

การจำลองสถานการณ์มวลไถลที่ความเร็วต่ำมาก

ศราวดี สุจิตจร^{1*} และ กิตติวงศ์ สุธรรมโน²

SIMULATION OF TRANSLATIONAL MOTION AT VERY LOW VELOCITY

Sujitjorn, S.^{1} and Suthamno, K.² (2001). Simulation of Translational Motion at Very Low Velocity. Suranaree J. Sci. Technol. 8:61-75*

Abstract

The article describes the simulation of translational motion at very low velocity. At very low speed, the sliding mass is subjected to nonlinear friction. Simulation techniques with program developed using MATLAB™ are detailed. The article also presents various friction models useful for engineering applications.

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการจำลองสถานการณ์มวลไถลที่ความเร็วต่ำมาก ซึ่งประสบกับแรงเสียดทานไม่เชิงเส้น เทคนิคและโปรแกรมเขียนด้วย MATLAB™ ได้รับการตีพิมพ์ในรายละเอียด บทความยังให้การรวบรวมแบบจำลองของแรงเสียดทานที่มีประโยชน์ต่องานวิศวกรรม

บทนำ

เมื่อมีมวลเคลื่อนที่ด้วยการไถลตัวไปบนผิวของวัตถุ อีกชิ้นหนึ่ง แรงต้านการเคลื่อนที่หรือแรงเสียดทาน (frictional force) จะปรากฏเป็นของคู่กัน แรงเสียดทานทำให้ต้องสูญเสียพลังงานไปจำนวนหนึ่งเสมอ ขณะที่มวลไถลไป เมื่อเกิดกับเครื่องจักรกลใดต่าง ๆ อาจเป็นบ่อเกิดของการ สึกหรือของกลไก ชิ้นส่วนทางกลแตกหัก และเกิดการสั่นอย่างต่อเนื่องที่เรียกว่าอาการฮันท์ (hunting) ได้ หากอาการที่ปรากฏไม่อาจสังเกตเห็นได้ด้วยตาเปล่า สิ่งที่จะเกิดขึ้นจะเป็นการสูญเสียความสามารถของการบังคับควบคุม

¹ รองศาสตราจารย์ หัวหน้าสาขาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อ. เมือง จ. นครราชสีมา 30000

² นักศึกษา ระดับปริญญาโท สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า สำนักวิชาวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี อ. เมือง จ. นครราชสีมา 30000

* ผู้เขียนที่ให้การติดต่อ

เครื่องกลไกให้หยุดการเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ด้วยความแม่นยำสูง

ปรากฏการณ์ของการเสียดทานเป็นเรื่องซับซ้อนที่ยังคงต้องการให้มีการศึกษาค้นคว้าเพื่อความรู้ที่แท้จริงอีกมาก จากการศึกษาค้นคว้าของมนุษย์ที่ได้มีการรายงานผลแล้วปรากฏการณ์ของการเสียดทานในระดับจุลภาคไม่สามารถใช้อธิบายปรากฏการณ์ในระดับมหภาคได้ (Blau, 1996; Rabinowicz, 1995) ความรู้ที่เป็นรอยต่อระหว่างการเสียดทานในระดับจุลภาคกับมหภาคยังคงเป็นปริศนาให้มนุษย์ทำการศึกษาค้นคว้าต่อไป ในทางเทคโนโลยีวิศวกรรม การศึกษาค้นคว้าและแก้ไขปัญหาอันเนื่องมาจากการเสียดทานกระทำกันในระดับมหภาคเป็นส่วนใหญ่นับตั้งแต่วิธีการหล่อลื่นด้วยสารพิเศษต่างๆ ไปจนถึงความพยายามแก้ไขปัญหาด้วยเทคโนโลยีการควบคุมไม่เชิงเส้น (nonlinear control) ในปัจจุบัน ต้องพึ่งพาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ค่อนข้างแม่นยำของแรงเสียดทานที่ไม่เป็นเชิงเส้นในรูปฟังก์ชันของความเร็วการนำแบบจำลองมาใช้ได้อย่างเหมาะสมจำเป็นต้องพิจารณาอย่างละเอียดรอบคอบว่าจะใช้เพื่อการควบคุมอย่างทันการณ์ (real-time control) หรือจะใช้เพื่อการจำลองสถานการณ์ (simulation)

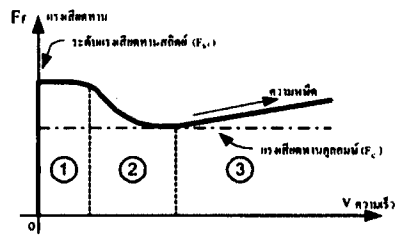
บทความนี้เสนอการรวบรวมแบบจำลองของแรงเสียดทานไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบต่างๆ และนำเสนอแนวทางการจำลองสถานการณ์อย่างได้ผลดีเมื่อระบบพลวัตเป็นแบบมวล-สปริง-แดมเปอร์ด้วยความเร็วต่ำมาก บทความนี้ได้ให้รายละเอียดแผนภาพบล็อกแสดงโครงสร้างของการจำลองสถานการณ์พร้อมทั้งแสดงรายการโปรแกรมที่ได้ให้ข้อสังเกตอันเป็นประโยชน์ต่างๆ แก่ผู้อ่านเพื่อการนำไปประยุกต์ให้เข้ากับสถานการณ์ของตน

แบบจำลองแรงเสียดทานในระดับมหภาคที่ใช้ประโยชน์ในทางเทคโนโลยีวิศวกรรม และที่เป็นพื้นฐานที่สุดคงจะเป็นแรงเสียดทานคูลอมบ์ (Coulomb friction) ดังรูป (ก) ในตารางที่ 1 ซึ่งเป็นที่คุ้นเคยของหลายๆ คน จากการเรียนฟิสิกส์ระดับต้นๆ ในชั้นสูงขึ้นไปอีกจะพบ

การพิจารณาแรงเสียดทานประเภทความหนืด (Viscous Friction) ดังกราฟแสดงแบบจำลองรูป (ข) ในตารางที่ 1 โดยอธิบายเป็นความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของแรงดั่งสมการที่ (2) ในตารางเดียวกัน

F_f ในสมการที่ (2) หมายถึงแรงเสียดทานสัมพันธ์กับความเร็ว v , F_C เป็นขนาดของแรงเสียดทานคูลอมบ์ และ F_v คือสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานเชิงความหนืด

แบบจำลองแรงเสียดทานทั้งรูป (ก) และ (ข)



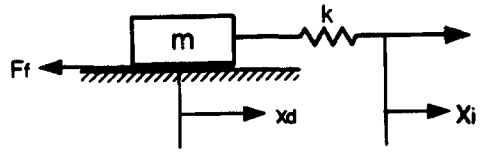
รูปที่ 1 แรงเสียดทานคำนึงถึงผลของสตรายเบ็ค (Stribeck)

ได้รับการใช้ประโยชน์อย่างกว้างขวางเป็นเวลายาวนาน เมื่อมีได้สนใจพลวัตการไหลของมวลที่ความเร็วต่ำมาก แต่เมื่อพิจารณาพลวัตที่ความเร็วต่ำมากแรงเสียดทานระหว่างวัตถุสองชิ้นที่ขัดสีกัน จะแสดงความไม่เป็นเชิงเส้น ดังรูปที่ 1 ซึ่งรวมเรียกผลนี้ว่า ผลของสตรายเบ็ค (Stribeck effect) แรงเสียดทานในช่วงที่ 3 เป็นที่คุ้นเคยกันดี คือความหนืด (Viscosity) บางครั้งก็อาจเรียก ช่วงอีลาสโตรไฮโดรไดนามิก (elastrohydrodynamic) ช่วงที่ 2 เป็นช่วงรอยต่อจาก ช่วงที่ 1 ไป ช่วงความหนืด จะเห็นว่าแรงเสียดทานค่อย ๆ ลดลงอย่างไม่เป็นเชิงเส้นในช่วงนี้ ช่วงที่ 1 เป็นย่านที่ซับซ้อนที่สุดและยังคงเป็นปัญหาที่ต้องศึกษาเพิ่มเติมอีกมากในวิทยาการทางด้านการเสียดทาน ความซับซ้อนเริ่มต้นนับตั้งแต่ที่ความเร็วเป็นศูนย์มวลที่ถูกแรงภายนอกกระทำจะพยายามไหลไปตามแนวแรง แต่อาจไม่ไหลหากแรงกระทำไม่มากพอที่จะเอาชนะแรงเสียดทานสถิตย์ ก่อให้เกิดสภาวะติด (stiction) ในระดับมหภาค ในระดับจุลภาคที่บริเวณผิวสัมผัส

นั้นเกิดการสั่นพร้อมไถลตลอดเวลา จึงเป็นที่มา ประการหนึ่งของหัวข้อการศึกษาวิจัยที่สำคัญและเป็น ที่สนใจกว้างขวางในขณะนี้ คือ พลวัตที่ความเร็ว เป็นศูนย์ (Zero-velocity dynamic) ถ้าแรงกระทำมีสูง พอที่จะส่งให้ความเร็วผ่านพ้นช่วงที่ 1 และ 2 ไปได้ วัตถุก็จะไถลตัวไปได้ตามปกติ แต่ถ้าหากแรงกระทำ ไม่มากพอที่จะส่งให้วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วพ้นช่วง ที่ 2 ไปได้ จะปรากฏการไถลตัวติด ๆ ซัด ๆ ไปเรื่อย ซึ่งเราริยปรากฏการณ์นี้ว่าการติด-ลื่น (Stick-slip) มัก เกิดขึ้นกับการเคลื่อนตัวกับย่านความเร็วต่ำ เช่น เป็น ไมโครเมตรต่อวินาที การติด-ลื่นนี้เป็นปัญหาสำคัญ ในเครื่องมือที่ต้องมีความเที่ยงตรงสูง เช่น เครื่องจับ อะตอม เครื่องเจียรในเพชร เป็นต้น และในเครื่องมือ อุตสาหกรรม เช่น เครื่องกลึงชิ้นส่วนไฮดรอนิก และ นิวเมติกส์ ก็ประสบปัญหาเช่นเดียวกัน

(Du and Nair, 1999) เสนอแบบจำลองที่ ครอบคลุมทั้งสามช่วงของแรงเสียดทาน ดังรูป (ค) และ (ง) ในตารางที่ 1 โดยมีความสัมพันธ์ (3.1) และ (3.2) ใช้อธิบายเส้นโค้งดังกล่าวตามลำดับ เมื่อเปรียบ เทียบกับแบบจำลองลูเกร (LuGre model) (Gafvert, 1997; Canudas de Wit, et al., 1995) ดังที่แสดงใน รูป (จ) และ (ฉ) มีความสัมพันธ์ (4.1) และ (4.2) กำกับตามลำดับจะเห็นว่าความแตกต่างมีเพียงกำลังของ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเท่านั้น ที่ทำให้ลักษณะของ เส้นโค้งบริเวณความเร็วเป็นศูนย์ปรากฏความแตกต่าง กัน โดยทั้งสองรูปแบบมี $+F_s$ และ $-F_s$ เป็นแรงเสียด ทานสถิตย์ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีในวิทยาการทางด้านแรง เสียดทานว่า $+F_s$ และ $-F_s$ อาจจะเท่าหรือ ไม่เท่ากัน ก็ได้ (Canudas de Wit, et al., 1995) ได้พยายาม อธิบายปรากฏการณ์ของแรงเสียดทาน ในลักษณะ ของแบบจำลองเช่นนี้ว่า คล้ายการขจัดก้นของแปรง ขนสองอัน โดยมีขนแข็งหนึ่งชุดรองรับด้านล่าง ส่วน ข้างบนเป็นแปรงขนอ่อนกดทับและขจัดก้นอยู่ แบบ จำลองของลูเกรครอบคลุมสภาวะก่อนไถล ผลของ คาลล์ (Dahl effect) ผลของสตรายเบ็ค และสภาวะ

หน่วงล่าหลังที่เกิดกับการไถลเนื่องมาจากความเสียด ทาน นอกจากแบบจำลองข้างต้นแล้ว ยังมีแบบจำลอง อื่น ๆ ที่ใช้อธิบายผลสตรายเบ็ค เช่น (Armstrong-Helouvry, 1993) แต่เป็นแบบจำลองที่ซับซ้อนต้องการ พารามิเตอร์สถิตย์จำนวนมาก และก็ได้ไม่ได้ให้ผลที่ดี ไปกว่าแบบที่รวบรวมไว้ในตารางที่ 1 แบบจำลองใน รูป (ข) และ (ซ) เป็นสิ่งที่มีการนำเสนอไว้ เพื่อการ จำลองสถานการณ์ด้วยคอมพิวเตอร์ (Kamopp, 1985) ในย่านความเร็วต่ำมากใกล้ ๆ ศูนย์ แบบจำลองมี ลักษณะเป็นแบบแถบ $\pm dv$ มีแรงเสียดทานคงที่ กระจายอยู่เท่ากับแรงเสียดทานสถิตย์ซึ่งเป็นแบบจำลอง ที่เอื้อต่อการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ให้สามารถทำได้ ง่ายกว่าที่ต้องพยายามอินทิเกรตกับแบบจำลองที่มีความ ไม่ต่อเนื่องบริเวณความเร็วเป็นศูนย์ ส่วนในรูป(ฉ)เป็น ลักษณะที่ได้มีการปรับปรุงจากรูป (ข) ให้สามารถรับ สถานการณ์ที่ $|+F_s|$ ไม่เท่ากับ $|-F_s|$

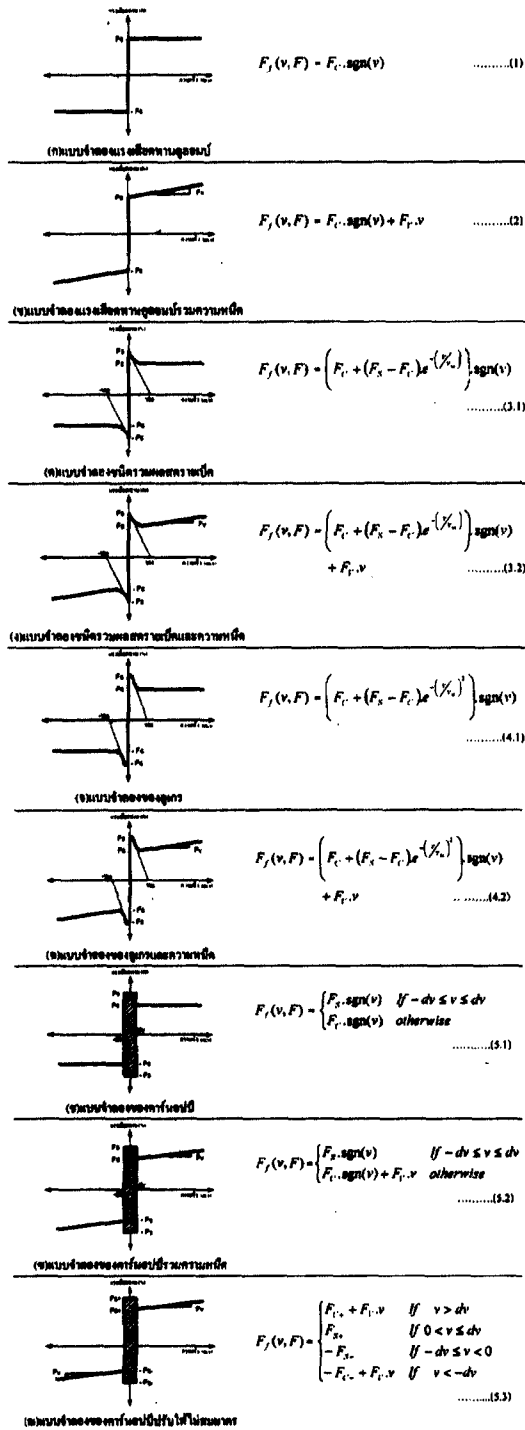


รูปที่ 2 แผนภาพแสดงมวลยึดติดกับสปริงที่มีค่าคง k ไถลไปทางขวาโดยมีแรงเสียดทานไม่เป็นเชิง เส้น F_f

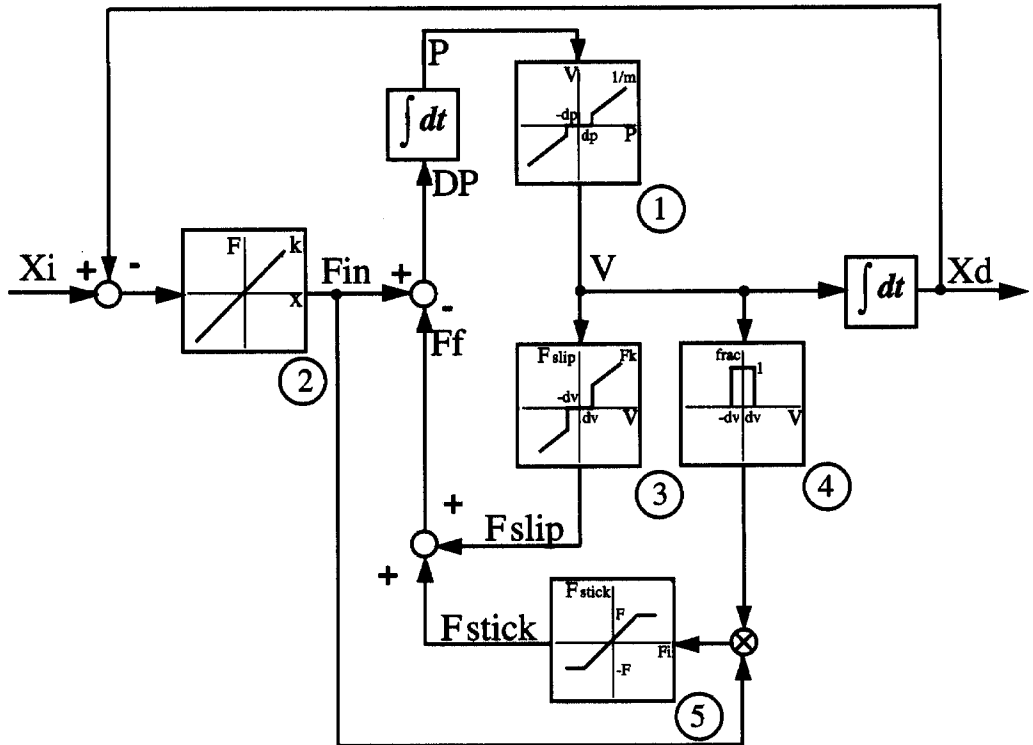
อุปกรณ์และวิธีการ

การจำลองสถานการณ์สำหรับมวลไถลเมื่อปรากฏแรง เสียดทานไม่เป็นเชิงเส้น นับว่าไม่เป็นสิ่งที่หลีกเลี่ยง ได้ยาก ในการที่จะทำความเข้าใจพลวัตของมวลไถล และพยายามให้การแก้ไขปรับปรุง เพราะระบบไม่เชิง เส้นไม่อาจหาผลเฉลยในรูปคายตัวเสมอไปได้ ดังนั้น เทคนิคเฉพาะในการจำลองสถานการณ์ ที่ต้องดำเนินงาน โดยละเอียดรอบคอบด้วยความระมัดระวัง จึงได้ รับการนำเสนอในบทความนี้ เพื่อเป็นแบบอย่างและ แนวทางแก่ผู้อ่านในการนำไปใช้ประโยชน์

ระบบมวลไถลที่ใช้เพื่อการจำลองสถานการณ์



ตารางที่ 1 แบบจำลองของแรงเสียดทานไม่เชิงเส้น



รูปที่ 8 บล็อกไดอะแกรมแสดงโครงสร้างของโปรแกรมการจำลองสถานการณ์มวลไคด

ในครั้งนี้นำแสดงผังแผนภาพในรูปที่ 2 ปลายทางขวาของสปริงเคลื่อนที่ด้วยการขจัด x_i ซึ่งไม่เท่ากับการขจัดของมวล m คือ x_d ขณะไหล ประสบกับแรงเสียดทานไม่เป็นเชิงเส้นใด ๆ F_f ที่เป็นฟังก์ชันของความเร็ว v และแรงกระทำ F_{in} เราอาจเขียนสมการพลวัตได้ ดังต่อไปนี้

$$m\ddot{x}_d = k(x_i - x_d) - F_f(v, F_{in}) \quad \text{.....(6)}$$

การจำลองสถานการณ์เพื่อที่จะหาการขจัด x_d ของมวล ควรเข้าใจว่าการใช้กลไกการอินทิเกรตยอมให้ผลที่นำเชื่อถือมากกว่าการคิดเฟอเรนนิท ซึ่งถือเป็นหลักการที่ดีในการสร้างโปรแกรมการจำลองสถานการณ์ เราจึงตั้งต้นที่ความเข้าใจว่า

$$v = \dot{x}_d \quad \text{หรือ} \quad x_d = \int v dt \quad \text{.....(7)}$$

ซึ่งอาจสังเกตได้จากบล็อกไดอะแกรมในรูปที่ 3 ที่ปรากฏบล็อก $\int dt$ ทางขวาสุดของภาพที่ให้เข้าทุก

เป็น x_d ในการจำลองสถานการณ์โปรแกรมจะต้องสร้างความเร็ว v เป็นอินพุทให้แก่บล็อก $\int dt$ นี้ให้ได้ถูกต้อง ผลการคำนวณทั้งหมดจึงจะนำเชื่อถือและถูกต้องพิจารณาสมการ (6) ทราบได้ว่า F_{in} ในที่นี้คือ $k(x_i - x_d)$ ดังนั้นอาจเขียนสมการที่ (6) ใหม่ให้อยู่ในรูปของ v ได้ดังนี้

$$v = \frac{1}{m} \int (F_{in} - F_f(v, F_{in})) dt = \frac{P}{m} \quad \text{.....(8)}$$

ซึ่ง P คือ โมเมนต์ และจาก (8) เราอาจเขียนแสดงอัตราเปลี่ยนของ P ต่อเวลาได้ว่า

$$\frac{dP}{dt} = F_{in} - F_f(v, F_{in}) \quad \text{.....(9)}$$

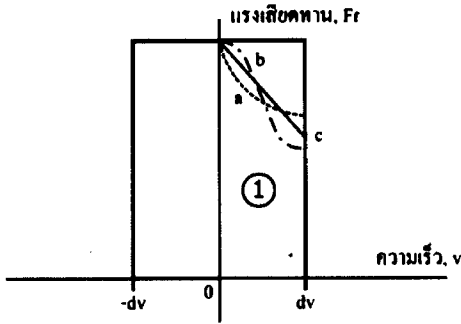
บล็อก (2) ของไดอะแกรมในรูปที่ 3 ใช้ช่วยให้ความหมายการสร้าง F_{in} ในโปรแกรม สัญลักษณ์ภายในบล็อกใช้แทน k ค่านิจของสปริง อินพุทของ

```

% Simulation of translational motion of a mass-spring system at very
% low velocity . Based on Karnopp's Model
% Filemane : mod ka.m
% friction force - Stick-slip
N      = 50000 ;      % 50,000 step
t      = 160;        % finish time
ampli  = 2;          % position amplitude
a_v    = 0.1;        % 0.1 m/s
m      = 1;          % mass 1 (Kg)
dv     = 0.001;     % 0.001 m/s
fs     = 1.5;       % 1.5 N
fc     = 1.0;       % 1.0 N
fv     = 0.4;       % 0.4 N.s/m
dt     = t/N;       % Sampling time
k      = 2;          % Stiffness of Spring k = 2 N/m
x(1)=0;xd(1)=x(1); %initial Position input and output
% initialization
v(1)=0;P(1)=0;f(1)=0;f_fic(1)=0;ti(1)=0;
dis=0;axampt=a_v;dp_o=0;
% start program loop
for i=2:N
% input position
xi(i) = xi(i-1)+axampt*dt;
if xi(i) >= ampli      axampt = -axampt;
elseif xi(i) <= -ampli axampt = -axampt;
end
% Block # 2 find input force from position
f(1)=k*(xi(i)-xd(i-1));
ti(i) = (i-1)*dt; %save time
% Block # 4 Set Flag corresponding to friction region
if v(i-1) > dv      S = 0;
elseif v(i-1) < -dv S = 0;
else                S = 1;      end
% block x find stick friction
fstick = S*f(1);
% block # 5 limit Stick friction -fs<-fstick<-fs
if fstick > fs      fstick = fs;
elseif fstick < -fs fstick = -fs; end
% block # 3 find slip friction
if v(i-1)>dv      fslip = fc+fv*v(i-1);
elseif v(i-1)<-dv fslip = -fc+fv*v(i-1);
else              fslip = 0; end
% block sum find Friction force
f_fic(i) = fslip+fstick;
% block sum find dP
dP_n     = f(i)-f_fic(i);
% block Integration dP find moment
P(i)     = P(i-1)+(dP_n+dP_o)*dt/2;
dP_o     = dP_n;
% block # 1 stop band velocity
if P(i)>(m*dv)     v(i) = P(i)/m;
elseif P(i)<-(m*dv) v(i) = P(i)/m;
else              v(i) = 0;      end;
% block Integration velocity find output position
xd(i) = xd(i-1)+(v(i-1)+v(i))*dt/2;
% check time
dis = dis + 1;
if dis == 1000     time_step = ti(i)
                  dis = 0; end
end %end for loop
subplot(3,1,1);plot(ti,xi,xd);grid;
title(' the Karnopp s Friction Model in Mass-spring (1Kg)');
xlabel('time (sec)');ylabel('Position (m)');
subplot(3,1,2);plot(ti,f_fic);grid;
xlabel('time (sec)');ylabel('Friction force (N)')
subplot(3,1,3);plot(ti,v);grid;
xlabel('time (sec)');ylabel('Velocity (m/s)')
%:End Program

```

รูปที่ 5 รายละเอียดโปรแกรมจำลองสถานการณ์แรงเสียดทานไม่เป็นเชิงเส้น



รูปที่ 4 แบบจำลองแรงเสียดทานในย่านความเร็ว $\pm dv$ บล็อก (2) เป็น $(x_f - x_d)$ เมื่อผ่านบล็อกก็จะถูกคูณ k ข้อคิดของการใช้บล็อกโคอะแกรม เช่นนี้ก็คือ รูปภาพภายในบล็อกจะให้ความเข้าใจระดับหนึ่ง การพัฒนาโปรแกรมจะให้เป็นบล็อกๆ ในอนาคตหากมีการเปลี่ยนแปลง (ดังเช่นค่า k อาจเปลี่ยนเป็นไม่เชิงเส้น) ก็ทำการแก้ไขโปรแกรมที่สอดคล้องกับบล็อกและแก้ไขรูปภาพ จะทำได้สะดวก

เมื่อนำ F_{in} มารวมกับ $-F_f$ จะเกิดเป็น $\frac{dP}{dt}$ (หรือ Dp ในภาพ) และ $\int dP$ จะได้ผลเป็น P และหารด้วย m ดังสมการ (8) อีกทีหนึ่งจะเกิดผลลัพธ์เป็น v

ความยุ่งยากนั้นอยู่ที่การสร้าง F_f นับตั้งแต่ที่มี P และนำไปผ่านกระบวนการจำลองสถานการณ์ตามบล็อก (1) (3) (4) และ (5) ในโคอะแกรมของรูปที่ 3 ขณะนี้จะทำความเข้าใจถึงการจำลองแรงเสียดทาน F_f โครงสร้างโปรแกรมจำลองแรง F_f ที่ปรากฏเป็นแผนภาพในแต่ละบล็อกได้ประยุกต์รูปแบบจำลองของคาร์นอนปี เพราะการกำหนดแถบความเร็ว $\pm dv$ ทำให้

% block # 5 limit Stick friction -fs<-fstick<-fs

f1 = fc+(fs-fc)*exp(-abs(v(i-1))/(vss))^2)+fv*abs(v(i-1));

if fstick > f1 fstick = f1;

elseif fstick < -f1 fstick = -f1;

end

รูปที่ 6 โปรแกรมเฉพาะส่วน "block #5" ที่คัดแปลงไปตามแบบจำลองแรงเสียดทาน

เกิดความอ่อนตัวในการปรับแบบจำลองแรงเสียดทานในช่วงความเร็ว (1) ดังรูปที่ 4 เมื่อจำลองสถานการณ์ เราอาจเปลี่ยนฟังก์ชันที่ใช้อธิบายเส้นโค้ง a b หรือ c ได้ตามความต้องการ ในช่วงความเร็ว $\pm dv$ ตามบล็อก (1) ในรูปที่ 3 กราฟในบล็อก (1) จึงอธิบายปริมาณ $\frac{P}{m} = v$ ตามสมการ (8) v ถูกป้อนผ่านบล็อก (3) และ (4) ที่มีความหมายของบล็อก คือ แยกช่วงความเร็วคำนวณแรงเสียดทานตามแบบจำลอง บล็อก (3) ให้การคำนวณแรงเสียดทานเชิงความหนืด ผลการคำนวณเป็นไปตามสมการ (10) ซึ่ง F_C คือแรงเสียดทานคูลอมบ์ ส่วนบล็อก (4) คำนวณในช่วง $\pm dv$ ดังที่อธิบายข้างต้น

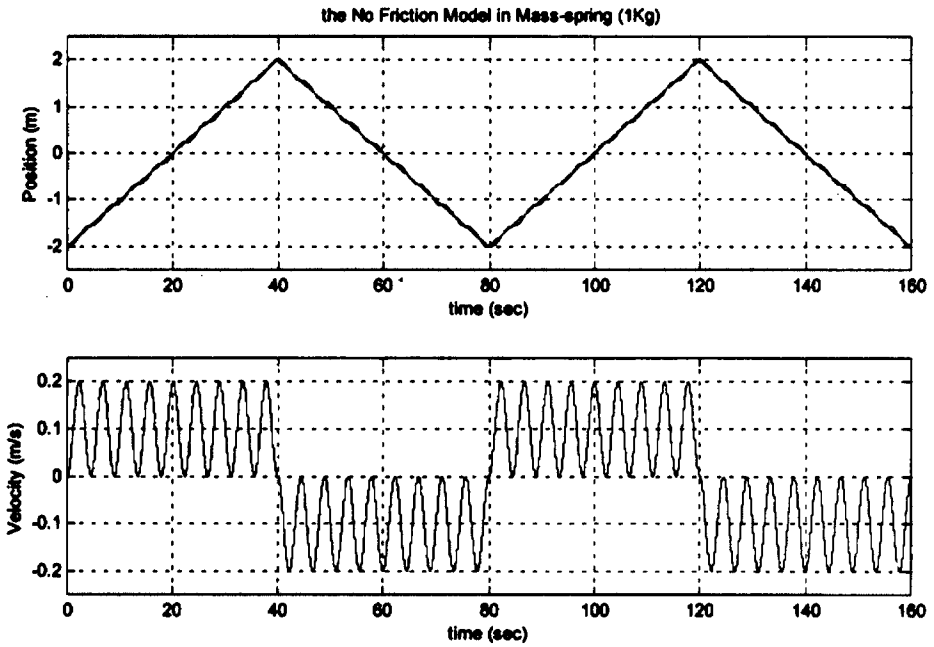
$$F_{slip} = F_C \operatorname{sgn}(v) + F_V v \quad \dots\dots\dots(10)$$

ผลจากบล็อก (4) นำไปคำนวณร่วมกับ F_{in} ให้ผลเป็น F_{stick} ดังนี้

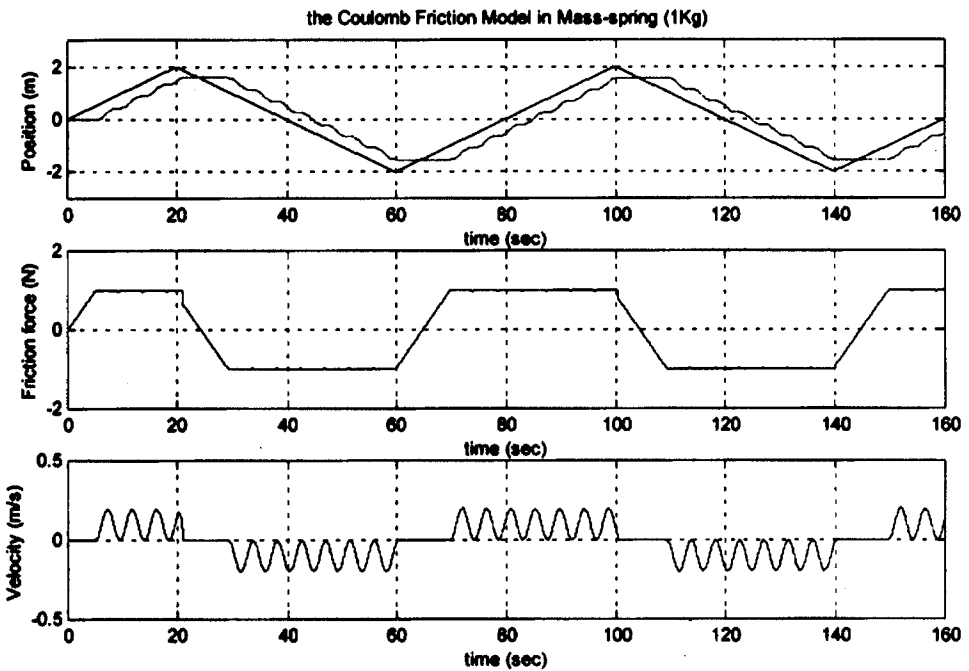
$$F_{stick}(F_{in}) = \begin{cases} F_{s+}, & F_{in} \geq F_{s+} \\ F_{in}, & F_{s-} < F_{in} < F_{s+} \\ F_{s-}, & F_{in} \leq F_{s-} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(11)$$

รายละเอียดโปรแกรมจำลองสถานการณ์เขียนด้วย MATLAB™ แสดงไว้ในรูปที่ 5 เป็นกรณีของแบบจำลองของคาร์นอนปีเมื่อต้องการเปลี่ยนแบบจำลองแรงเสียดทาน อาจทำการตัดแปลงตรงช่วง "block #5" ของโปรแกรม เช่น สมมุติว่าจะใช้สมการ (4.2) สำหรับจำลองแรงเสียดทาน ตามแบบของลูกรวมความหนืด โปรแกรมอาจถูกตัดแปลงแก้ไขเป็นดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 6 การอินทิเกรตที่แสดงในโปรแกรมใช้การประมาณแบบสี่เหลี่ยมผืนผ้าผู้ใช้ อาจเปลี่ยนแปลงไปใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบอื่น ๆ ที่ให้ค่าผิดพลาดน้อยกว่านี้ได้

การทดสอบแบบจำลองแรงเสียดทานชนิดต่าง ๆ การทดสอบหาผลตอบสนองของระบบที่มีแรงเสียดทานนี้ ได้ใช้ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ในระบบตาม (Canudas de Wit et al., 1995) ใช้เปรียบเทียบกับผลตอบสนองของระบบที่ทำการเขียนโปรแกรมจำลองผลตอบสนอง



รูปที่ 7 ผลการจำลองสถานการณ์ทางตำแหน่ง และความเร็วของระบบมวลสปริง 1 บนพื้นลื่น (ขณะไม่มีแรงเสียดทาน)



รูปที่ 8 ผลการจำลองสถานการณ์ทางตำแหน่ง ความเร็วและแรงเสียดทานของระบบมวลสปริง 2 ตามแบบจำลองแรงเสียดทานคูลอมบ์ ดังรูป ก ในตารางที่ 1

กับของเดิมในการพิจารณาความถูกต้องจากนั้นจะนำค่าดังกล่าวมาพัฒนาใช้กับแบบจำลองต่าง ๆ ของแรงเสียดทานที่นำเสนอในการหาผลตอบสนองการเคลื่อนที่ของมวล ใช้ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ดังนี้คือ มวล $m = 1$ kg, $k = 2$ N/m, มีความเร็วในการเคลื่อนที่สม่ำเสมอ $v_{ss} = 0.1$ m/s, ค่าความเร็ว $v_{st} = 0.001$ m/s ในแบบจำลอง, ค่าแรงเสียดทานสถิตย์ $F_s = 1.5$ N, แรงเสียดทานคูลอมบ์ $F_C = 1.0$ N และค่าแรงเสียดทานเชิงความหนืด $F_V = 0.4$ N.s/m โดยการทดสอบจะทำการป้อนสัญญาณอินพุตในลักษณะการเคลื่อนที่ไป-กลับที่ความเร็วในการเคลื่อนที่ 0.1 m/s โดยจะมีระยะทางเคลื่อนที่ ± 2 เมตรเพื่อหาค่าตำแหน่งที่มีการเคลื่อนที่ของมวล

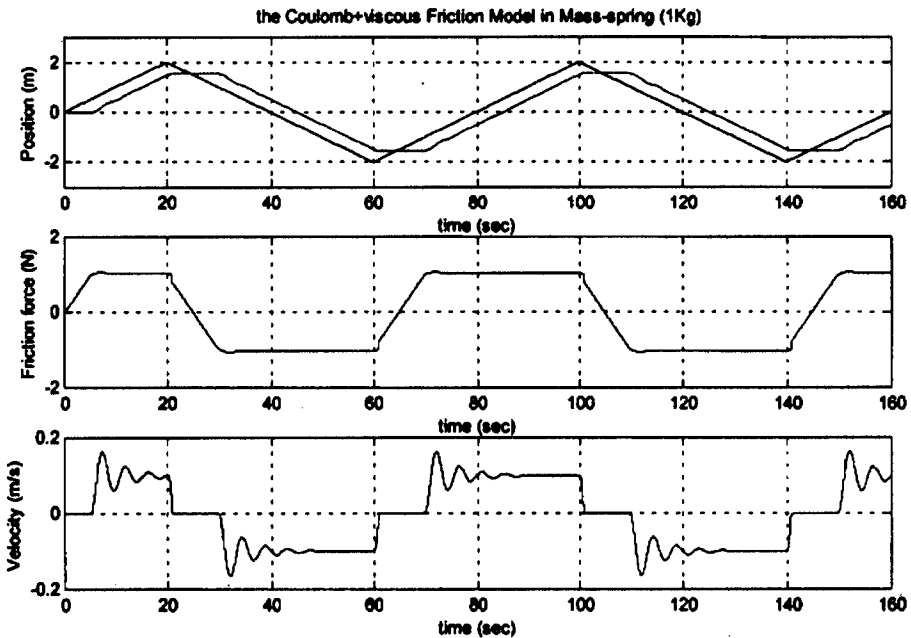
1. การทดสอบระบบการเคลื่อนที่บนพื้นลื่น (โดยมีการหล่อลื่นที่ดี ปราศจากแรงเสียดทานใด ๆ) กำหนดค่าต่าง ๆ ของแรงเสียดทานจากสมการให้ $F_s = F_C = F_V = 0$ และกำหนดค่าของระบบเป็นดังค่าเริ่มต้น (ค่า $dv = 0.001$ m/s) ให้ค่าตำแหน่งเริ่มต้นที่ -2 เมตร

(ค่า $x_d = x_i = -2$ เป็นค่าเริ่มต้น) กำหนดเวลาจาก 0-160 วินาที (เพื่อให้ปรากฏผลตอบสนองไปกลับได้ 2 วงรอบในการทำซ้ำ) ได้กำหนดค่าช่วงเวลาในแต่ละขั้นตอนการจำลองสถานการณ์ (simulation time-step) เท่ากับ 0.0032 วินาที (160 วินาที ต้องคำนวณ 50,000 ครั้ง) ได้ผลตอบสนองของตำแหน่ง, ความเร็ว ดังรูปที่ 7

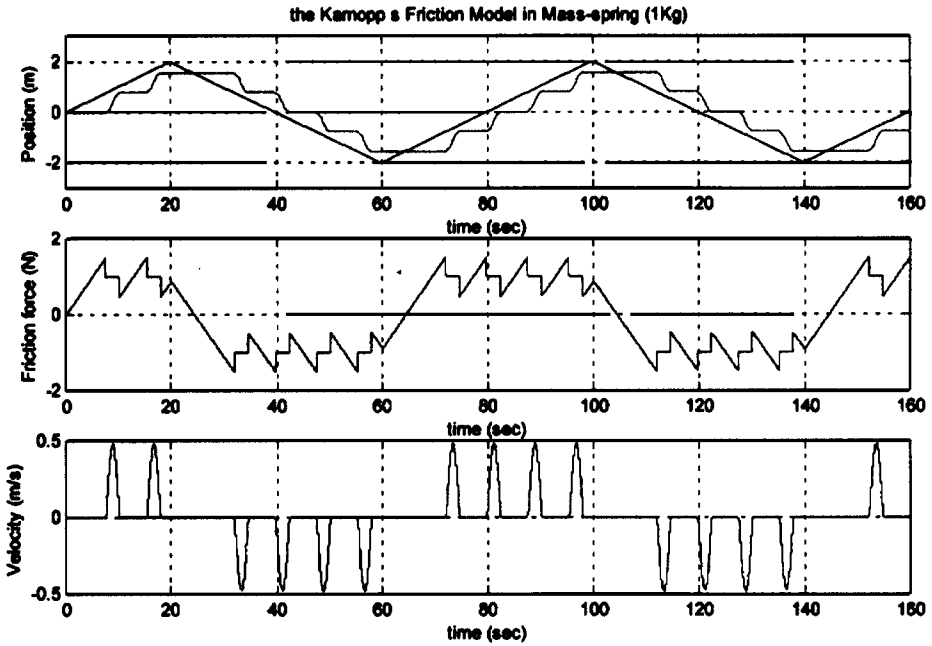
2. การทดสอบการเคลื่อนที่เมื่อมีแรงเสียดทานแบบคูลอมบ์ (แรงเสียดทานของระบบมีค่าคงที่ตลอดทุกช่วงความเร็ว) ดังรูป ก ในตารางที่ 1 การทดสอบระบบนี้พึ่งพาแนวคิดของคาร์นอปปี โดยกำหนดค่าของแรงเสียดทาน $F_s = F_C = 1$ N, $F_V = 0$ N.s/m ในโคอะแกรมการทำงานให้มีความสัมพันธ์ดังนี้ (โดยจะมีการกำหนดค่าในบล็อก (3) และ (5) อย่างสอดคล้องกัน)

$$F_{slip} = F_C \cdot \text{sgn}(v) = (1 \text{ N}) \cdot \text{sgn}(v) \dots (12.1)$$

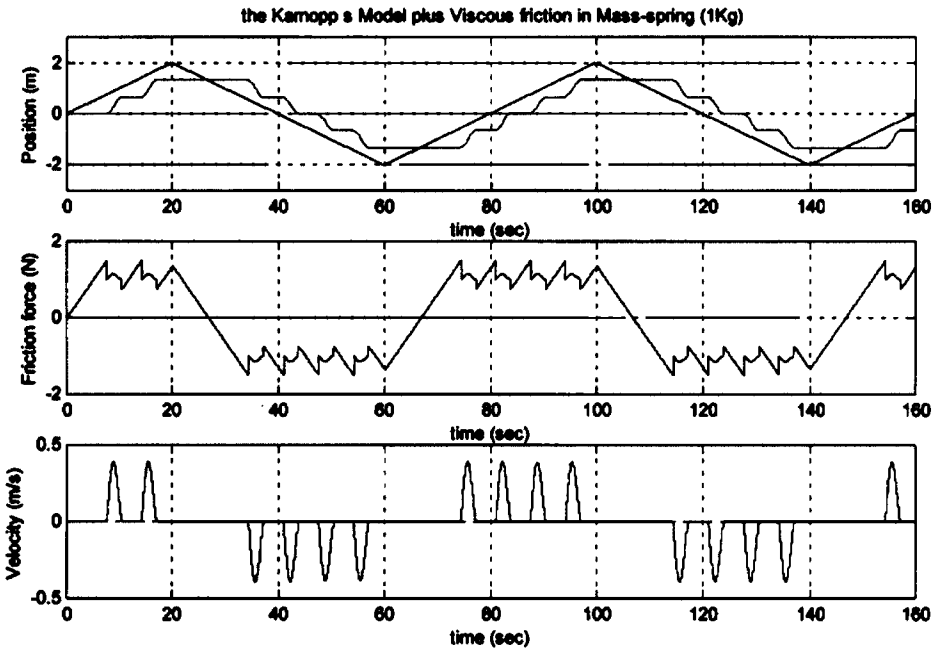
$$F_{stick}(F_{in}) = \begin{cases} 1, & F_{in} \geq 1 \\ F_{in}, & -1 < F_{in} < 1 \\ -1, & F_{in} \leq -1 \end{cases} \dots (12.2)$$



รูปที่ 9 ผลการจำลองสถานการณ์ทางตำแหน่ง ความเร็วและแรงเสียดทานของระบบมวลสปริง 3 ตามแบบจำลองแรงเสียดทานคูลอมบ์รวมความหนืด ดังรูป ข ในตารางที่ 1



รูปที่ 10 ผลการจำลองสถานการณ์ทางตำแหน่ง ความเร็วและแรงเสียดทานของระบบมวลไดโอนข้อ 4 ตามแบบจำลองของคาร์นอปป์ ดังรูป ข ในตารางที่ 1



รูปที่ 11 ผลการจำลองสถานการณ์ทางตำแหน่ง ความเร็วและแรงเสียดทานของระบบมวลไดโอนข้อ 4 ตามแบบจำลองของคาร์นอปป์รวมความหนืด ดังรูป ข ในตารางที่ 1

กำหนดค่า $dv = 0.001$ m/s จุดเริ่มต้นกำหนดให้ $x_i = x_d = 0$ (เริ่มที่จุดศูนย์) โดยกำหนดช่วงเวลาสิ้นสุดและช่วงเวลาดำเนินการในแต่ละขั้นคอนแทกกับข้อที่ 1 (เพื่อนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกัน) โดยมีผลตอบสนองทางตำแหน่ง, ความเร็วและแรงเสียดทาน แสดงดังรูปที่ 8

3. การทดสอบการเคลื่อนที่เมื่อมีแรงเสียดทานแบบคูลอมบ์รวมความหนืด (แรงเสียดทานของระบบขึ้นกับความเร็วในการเคลื่อนที่) ดังรูป ข ในตารางที่ 1 การทดสอบระบบนี้พึ่งพาทฤษฎีของคาร์นอนอปป์เช่นเดียวกับข้อที่ 2 โดยกำหนดค่าของแรงเสียดทาน $F_s = F_c = 1$ N, $F_v = 0.4$ N.s/m ในโคแอสเทรกรมการทำงาน (เปลี่ยนค่าในบล็อก (3) ใหม่ ส่วนบล็อก (5) เช่นเดียวกับข้อที่ 2) ให้มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$F_{slip} = F_c \cdot \text{sgn}(v) + F_v \cdot v = (1) \cdot \text{sgn}(v) + (0.4) \cdot v \quad \dots\dots\dots(13)$$

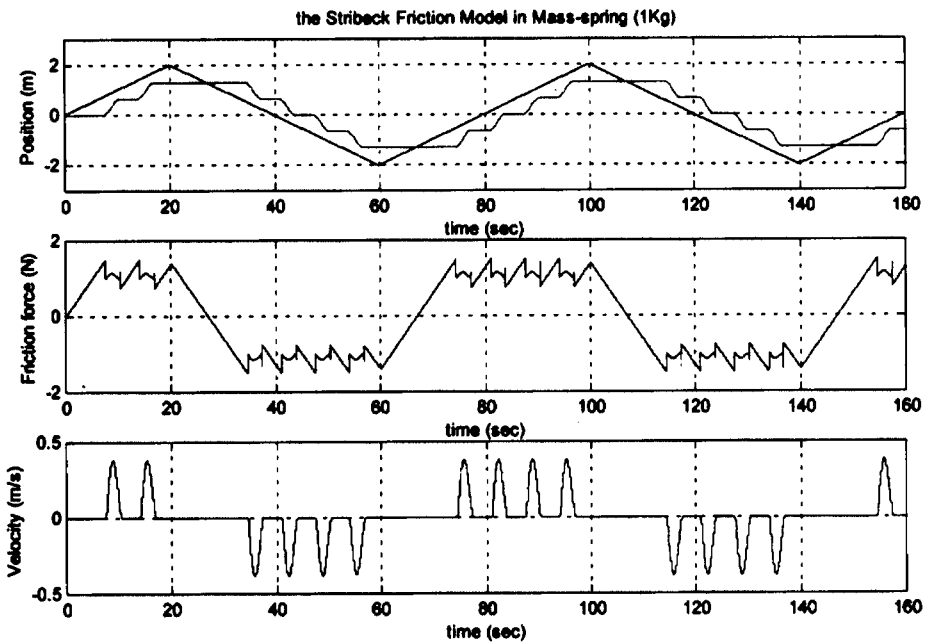
กำหนดค่าต่าง ๆ ที่เหลือเช่นเดียวกับข้อที่ 2) เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบผล โดยมีผลตอบสนองทาง

ตำแหน่ง, ความเร็วและแรงเสียดทาน แสดงดังรูปที่ 9
4. การทดสอบการเคลื่อนที่เมื่อมีแรงเสียดทานตามแบบจำลองของคาร์นอนอปป์ ดังรูป ข และ ข ในตารางที่ 1 โดยกำหนดค่าของแรงเสียดทาน $F_s = 1.5$, $F_c = 1.0$ N, $F_v = 0$ N.s/m ในโคแอสเทรกรมการทำงาน (เปลี่ยนค่าในบล็อก (3) และ (5)) ให้มีความสัมพันธ์ดัง (14.1) และ (14.2)

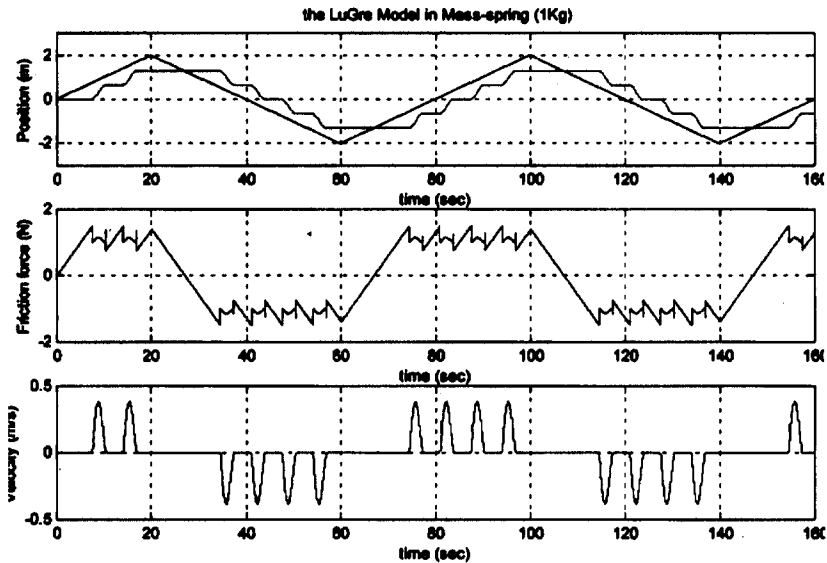
$$F_{slip} = F_c \cdot \text{sgn}(v) = (1 \text{ N}) \cdot \text{sgn}(v) \dots\dots\dots(14.1)$$

$$F_{stick}(F_{in}) = \begin{cases} 1.5, & F_{in} \geq 1.5 \\ F_{in}, & -1.5 < F_{in} < 1.5 \\ -1.5, & F_{in} \leq -1.5 \end{cases} \dots\dots\dots(14.2)$$

กำหนดค่าต่าง ๆ ที่เหลือเช่นเดียวกับข้อที่ 2) เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบผล โดยมีผลตอบสนองทางตำแหน่ง, ความเร็วและแรงเสียดทาน แสดงดังรูปที่ 10 ทำการเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์ของความหนืด $F_v = 0.4$ N.s/m ในโคแอสเทรกรมการทำงาน (จะทำการ



รูปที่ 12 ผลการจำลองสถานการณ์ทางตำแหน่ง ความเร็วและแรงเสียดทานของระบบมวลสปริงในข้อ 5 ตามแบบจำลองชนิดรวมผลของสไตรเบคและความหนืด ดังรูป ข ในตารางที่ 1



รูปที่ 13 ผลการจำลองสถานการณ์ทางตำแหน่ง ความเร็วและแรงเสียดทานของระบบมวลสปริงในข้อ 6 ตามแบบจำลองของลูกรวมความหนืด ดังรูป จ ในตารางที่ 1

เปลี่ยนค่าในบล็อก (3) ให้มีความสัมพันธ์ดัง (14.3) โดยมีผลตอบสนองทางตำแหน่ง, ความเร็วและแรงเสียดทาน แสดงดังรูปที่ 11

$$F_{slip} = F_c \cdot \text{sgn}(v) + F_v \cdot v = (1) \cdot \text{sgn}(v) + (0.4) \cdot v \tag{14.3}$$

5. การทดสอบการเคลื่อนที่เมื่อมีแรงเสียดทานที่รวมผลของสตรายเบ็ค ดังรูป จ ในตารางที่ 1 โดยกำหนดค่า $v_{ss} = 0.001$ m/s กำหนดค่าของแรงเสียดทาน $F_s = 1.5$, $F_c = 1.0$ N, $F_v = 0.4$ N.s/m ซึ่งจะกำหนดค่า $dv = v_{ss}/10 = 0.0001$ m/s เป็นช่วงค่าความเร็วที่คาดเคลื่อนในสถานะหยุดนิ่งดังนั้นค่า dP จะเปลี่ยนแปลงตาม dv จึงมีการเปลี่ยนแปลงสมการในบล็อกดังนี้

บล็อก (3) จากสมการที่ 3.2 จะได้

$$F_{slip} = \left\{ 1 + (1.5 - 1) e^{\left(\frac{1}{0.0001} \right) v} \right\} \text{sgn}(v) + (0.4) \cdot v \tag{15.1}$$

บล็อก (5) จากสมการที่ 3.2 จะได้

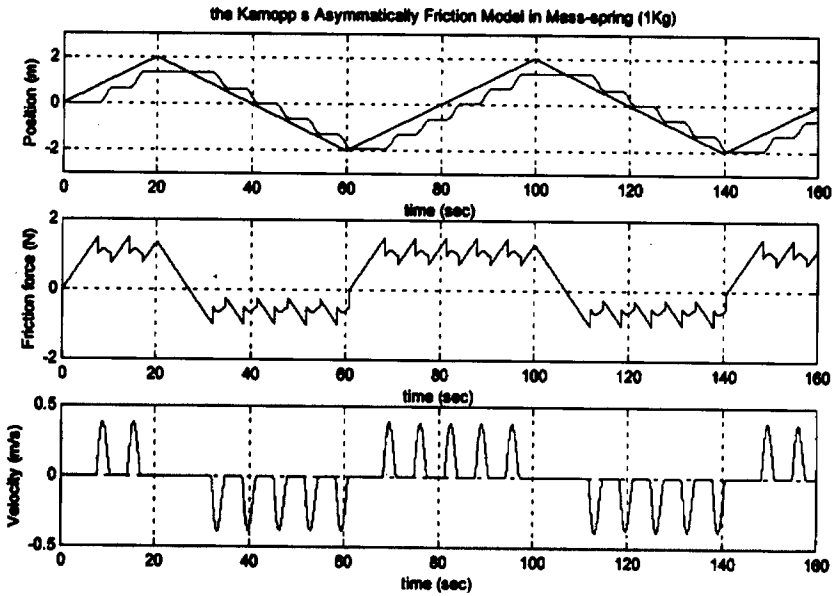
$$F_{stick}(F_{in}) = \begin{cases} F_1, & F_{in} \geq F_1 \\ F_{in}, & -F_1 < F_{in} < F_1 \\ -F_1, & F_{in} \leq -F_1 \end{cases} \tag{15.2}$$

เมื่อ

$$F_1 = \left\{ 1 + (1.5 - 1) e^{\left(\frac{1}{0.0001} \right) v} \right\} \text{sgn}(v) + (0.4) \cdot v \tag{15.3}$$

กำหนดค่าต่าง ๆ ที่เหลือเช่นเดียวกับข้อที่ 2 เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบผล ซึ่งได้ผลตอบสนองทางตำแหน่ง, ความเร็วและแรงเสียดทาน แสดงดังรูปที่ 12

6. การทดสอบการเคลื่อนที่เมื่อมีแรงเสียดทานตามแบบจำลองของลูกรวมความหนืด ดังรูป จ ในตารางที่ 1 กำหนดค่าความเร็ว และค่าแรงเสียดทาน พร้อมกับวิธีการจำลองสถานการณ์เช่นเดียวกับข้อที่ 5 มีข้อแตกต่างกันที่สมการในบล็อก (3) และ (5) ดังนั้นบล็อก (3) จากสมการที่ 4.2 จะได้



รูปที่ 14 ผลการจำลองสถานการณ์ทางตำแหน่ง ความเร็วและแรงเสียดทานของระบบมวลสปริงในข้อ 7 ตามแบบจำลองของคาร์นอนปีปรับให้ไม่สมมาตร ดังรูป ๗ ในตารางที่ 1

$$F_{slip} = \left\{ 1 + (1.5 - 1)e^{\left(\frac{|v|}{0.001}\right)^2} \right\} \text{sgn}(v) + (0.4) \cdot v \quad \dots\dots\dots(16.1)$$

บล็อก (5) จากสมการที่ 4.2 จะได้

เมื่อ

$$F_1 = \left\{ 1 + (1.5 - 1)e^{\left(\frac{|v|}{0.001}\right)^2} \right\} \text{sgn}(v) + (0.4) \cdot v \quad \dots\dots\dots(16.2)$$

กำหนดค่าต่าง ๆ ที่เหลือเช่นเดียวกับข้อที่ 2 เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบผล โดยมีผลตอบสนองทางตำแหน่ง, ความเร็วและแรงเสียดทาน แสดงดังรูปที่ 13

7. การทดสอบระบบการเคลื่อนที่ตามแบบจำลองแรงเสียดทานของคาร์นอนปีไม่สมมาตร ดังรูป ๗ ในตารางที่ 1 โดยให้ค่าแรงเสียดทาน $F_{s+} = 1.5 \text{ N}$, $F_{s-} = -1.0 \text{ N}$, $F_{c+} = 1.0 \text{ N}$, $F_{c-} = -0.5 \text{ N}$, $F_v = 0.4 \text{ N.s/m}$ และ $dv = 0.001 \text{ m/s}$ ทำการเปลี่ยนสมการในบล็อก (3) และ (5) ใหม่ได้ดังนี้

$$F_{slip} = \begin{cases} 1.0 + (0.4) \cdot v, & v > dv \\ -0.5 + (0.4) \cdot v, & v < -dv \end{cases} \dots\dots\dots(17.1)$$

$$F_{stick}(F_{in}) = \begin{cases} 1.5, & F_{in} \geq 1.5 \\ F_{in}, & -1.0 < F_{in} < 1.5 \\ -1.0, & F_{in} \leq -1.0 \end{cases} \dots\dots\dots(17.2)$$

กำหนดค่าต่าง ๆ ที่เหลือเช่นเดียวกับข้อที่ 2 เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบผล โดยมีผลตอบสนองทางตำแหน่ง, ความเร็วและแรงเสียดทาน แสดงดังรูปที่ 14

ผลและอภิปราย

จากการจำลองสถานการณ์ของระบบมวลสปริงดังข้อที่ 1 คือบนพื้นดิน ได้ผลดังรูปที่ 7 จะสังเกตเห็นว่ามีการเคลื่อนที่ไม่สม่ำเสมอมีค่าคลาดเคลื่อนประมาณ $\pm 0.1 \text{ m/s}$ ซึ่งเกี่ยวกับผลของคาส์ลในการจำลองระบบ (ผลมาจากสปริงที่มีการยืด-หด) โดยมีค่าความเร็วระหว่าง $0-0.2 \text{ m/s}$ มีค่าความเร็วเฉลี่ยเท่ากับ 0.1 m/s

ทำให้การเคลื่อนที่เกิดการติด-ลื่นอย่างต่อเนื่องตลอดเวลา

จากการจำลองสถานการณ์ตามข้อ 2 ระบบที่มีแรงเสียดทานถูกลอมบี๋ ได้ผลการจำลองดังรูปที่ 8 จะมีข้อแตกต่างจากผลที่แสดงในรูปที่ 7 ตรงช่วงเวลาก่อนการไถลของมวล คือ มีสภาวะหยุดนิ่งเนื่องจากในช่วงนี้แรงกระทำไม่สามารถเอาชนะแรงเสียดทานถูกลอมบี๋ได้ ($F_{in} < F_c$) ในสภาวะที่แรงกระทำมีค่ามากกว่าผลของการเคลื่อนที่มีลักษณะเช่นเดียวกับรูปที่ 7 ซึ่งตำแหน่งในการเคลื่อนที่มีค่าผิดพลาดประมาณ 0.4 m ดังรูปที่ 8

จากการจำลองสถานการณ์ดังที่ได้อธิบายไว้ในข้อ 3 ระบบมีแรงเสียดทานถูกลอมบี๋รวมความหนืด ได้ผลการจำลองดังรูปที่ 9 ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับรูปที่ 8 ในสภาวะก่อนมีการไถล ส่วนในสภาวะที่มีการไถลจะมีผลของแรงเสียดทานเชิงความหนืดซึ่งมีขนาดขึ้นอยู่กับความเร็ว มาส่งผลทำให้ความเร็วในช่วงเริ่มไถลมีการเปลี่ยนแปลง แล้วค่อย ๆ ลดลงจน มีค่าความเร็วคงที่ 0.1 m/s ดังนั้นการไถลของมวลในช่วงเริ่มต้นจะมีการติด-ลื่นและสั้นเล็กน้อย แล้วอาการตันจึงลดลงจนมีการไถลแบบสม่ำเสมอในช่วงถัดไป ส่วนค่าคลาดเคลื่อนทางตำแหน่งยังคงประมาณ 0.4 m

ผลของการจำลองสถานการณ์ทั้งสามชุดข้างต้นถือเป็นสภาวะพื้นฐาน การจำลองสถานการณ์ต่อไปนี้จะมีการเสียดทานที่มีผลของสตรายเบ็คมาเกี่ยวข้องในระบบมวลไถล เริ่มต้นด้วยการมีแรงเสียดทานตามแบบจำลองของคาร์นอปปีขนาดสมมาตร ได้ผลการจำลองดังรูปที่ 10 มีข้อแตกต่างจากทั้งสามลักษณะการจำลองก่อนหน้านี้ คือ การไถลและความเร็วปรากฏเป็นช่วง ๆ แสดงพฤติกรรมการติด-ลื่นอย่างเด่นชัด คือจะมีการติดในช่วงเริ่มต้น จนกว่าแรงกระทำจะสามารถเอาชนะแรงเสียดทานสถิตย์ได้มวลจึงไถล จะทำให้ระยะ ($x_1 - x_2$) มีค่ามาก จึงส่งผลให้ค่าความเร็วมีค่าสูงอยู่ในช่วง 0-0.5 m/s เนื่องมาจากผลของสตรายเบ็คโดยมีความเร็วอยู่ในช่วงที่ (1) และ (2) รูปที่ 1 จึง

มีการเปลี่ยนแปลงแรงเสียดทานอย่างฉับพลัน จากแบบจำลองนี้ผลที่ได้ในสภาวะที่มีความเร็วมากกว่า dv (ดูรูป 3 ในตารางที่ 1) จะเกิดการไถล

แรงเสียดทานลดลงตามสมการที่ (5.1)

ทำให้ระยะ ($x_1 - x_2$) มีค่าลดลง แรงสปริงเริ่มลดลง ความเร็วจะลดลงจนใกล้ศูนย์หรือน้อยกว่า dv แรงเสียดทานจะมีค่าสูงเท่ากับแรงเสียดทานสถิตย์อีกครั้ง ทำให้เกิดการหยุดนิ่งจนกว่าแรงกระทำจะเอาชนะแรงเสียดทานจึงจะเกิดการไถลได้อีกครั้งเมื่อนำความหนืดมารวม พิจารณาจะได้ผลการจำลองเป็นดังรูปที่ 11 ทำให้ความเร็วลดลงอยู่ในช่วง 0-0.4 m/s เนื่องจากความหนืดส่งผล ส่วนผลตอบสนองในการไถล มีลักษณะเช่นเดียวกับรูปที่ 10 และหลักการทำความเข้าใจผลตามรูปที่ 10 ก็สามารถประยุกต์ได้เข้ากับผลตามรูปที่ 11 นี้ด้วย

ต่อไปเป็นการพิจารณาขณะที่ระบบมีแรงเสียดแบบรวมผลของสตรายเบ็คและความหนืด ผลการจำลองปรากฏดังรูปที่ 12 ซึ่งมีความคล้ายคลึงกับเมื่อใช้แรงเสียดทานตามแบบของคาร์นอปปีดังรูปที่ 11 ที่ผ่านมาระบบเมื่อพิจารณาที่มีแรงเสียดทานตามแบบจำลองของลูเกอร์ รวมความหนืด ได้ผลการจำลองเป็นดังรูปที่ 13 มีลักษณะคล้ายคลึงกับรูปที่ 11 เช่นกัน จะมีข้อแตกต่างอยู่บางก็คือ ช่วงที่ความเร็วเริ่มใกล้ศูนย์จะมีแรงเสียดทานสูงขึ้นชั่วขณะเนื่องมาจากผลของสตรายเบ็คดังรูปที่ 1 ขณะที่เกิดการเปลี่ยนแปลงจากช่วงที่ (2) ไปช่วง (1) ทำให้ระบบหยุดไถลเร็วขึ้น ส่วนความแตกต่างกันระหว่างผลตามรูปที่ 12 กับ รูปที่ 13 นั้นมีน้อยมากเนื่องจากสภาวะ ช่วงที่ (1) ดังรูปที่ 1 มีค่าน้อยมากทั้งคู่จนอาจประมาณค่าให้เท่ากันได้จึงได้ผลตอบสนองใกล้เคียงกัน

การจำลองสถานการณ์ในขั้นต่อไปพิจารณา ระบบที่มีแรงเสียดทานตามแบบของคาร์นอปปีไม่สมมาตร ปรากฏผลการจำลองดังรูปที่ 14 จะมีข้อแตกต่างกันจากรูปที่ 11 อยู่บ้างก็คือขนาดของแรงเสียดทานสองทิศทางไม่เท่ากันกล่าวคือทำให้ทิศทางการไถลทาง

บวกจะถูกต้านด้วยแรงเสียดทานที่สูงกว่าอีกทิศทางหนึ่ง ในการไหลได้ระยะทางบวกน้อยกว่าทางลบ พฤติกรรมการเคลื่อนที่ของระบบโดยทั่วไป จะมีค่าแรงเสียดทานในแต่ละทิศทางไม่เท่ากัน

สรุป

แบบจำลองแรงเสียดทาน ไม่เชิงเส้นได้รับการอธิบายไว้ในบทความนี้ แม้ว่าจะมีใช้การสำรวจวรรณกรรมอย่างละเอียดก็ตาม แบบจำลองแรงเสียดทานที่กล่าวถึงเป็นที่ยอมรับเพื่อใช้งานทางวิศวกรรมก่อนข้างแพร่หลาย การจำลองสถานการณ์ระบบพลวัตที่มีการไหลด้านด้วยแรงเสียดทานไม่เชิงเส้น ผู้ดำเนินงานต้องการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แม่นยำสูง การจำลองแรงเสียดทานไม่เชิงเส้นได้รับการเปิดเผยไว้ในรายละเอียดพร้อมโปรแกรม MATLAB™ ที่ผู้ประพันธ์ได้พัฒนาขึ้นแบบจำลองแรงเสียดทานของสตรายเบ็ค ลูกเกอร์ และคาร์นอปปี ให้ผลการจำลองสถานการณ์ที่ใกล้เคียงกันมาก จะปรากฏแรงเสียดทานคล้ายอิมพัลส์ในสภาวะติด-ลื่น เมื่อใช้แบบจำลองของลูกเกอร์เท่านั้น แต่แบบจำลองของคาร์นอปปีใช้งานง่ายที่สุดสำหรับการจำลองสถานการณ์ การเลือกช่วงเวลาคำนวณที่ละเอียดขึ้น ตามแบบจำลองสถานการณ์ (Δt) เป็นอีกเรื่องหนึ่งที่ต้องพิจารณาเลือก ประกอบกับการทดลองการจำลองสถานการณ์อย่างระมัดระวัง เพราะหากเลือก Δt ไม่เหมาะสมอาจส่งผลให้เกิดการขาดเสถียรภาพในผลการจำลองได้ และค่าเชิงตัวเลขต่าง ๆ ที่ได้ออกมาจากการคำนวณก็ไร้ความหมาย ข้อเสนอแนะจากผู้ประพันธ์คือให้เลือก Δt น้อยไว้ก่อน เช่น เป็น นาโน-หรือไมโคร-วินาที เลือกช่วงเวลาในการจำลองสถานการณ์ไม่ได้นานนักเช่น 1-20 วินาที เพื่อดำเนินการจำลองสถานการณ์ให้เห็นผลในช่วงต้น ซึ่งเครื่องอาจใช้เวลาคำนวณนานหลายนาที่จนถึงชั่วโมง เมื่อมั่นใจแล้วว่าผลการคำนวณนั้นถูกต้อง จึงค่อยปรับ Δt ให้เพิ่มค่าขึ้นเพื่อให้เครื่องคำนวณได้

เร็วขึ้น และสามารถเปรียบเทียบผลที่ได้กับผลเดิมจากนั้นจึงใช้ค่า Δt ใหม่กับการจำลองสถานการณ์ต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- Armstrong-Helouvry B. (1993). Stick Slip and Control in Low-Speed Motion. IEEE Trans. AC. 38(10):1483-1495.
- Blau P. (1996). Friction Science and Technology. Marcel Dekker.
- Canudas de Wit C. , Olsson H., Armstrong K.J. and Lischinsky P. (1995). A New Model for Control of Systems with Friction. IEEE Trans . AC.40(3):. 419-425.
- Du H. and Nair S.S. (1999). Modeling and Compensation of Low-Velocity Friction with Bounds. IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. 7(1): 110-121.
- Gafvert M. (1997). Comparisons of Two Dynamic Friction Models. Proc. IEEE Int. Conf. On Control Applications. :386-391.
- Karnopp D. (1985). Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic System. J. Dyn. Syst. Meas. & Contr. (107):.100- 103.
- Rabinowicz E. (1995). Friction and Wear of Materials. John Wiley.