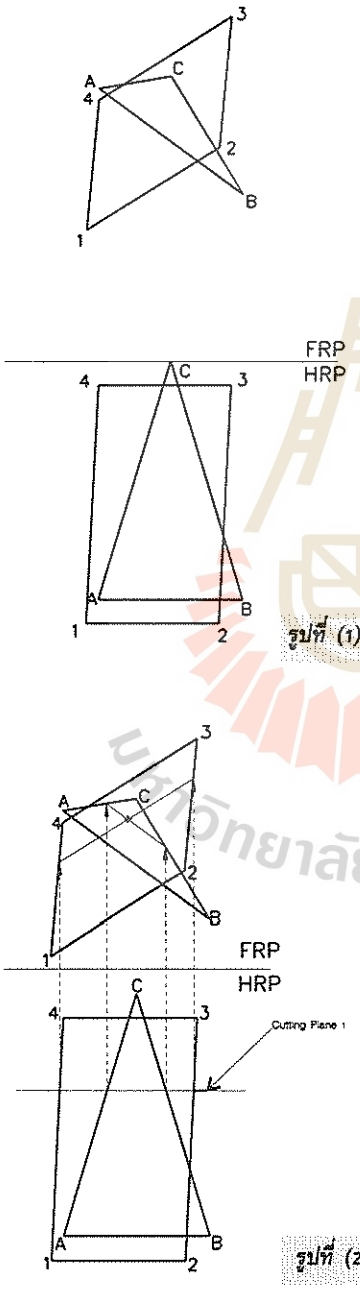
สร้างระนาบตัด (Cutting Plane) ที่ตั้งฉากกับระนาบอ้างอิง ตัดกับระนาบ ABC และ 1234 ทำให้เห็นรอยตัดกันของระนาบทั้งสองบนระนาบตัดนี้ ระนาบตัดจะถูกสร้างขึ้นมาสองระนาบ ทั้งนี้เพื่อสามารถหาจุดตัดกันของระนาบ ABC และ 1234 ได้ 2 จุด เพื่อจะได้รอยตัดของระนาบทั้งสอง ดูรูป 5.16 ประกอบ

วิธีสร้างที่ 3

รูป 5.16(2) จะเห็นสันของระนาบตัดที่ 1 ที่วิวหน้า ระนาบตัดที่ 1 ตัดระนาบ 1234 ที่ด้าน 14 และ 23 โปรเจครอยตัดขึ้นไปวิวบน ทำนองเดียวกันโปรเจคจุดที่ระนาบตัดที่ 1 ตัดด้าน AC และ AB ที่วิวหน้าขึ้นไปวิวบน รอยตัดทั้งสองจะตัดกันที่วิวบน ทำให้เห็นจุดตัดจุดที่ 1 ระหว่างระนาบ ABC กับระนาบ 1234



ภาพ 3 มิติแสดงระนาบตัดแนวนอนตัดกับระนาบ 1234 และ ระนาบ ABC



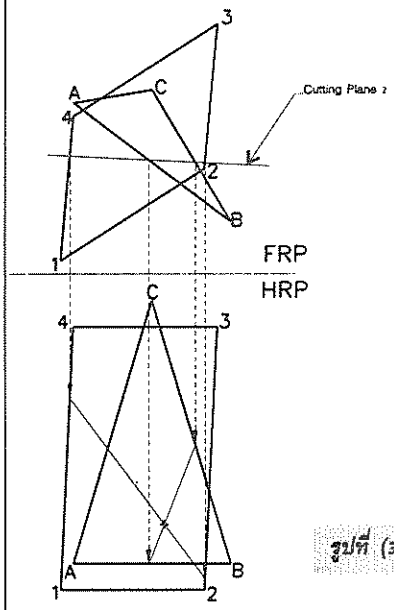
รูปที่ (1)

รูปที่ (2)

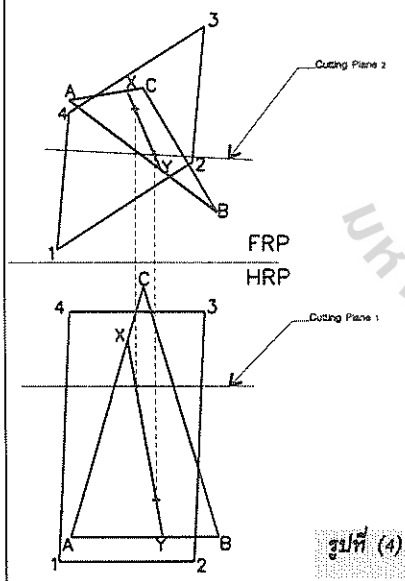
รูปที่ 5.16 การหารอยตัดของระนาบด้วยวิธีสร้างระนาบตัด

รูปที่ (3) ที่วิวบนจะเห็นสันของระนาบตัดที่ 2 ตัดด้าน 14 และ 23 กับด้าน AB และ CB โปรเจคจุดดังกล่าวไปที่วิวหน้า จะพบจุดตัดของระนาบ ABC กับ 1234 อีกจุดหนึ่ง

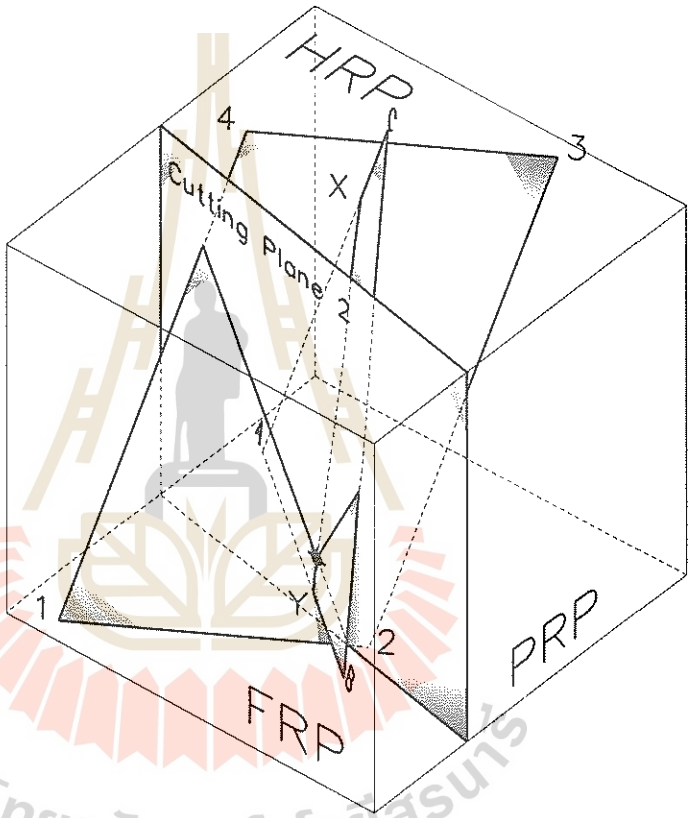
โปรเจคจุดทั้งสองไปยังอีกวิวหนึ่งแล้วลากเส้นเชื่อมจุดทั้งสองเข้าด้วยกันจะเป็นรอยตัดของระนาบ ABC และ 1234 ตามต้องการ



รูปที่ (3)



รูปที่ (4)



ภาพ 3 มิติแสดงระนาบตัดแนวดิ่งตัดกับระนาบ 1234 และ ระนาบ ABC

รูปที่ 5.16 (ต่อ) การหารอยตัดของระนาบด้วยวิธีสร้างระนาบตัด

สรุป

ในบทนี้แสดงตัวอย่างการใช้ภาพช่วยในการแก้ปัญหาเรขาคณิตพรรณนา พร้อมกันนี้ก็ได้แสดงให้เห็นว่าการแก้ปัญหาเดียวกันก็ไม่จำเป็นใช้ภาพช่วยก็ได้ซึ่งวิธีดังกล่าวนี้จะต้องอาศัยความเข้าใจหลักการที่ลึกซึ้งเพื่อช่วยให้เกิดความเข้าได้ง่ายจึงได้แสดงรูป 3 มิติประกอบด้วย

6

การหมุน
(Revolution)

6.1 กล่าวนำ

การหมุนเป็นเทคนิคการหาขนาดความยาวจริงของเส้น หรือการหาขนาดพื้นที่จริงของระนาบ โดยวิธีการหมุนภาพฉายของเส้นหรือระนาบมายังตำแหน่งที่สามารถทำให้เส้นหรือระนาบปรากฏเป็นขนาดจริง

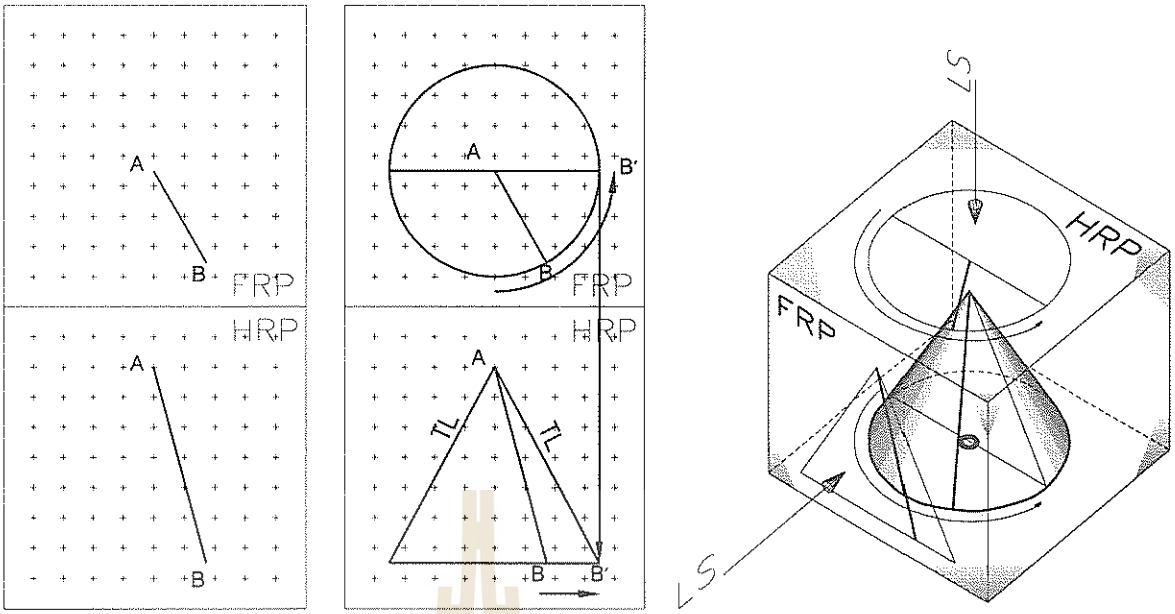
ในบทที่ผ่านมาเคยกล่าวถึงการใช้ภาพช่วย (Auxiliary View) ในการหาขนาดจริงของเส้นและระนาบมาแล้ว ในบทนี้จะใช้วิธีการหมุน (Revolution) ในการแก้ปัญหาเดียวกัน วิธีหมุนมีข้อดีคือ ไม่เปลืองพื้นที่ในการเขียน แต่ก็มีความยุ่งยากซับซ้อนในการอ่านแบบมากพอควร วิธีการหมุนนี้จะถูกนำไปใช้ในบทต่อไปที่ว่าด้วยการคลี่ (Development)

6.2 การหาความยาวจริงของเส้น

ในบทที่กล่าวถึงภาพช่วยนั้น การหาความยาวจริงของเส้นกระทำโดยสร้างวิวช่วยซึ่งจะเห็นความยาวจริงในวิวช่วย ถ้าใช้วิธีหมุนที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ ความยาวจริงของเส้นสามารถกำหนดให้เกิดที่วิวใดก็ได้เช่น

6.2.1 ความยาวจริงของเส้นที่วิวหน้า

เส้นที่วางในตำแหน่งใดๆก็ตามในที่ว่าง ถ้าให้เห็นความยาวจริงที่วิวหน้า จะต้องหมุนเส้นให้อยู่ในตำแหน่งที่ขนานกับระนาบอ้างอิงด้านหน้า (FRP) การหมุนเส้นจะต้องกำหนดแกนหมุนของเส้นด้วย เช่นที่รูปที่ 6.1 ภาพ (a) แสดงภาพด้านหน้าและบน

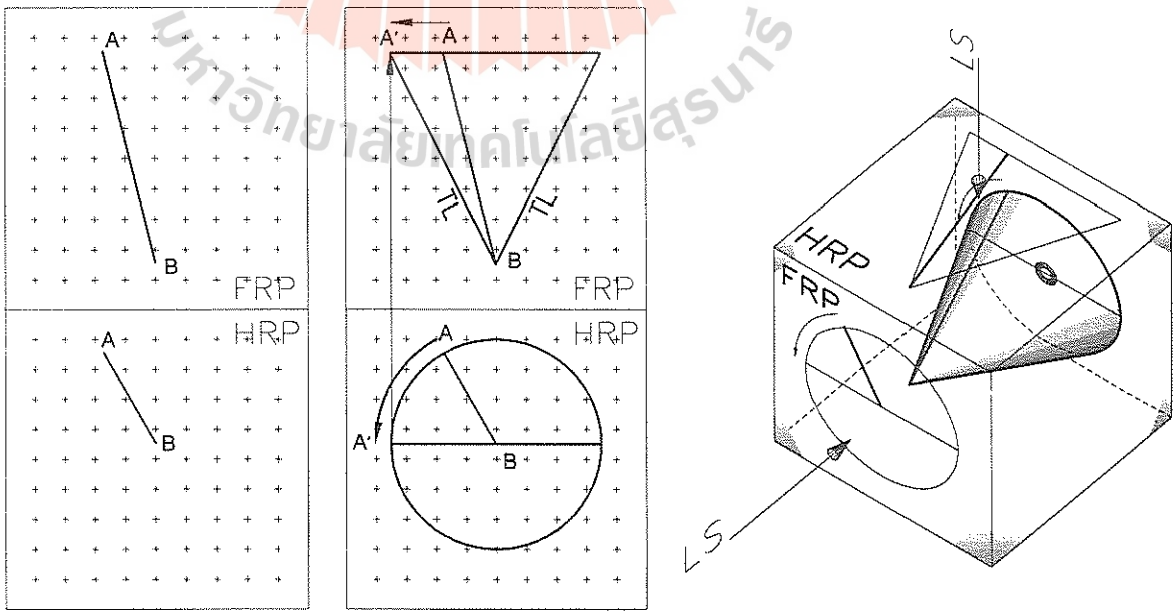


รูปที่ 6.1 ความยาวจริงของเส้นที่วิวหน้า

ของเส้นเฉียง (Oblique) รูป 6.1 (b) แสดงการหมุนโดยกำหนดแกนหมุนผ่านจุด A และทำให้เกิดทรงกรวยตั้งฉากขึ้นดังที่แสดงในรูป 6.1 (c) ความยาวจริงของเส้นจะเป็น AB' รายละเอียดในการสร้างแสดงในรูป 6.1 (b)

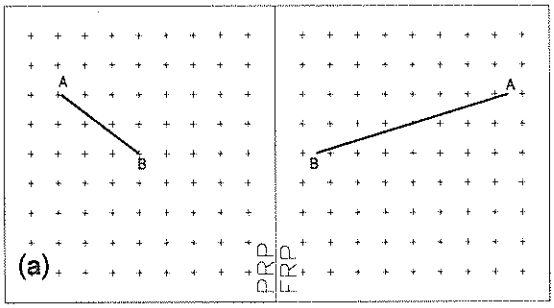
6.1.2 ความยาวจริงของเส้นที่วิวบน

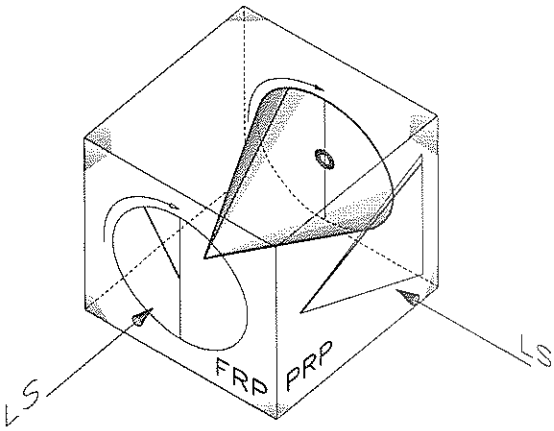
เส้นที่จะปรากฏเป็นความยาวจริงที่วิวบน จะต้องถูกหมุนให้มาวางขนานกับระนาบอ้างอิงด้านบน ซึ่งการหมุนดังกล่าวจะทำให้เกิดทรงกรวยตั้งฉากขึ้น รูปที่ 6.2 (a) เป็นภาพแสดงวิวด้านหน้าและบนของเส้น AB รูปที่ 6.2 (b) แสดงการหมุนให้เกิดรูปทรงกรวยตั้งฉาก ซึ่งเขียนเป็นรูป 3 มิติดังรูป 6.2 (c) วิธีหาความยาวจริงของเส้น AB ดูการโปรเจคที่แสดงในรูป 6.2 (b)



รูปที่ 6.2 ความยาวจริงของเส้นที่วิวบน

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี





รูปที่ 6.3 ความยาวจริงของเส้นที่วิวข้าง

6.1.3 ความยาวจริงของเส้นที่วิวข้าง

รูป 6.3 (a) แสดงเส้น AB ที่วิวหน้าและข้าง รูป 6.3 (b) แสดงการหมุนให้เส้นมาวางขนานกับระนาบอ้างอิงด้านข้าง การหมุนจะเห็นในวิวหน้าโดยใช้วงเวียนกางรัศมี AB เขียนวงกลมหรือครึ่งวงกลมก็ได้ เพื่อประหยัดพื้นที่ในการเขียนแบบ ให้ตำแหน่งของ A มาวางที่ตำแหน่ง A′ หรือในตำแหน่งตรงกันข้ามก็ได้ โปรเจคไปยังวิวข้าง เส้น BA′ จะเป็นความยาวจริง เพื่อให้เกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้น รูป 6.3 (c) แสดงภาพ 3 มิติให้เห็น

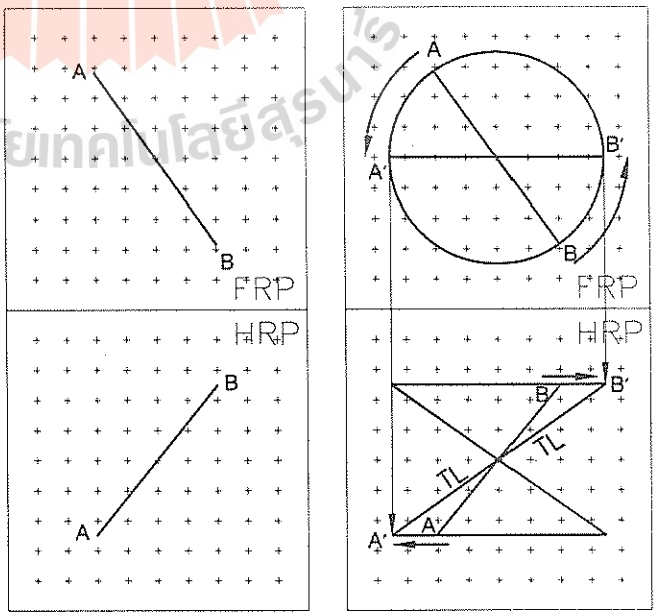
วิธีหมุนเส้นสามารถพลิกแพลงได้ดังที่แสดงในรูปที่ 6.4 รูป (b) แสดงการหมุนเส้น AB โดยใช้จุดกึ่งกลางของ AB เป็นจุดศูนย์กลาง หมุนเส้นไปยังตำแหน่ง A′B′ โปรเจคจุดทั้งสองมาที่วิวหน้า จะได้ความยาวจริงของเส้น AB ตามต้องการ

6.3 มุมที่เส้นทำกับระนาบอ้างอิง

มุมที่เส้นทำกับระนาบ จะปรากฏให้เห็นเป็นมุมที่มีค่าจริงเมื่อ ระนาบปรากฏเป็นสัน (Edge View) และเส้นก็ต้องเป็นความยาวจริงพร้อมกันด้วย เนื่องจากระนาบอ้างอิงจะเป็นสันในวิวปกติ เช่น ที่วิวด้านหน้าจะเห็นระนาบ HRP และ PRP เป็นสัน ดังนั้นถ้าเส้นเป็นเส้นที่เป็นความยาวจริงในวิวปกติ มุมที่เส้นนั้นกับระนาบอ้างอิงสองระนาบก็หาได้ รูปที่ 6.5 แสดงให้เห็นว่า เส้น AB ทำกับ HRP และ FRP

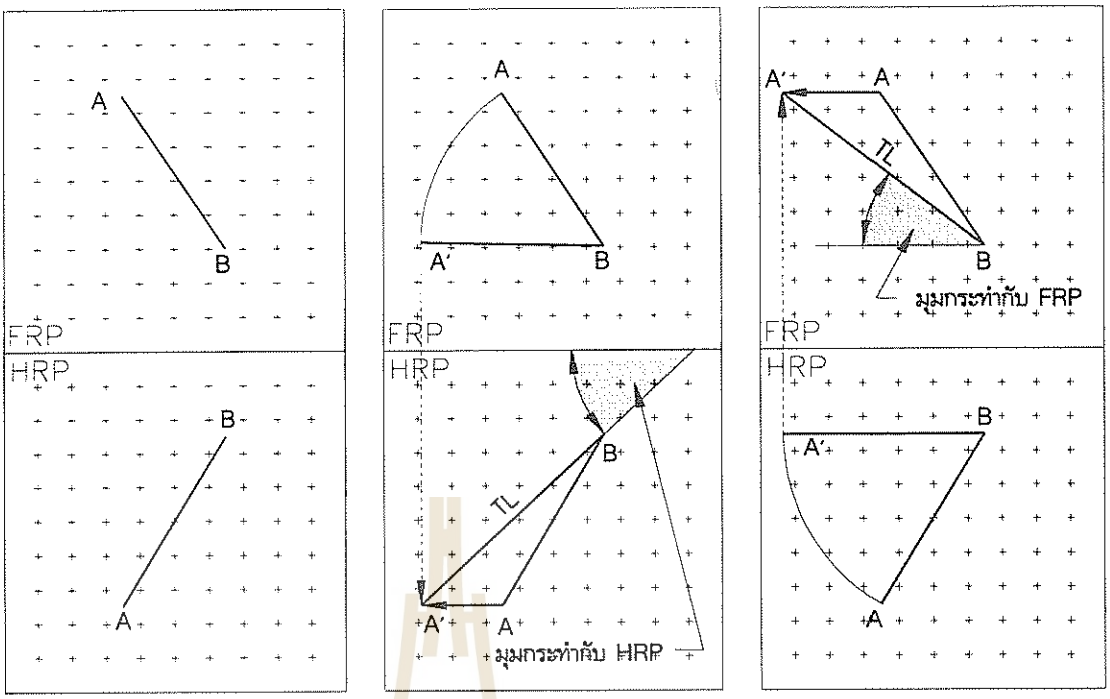
6.4 ขนาดจริงของระนาบ

รูปที่ 6.6 (a) เป็นระนาบ ABC ที่เห็นสันของระนาบที่วิวบน (Edge View) ถ้าหมุนสันของระนาบโดยให้ A เป็นจุดศูนย์กลาง ให้จุด B ไปยัง B′ และจุด C ไปยัง C′ โดยที่ AC′ ขนานกับแนวของ FRP โปรเจคจุด B′ C′ มายังวิวหน้า จะได้ระนาบ AB′C′ เป็นระนาบที่มีขนาดจริง เหตุผลที่เป็นขนาดจริงเพราะ AB′ AC′ เป็นเส้นที่มีความยาวจริง ซึ่งวิธีการดังกล่าวแสดงที่รูป 6.6 (b)



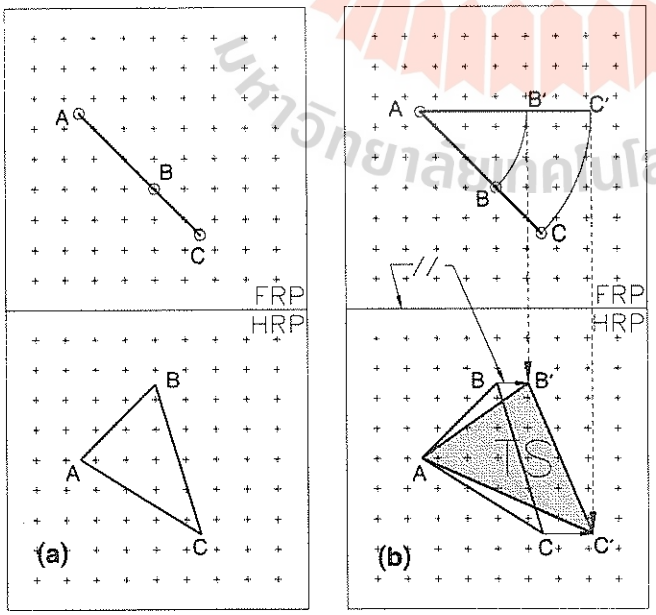
รูปที่ 6.4 ความยาวจริงของเส้น

สำนักวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี



รูปที่ 6.5 การหามุมที่เส้นทำกับระนาบอ้างอิง

ในกรณีที่ไม่เห็นสันของระนาบดังรูป 6.7 (a) จะต้องสร้างวิวช่วยโดยให้ระนาบช่วยมีทิศทางขนานกับเส้น CD ซึ่งเป็นความยาวจริง ดูรูป 6.7 (b) ประกอบ ให้จุด A เป็นจุดศูนย์กลาง หมุนจุด C และD มาอยู่ในตำแหน่งที่ขนานกับ HRP ในระนาบช่วย ที่ C′ และ B′ โปรเจคจุดทั้งสองกลับมาที่วิวบน จะได้ระนาบ AB′C′ มีขนาดจริง แสดงดังรูป 6.7 (c)



รูปที่ 6.6 ขนาดจริงของระนาบโดยการหมุน

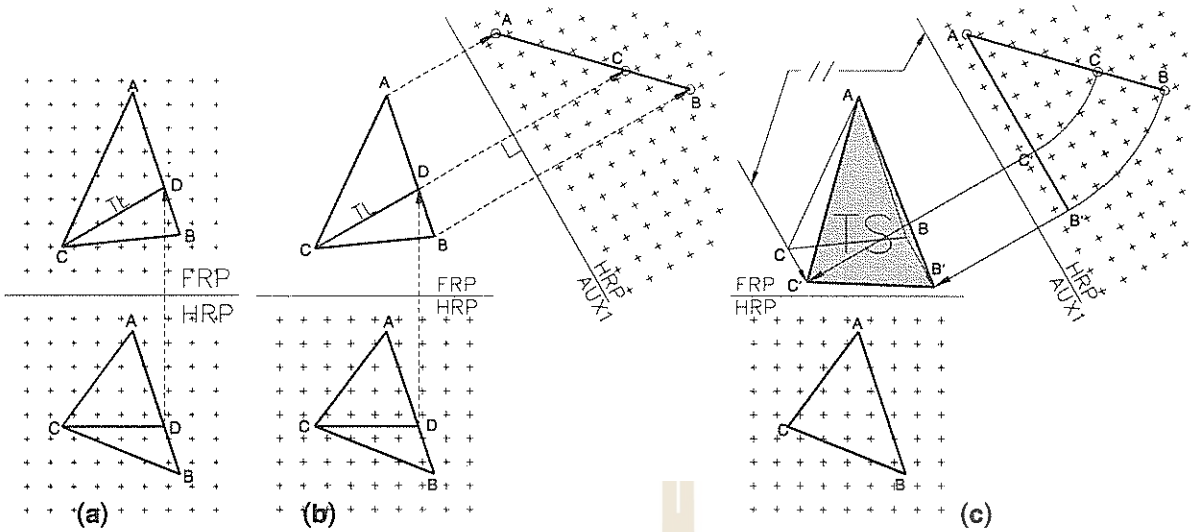
6.5 ขนาดจริงของระนาบด้วยการหมุนสองครั้ง

หลักการหาขนาดจริงของระนาบ คือการหาขนาดจริงของเส้นสองเส้นที่ประกอบขึ้นเป็นด้านของระนาบตามหลักการของเรขาคณิต ด้านที่สามของระนาบก็ต้องเป็นความยาวจริงด้วย เมื่อระนาบที่เกิดจากด้านที่มีความยาวจริงทุกด้าน ระนาบนั้นต้องมีขนาดจริง

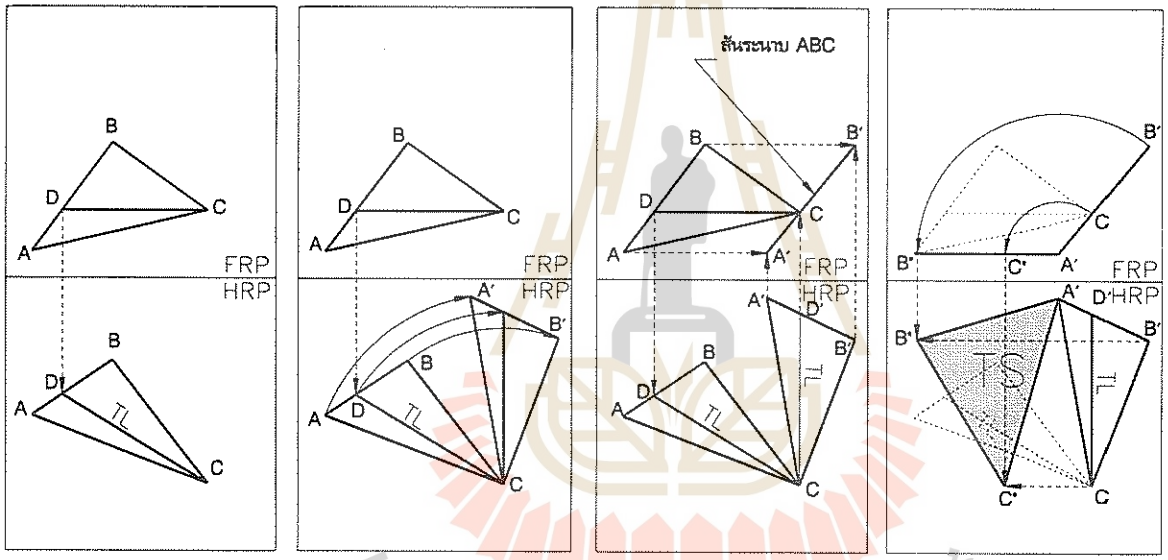
วิธีที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ ใช้เทคนิคการหมุนสองครั้งโดยการหมุนครั้งที่หนึ่งเพื่อให้ได้สันของระนาบ การหมุนครั้งที่สองจะได้ขนาดจริงของระนาบ วิธีนี้มีข้อดีคือไม่สิ้นเปลืองพื้นที่ในการเขียนแบบ แต่กลับทำให้ยากลำบากในการอ่านแบบ

รูปที่ 6.8 (a) เป็นโจทย์ สร้างเส้น CD ให้มีความยาวจริงที่ วิวหน้า รูป (b) หมุนระนาบให้เส้น CD อยู่ในแนวดิ่ง เหตุผลคือเมื่อโปรเจคระนาบในตำแหน่งใหม่นี้ขึ้นไปที่วิวบน จะกลายเป็นสัน A′CB′ เพราะแนวที่โปรเจคขนานกับเส้น CD ซึ่งเป็นความยาวจริง ดังแสดงในรูป (c) ในภาพถัดไป (d) แสดงการหมุนสันของระนาบให้มาอยู่ในตำแหน่งที่ขนานกับ FRP แล้วโปรเจคลงมาที่วิวหน้า ระนาบ A′B″C″ จะเป็นระนาบที่มีขนาดจริง

การหมุนเพื่อหาขนาดจริงของระนาบเฉียงที่อยู่



รูปที่ 6.7 การหาขนาดจริงของระนาบด้วยการสร้างวิวช่วยและการหมุน

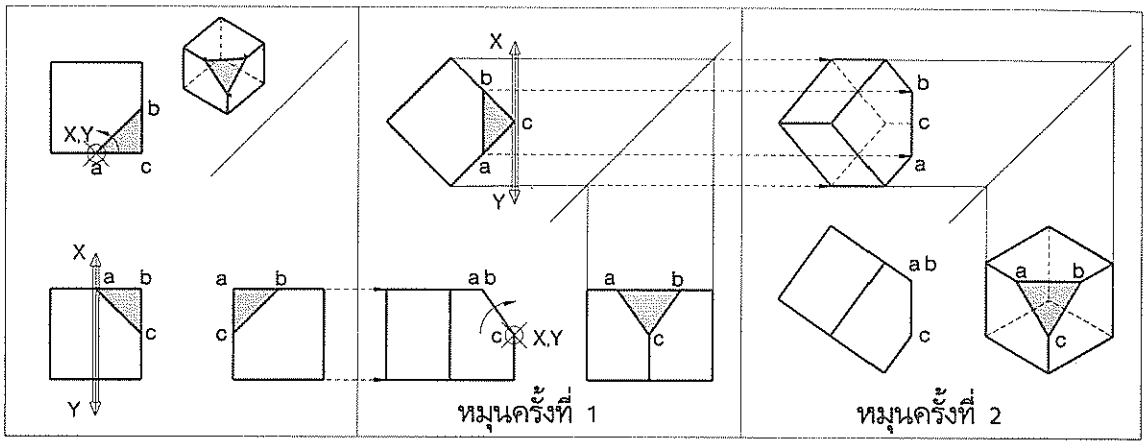


รูปที่ 6.8 การหาขนาดจริงของระนาบด้วยการหมุนสองครั้ง

บนกล่องก็สามารถหาได้เช่นกัน ดังที่แสดงในรูปที่ 6.9 ซึ่งแสดงการหมุนกล่องสองครั้ง รูป (a) กำหนดแกนหมุน XY ที่จุด a หมุนทวนเข็มนาฬิกาจนระนาบ abc ปรากฏเป็นสันระนาบที่วิวด้านหน้า ตามรูป (b) การหมุนเช่นนี้ ความสูงของกล่องไม่เปลี่ยนแปลง การหมุนครั้งที่สองกำหนดแกนหมุน XY ที่จุด c หมุนกล่องตามเข็มนาฬิกาจนระนาบ abc ปรากฏเป็นสันที่วิวบน การหมุนครั้งที่สองนี้ ทำให้เห็นสันของระนาบที่วิวหน้าและวิวบน ซึ่งที่ตำแหน่งนี้เมื่อโปรเจคสันของระนาบทั้งสองวิวไปที่วิวข้าง จะได้ขนาดจริงของระนาบ ตามรูป (c)

6.6 มุมระหว่างระนาบ

รูปที่ 6.10 (a) เส้น xy แสดงรอยตัดหรือรอยพับของระนาบทั้งสอง มุมระหว่างระนาบคือมุมเดียวกับมุมระหว่างเส้นที่อยู่บนแต่ละระนาบที่มาตัดกันและตั้งฉากกับรอยพับ xy การหาเส้นสองเส้นนี้ทำโดยการสร้างวิวช่วยที่เห็น xy เป็นความยาวจริง ตามรูป (b) จากนั้นให้สร้างเส้นตั้งฉากกับ xy ลากไปตัดขอบระนาบทั้งสองที่ 2 และ 3 ถ้าโปรเจคกับมาที่วิวบนตามรูป 6.10 (c) มุม 213 จะเป็นมุมระหว่างระนาบทั้งสองแต่ไม่ใช่ขนาดจริง การหาขนาดของมุมต้องหมุนเส้น 123 เพื่อให้เห็นเส้น 12 และ 13 มีขนาดจริง ตามวิธีหมุนในรูป มุม 2'13' คือมุมที่ต้องการ



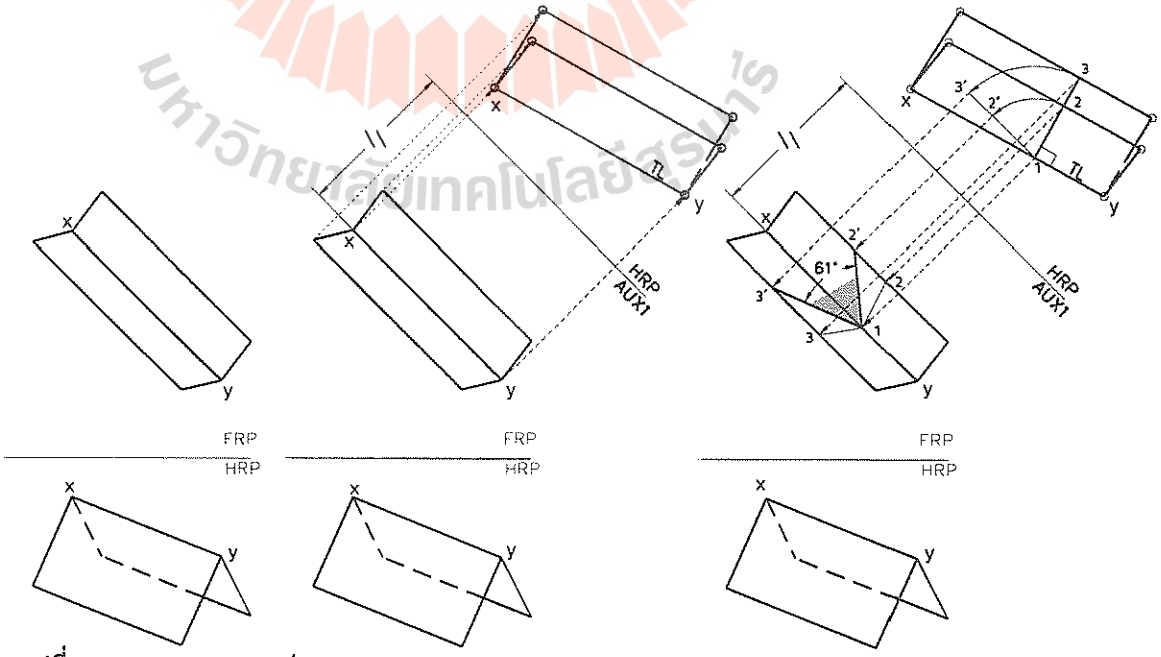
รูปที่ 6.9 กานหมุนกล่องเพื่อเห็นขนาดจริงของระนาบ

6.7 จุดหมุนรอบเส้นและการหาตำแหน่งของจุด

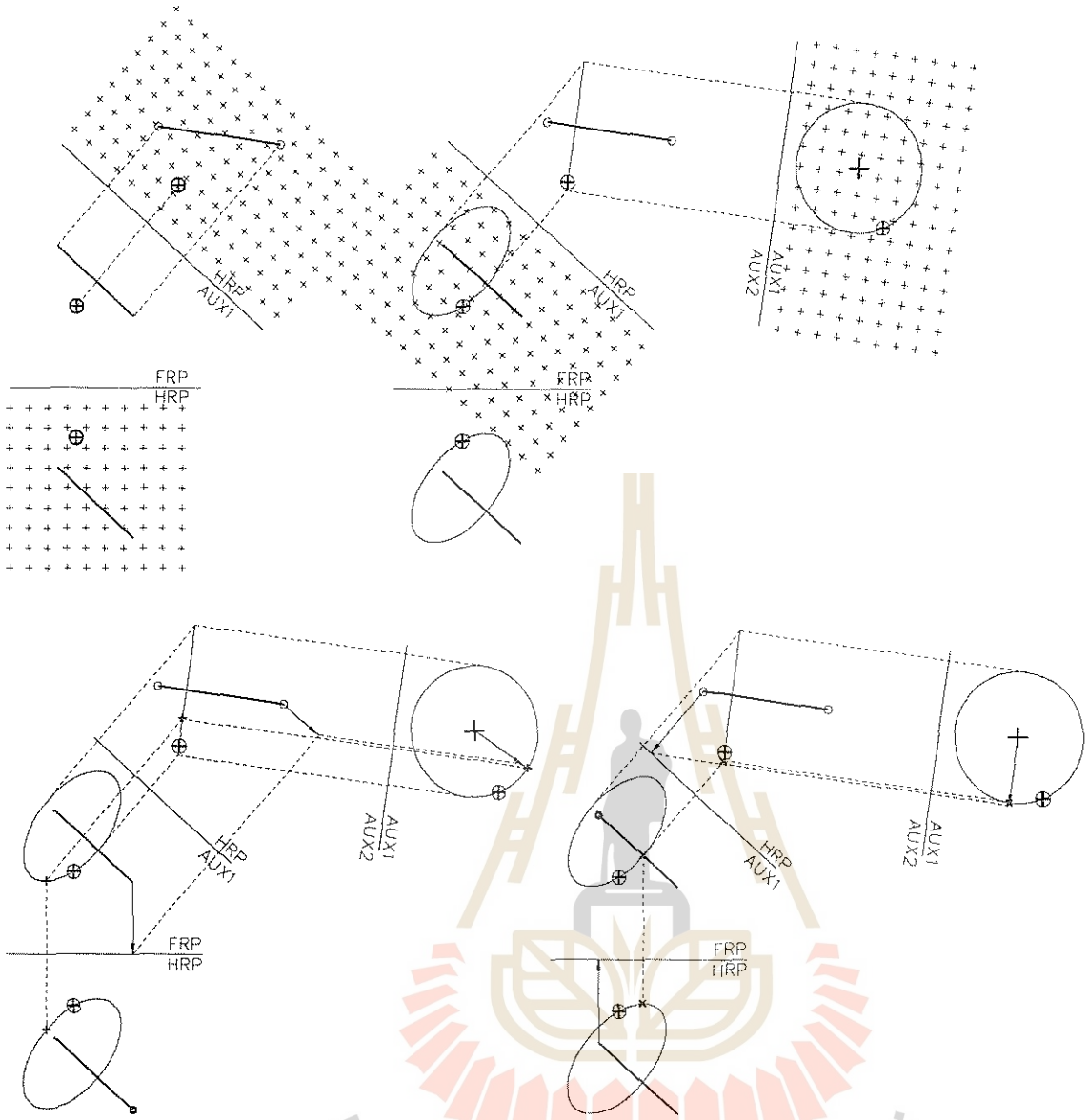
การเห็นเส้นทางของจุดที่หมุนรอบเส้นแกนใดๆ นั้น จะต้องหามุมมองที่สามารถเห็นเส้นแกนปรากฏเป็นจุด ที่มุมมองนี้จะเห็นเส้นทางการหมุนของจุดเป็นเส้นรอบวงของวงกลมโดยมีแกนหมุนเป็นจุดศูนย์กลาง รูปที่ 6.11 (a) ให้เส้นที่เป็นแกนหมุน XY และจุด A มาให้ สร้างวิวช่วยลำดับที่หนึ่งให้เห็นแกนหมุนเป็นความยาวจริง พร้อมกับโปรเจคจุดตามขึ้นไป สร้างวิวช่วยลำดับที่สองในทิศทางที่ขนานกับความยาวจริงของแกนหมุน ตามรูปที่ 6.11 (b) ที่วิวนี้จะมองเห็นแกนเป็นจุด เขียนวงกลมแสดงเส้นทางการหมุนของจุดรอบแกน โปรเจคเส้นทางการหมุนมาที่วิวช่วยลำดับที่หนึ่ง จะเป็นเส้นตั้งฉากกับแกนหมุน โปรเจคเส้นทางการหมุนกลับมาที่วิวบนและวิวหน้าตามลำดับ เส้นทางการหมุนที่วิวทั้งสองจะเป็นวงรี

การหาตำแหน่งจุดที่อยู่หน้าสุดและบนสุดของเส้นทางการหมุนรอบแกน

ตำแหน่งจุดอยู่หน้าสุดแสดงที่รูป 6.11 (c) ก่อนอื่นควรเขียนลูกศร YO ที่มีขนาดจริงขึ้นที่วิวด้าน บนให้ชี้เข้าหา FRP ซึ่งแสดงว่าตำแหน่งหัวลูกศรต้องอยู่หน้าสุด เนื่องจากลูกศรที่สร้างขึ้นเป็นขนาดจริง ดังนั้นภาพลูกศรที่วิวด้านหน้าจะต้องเป็นจุดที่



รูปที่ 6.10 การหามุมระหว่างระนาบ



รูปที่ 6.11 การหมุนจุดรอบแกน การหาตำแหน่งของจุดหน้าสุดและบนสุด

ปลายสุดของแกนหมุนดังที่แสดงในรูป โปรเจคลูกศรไปยังวิวช่วยลำดับที่หนึ่งและลำดับที่สองตามลำดับ ที่วิวช่วยลำดับที่สองโปรเจคแนวลูกศรออกไปตัดกับเส้นทางการหมุนของจุดที่จุด F ซึ่งเป็นตำแหน่งหน้าสุดของเส้นทางการหมุนของจุด โปรเจค F ย้อนกลับมาที่วิวช่วยลำดับที่หนึ่งและวิวด้านบนและด้านหน้า

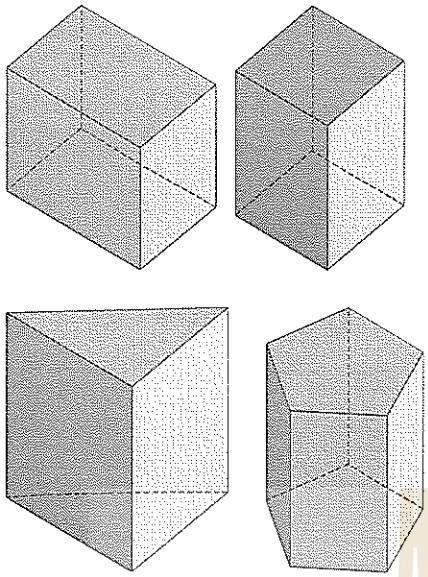
การหาตำแหน่งบนสุดของเส้นทางการหมุนก็มีวิธีการเช่นเดียวกัน ที่รูป 6.11 (d) สร้างลูกศรให้มีขนาดจริงที่วิวหน้าให้ชี้ตั้งฉากกับ HRP ลูกศรจะเห็นเป็นจุด XO ที่วิวบน โปรเจคลูกศรไปที่วิวช่วยทั้งสอง ที่วิวช่วยลำดับที่สอง แนวลูกศรจะตัดกับเส้นทางการหมุนที่จุด U จุดนี้คือจุดบนสุดของเส้นทางการหมุน โปรเจคจุด U กลับมาที่วิวบนและวิวหน้า

6.8 การสร้างปริซึมตรง (Right Prism)

ปริซึมคือทรงสามมิติ (Solid) ที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นรูปเหลี่ยมหลายด้านโดยที่พื้นที่หน้าตัดมีขนาดคงที่ สำหรับปริซึมตรงนั้น แกนของปริซึมต้องตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัดของปริซึมด้วย ดังรูปที่ 6.12

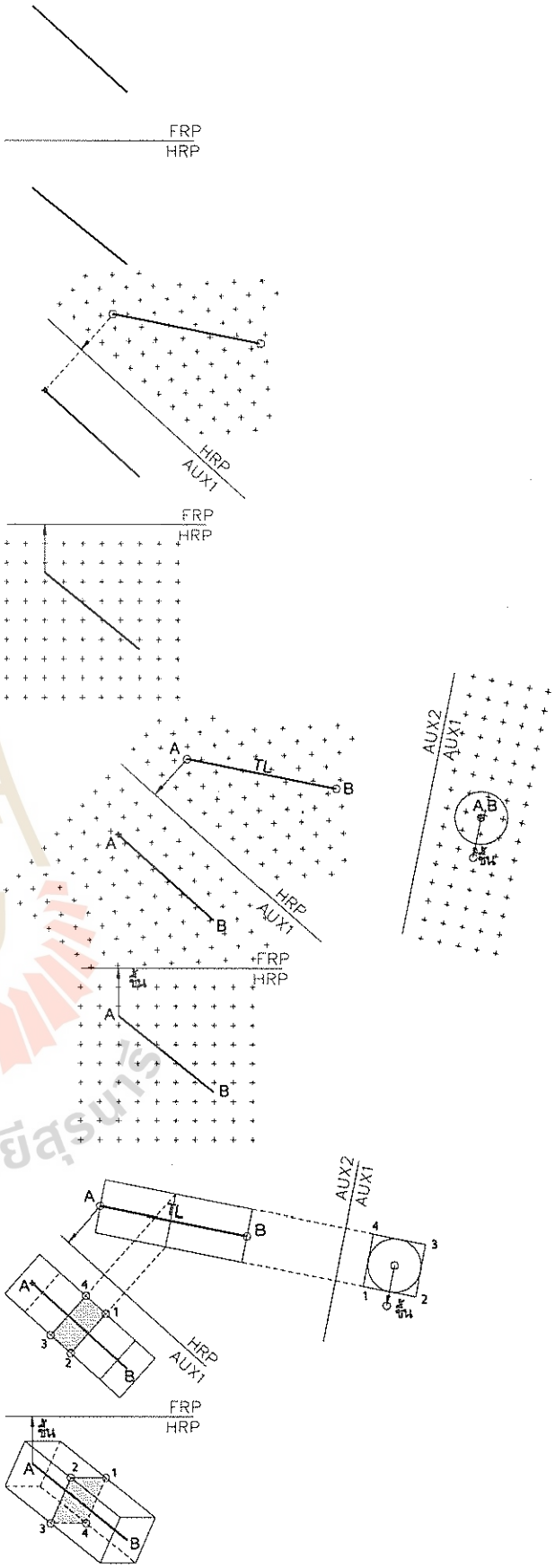
หัวข้อนี้กำหนดแกนของปริซึม AB ตามรูป 6.13 (a) ให้สร้างปริซึมตรงโดยมีพื้นที่หน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส และผนังด้านข้างของปริซึมเป็นระนาบในแนวดิ่ง

การสร้างปริซึมตามข้อกำหนดดังกล่าวจะต้อง



รูปที่ 6.12 ปริซึมตรง

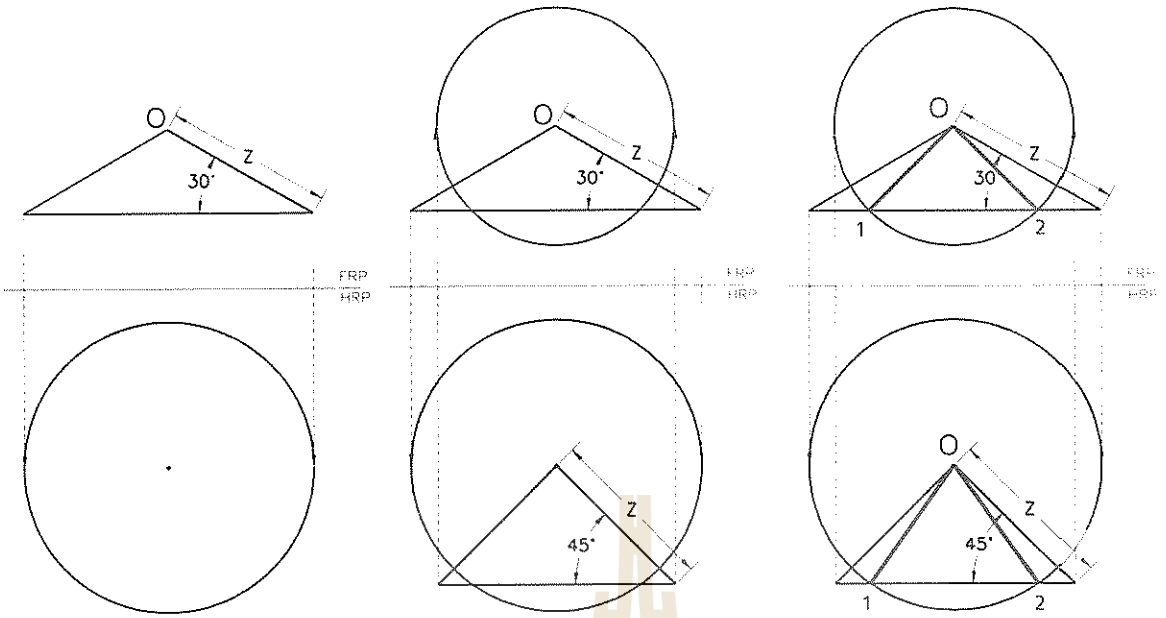
สร้างวิวช่วยให้เห็นแกนปริซึมเป็น ทั้งความยาวจริงและต้องเห็นแกนปริซึมเป็นจุดด้วย จึงจะสามารถเขียนพื้นที่หน้าตัดให้เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสได้ แต่ข้อกำหนดให้ผนังด้านข้างเป็นระนาบแนวดิ่งนั้นจะต้องสร้างลูกศรที่ชี้ขึ้นบนเป็นแนวให้เทียบเคียงในการสร้างพื้นที่หน้าตัดของปริซึม รูป 6.13 (b) สร้างลูกศรที่มีขนาดจริงและชี้ขึ้นบนที่วิวหน้า สร้างวิวช่วยให้เห็นแกนปริซึมเป็นความยาวจริง รูป 6.13 (c) สร้างวิวช่วยลำดับที่สองให้เห็นแกน AB เป็นจุด พร้อมกับโปรเจคลูกศรตามไป เขียนวงกลมเพื่อเป็นแนวในการสร้างพื้นที่หน้าตัดของปริซึมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูป 6.13 (d) สร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัส 1234 รอบวงกลมโดยให้ด้าน 14 และ 23 ขนานกับแนวของลูกศร โปรเจคกลับมาที่วิวช่วยลำดับที่หนึ่ง สร้างปริซึมตรงโดยให้พื้นที่หน้าตัดตั้งฉากกับแกน AB โปรเจคจุดต่างๆกลับมาที่วิวบนและวิวหน้า จะได้ปริซึมตรงที่มีพื้นที่หน้าตัดเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสและมีผนังด้านข้างเป็นระนาบแนวดิ่งที่ต้องการ



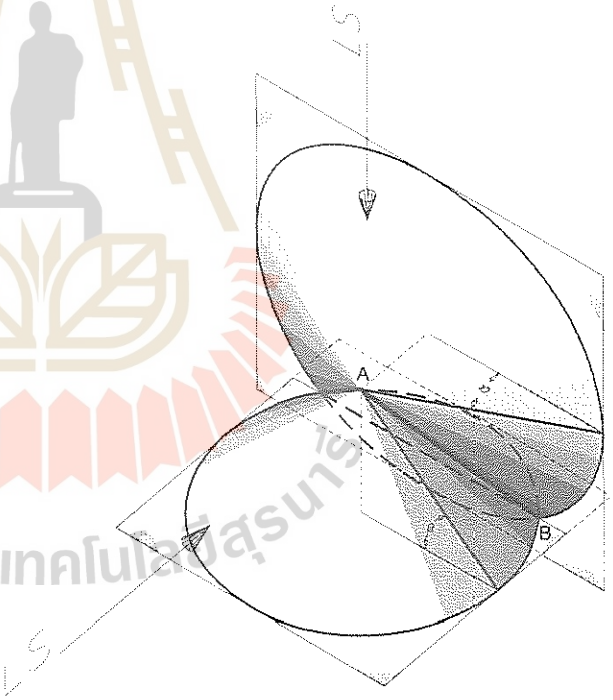
รูปที่ 6.13 ปริซึมตรงที่แกนวางเฉียงในที่ว่าง

6.9 เส้นที่กำหนดให้เอียงทำมุมกับระนาบอ้างอิงสองระนาบพร้อมกัน

กำหนดให้สร้างเส้นยาว Z ผ่านจุด O ที่เอียงทำมุม 30ฐ กับ FRP และทำมุม 45ฐ กับ HRP วิธีทำเริ่มจากการสร้างสันระนาบอ้างอิง FRP และ HRP ดังรูป 6.14 (a) กำหนดจุด O ที่วิวบน เขียน



สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีมุมที่ฐาน 30 องศากับแนวนอน ให้ด้านตรงข้ามมุมที่ฐานยาว Z ที่วิวหน้าสร้างวงกลม เส้นผ่าศูนย์กลางยาวเท่ากับฐานของสามเหลี่ยมโดยจุดศูนย์กลางตรงกับจุด O รูปนี้ให้คำตอบที่ว่าเส้นใดๆ ที่อยู่บนผิวของกรวยในวิวบนหรือเส้นรัศมีใดของวงกลมที่วิวหน้า จะมีความยาว Z และทำมุม 30 องศากับ FRP ทำนองเดียวกัน รูป 6.14 (b) สร้างสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีมุมที่ฐาน 45 องศาและด้านตรงข้ามมุมที่ฐานยาว Z ที่วิวหน้าโดยจุดยอดของสามเหลี่ยมอยู่ที่จุด O ส่วนที่วิวบนสร้างวงกลมให้เส้นผ่าศูนย์กลางยาวเท่ากับฐานของสามเหลี่ยมที่วิวหน้า โดยจุดศูนย์อยู่ที่จุด O รูปกรวยและวงกลมชุดใหม่นี้ก็ให้คำตอบเช่นเดียวกับชุดแรกที่ว่า เส้นที่อยู่ที่ผิวของกรวยหรือเส้นรัศมีของวงกลมจะต้องมีความยาว Z และทำมุม 45 องศากับ HRP ดังนั้นการหาเส้นที่ยาว Z ทำมุม 30 องศากับ FRP และ 45 องศากับ HRP จึงมีได้สองตำแหน่ง คือเส้น O_1 และเส้น O_2 ดังที่แสดงในรูป 6.14 (c) เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น ภาพ 6.15 แสดงรูป 3 มิติของเส้นดังกล่าว



รูปที่ 6.14 เส้นที่กำหนดความยาวและมุมที่ทำกับระนาบอ้างอิง

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี