1. ให้ $b_5 = a_5$
2. $b_4 = a_4 + 6b_5$
3. $b_3 = a_3 + 6b_4$
4. $b_2 = a_2 + 6b_3$
5. $b_1 = a_1 + 6b_2$
6. $b_0 = a_0 + 6b_1$

ผลลัพธ์ที่ได้ คือ $p_5(6) = b_0$

ขั้นตอนวิธี 3.1 การคำนวณฟังก์ชันพหุนาม $p_n(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน

ข้อมูลเข้า : $n,\ a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1}, a_n,\ x$

การเริ่มต้น : $b_n = a_n$

for $k = n\text{-}1, n\text{-}2, \ldots, 1, 0$ **do**

$b_k = a_k + b_{k+1}x$

end

ผลลัพธ์ : $p_n(x) = b_0$

การคำนวณฟังก์ชันพหุนาม $p_n(x)$ ในรูปกำลังซ้อนใน สามารถจัดระเบียบโดยใช้ตารางฮอร์เนอร์ (Horner's table) หรือ วิธีฮอร์เนอร์ ได้ดังนี้

ข้อมูลเข้า : c	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_k	...	a_2	a_1	a_0
		$b_n c$	$b_{n-1} c$	...	$b_{k+1} c$	...	$b_3 c$	$b_2 c$	$b_1 c$
	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	...	b_k	...	b_2	b_1	b_0
ผลลัพธ์ : $p_n(c) = b_0$									

ตารางที่ 3.1.1 ตารางฮอร์เนอร์

จากตารางฮอร์เนอร์ยังได้ว่า $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ สัมประสิทธิ์ในแถวที่ 3 ในตารางฮอร์เนอร์ทำให้ได้ฟังก์ชันพหุนาม

$$q(x) = b_1 + b_2 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-2} + b_n x^{n-1} \tag{3.1.9}$$

ซึ่งเป็นผลหาร (quotient) ของ $p_n(x)$ เมื่อหารด้วย $x-c$ และ b_0 หรือ $p_n(c)$ เป็นเศษเหลือ (remainder) นั่นคือ

$$p_n(x) = (x-c)q(x) + b_0 \tag{3.1.10}$$

วิธีฮอร์เนอร์จึงมีชื่อเรียกว่า การหารสังเคราะห์ (synthetic division) ถ้า b_0 หรือ $p_n(c)$ มีค่าเป็นศูนย์ แสดงว่า c เป็นราก (root) ของ $p_n(x)$

ตัวอย่างที่ 3.1.1 จงใช้ตารางฮอร์เนอร์คำนวณ $p_5(3)$ เมื่อ $p_5(x) = x^5 - 6x^4 + 8x^3 + 4x - 40$

วิธีทำ สร้างตารางฮอร์เนอร์โดยเรียงสัมประสิทธิ์จากพจน์กำลังสูงสุด

ข้อมูลเข้า : 3	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	−6	8	0	4	−40
		3	−9	−3	−9	−15
	1	−3	−1	−3	−5	−55
ผลลัพธ์ : $p_5(3) = -55$						

และจากสมการ (3.1.9) และ (3.1.10) ได้ว่า

$$p_5(x) = (x-3)(x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x - 5) - 55$$

□

ตัวอย่างที่ 3.1.2 จงใช้ตารางฮอร์เนอร์คำนวณ $p_5'(2)$ เมื่อ $p_5(x)=x^5-6x^4+8x^3+4x-40$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ของ $p_5(x)$

$$p_5'(x)=5x^4-24x^3+24x^2+4$$

สร้างตารางฮอร์เนอร์โดยเรียงสัมประสิทธิ์ของ $p_5'(x)$ จากพจน์กำลังสูงสุด

ข้อมูลเข้า : 2	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	5	-24	24	0	4
		10	-28	-8	-16
	5	-14	-4	-8	-12
ผลลัพธ์ : $p_5'(2)=-12$					

และจากสมการ (3.1.9) และ (3.1.10) ยังได้ว่า

$$p_5'(x) = (x-2)(5x^3-14x^2-4x-8)-12$$ □

ตัวอย่างที่ 3.1.3 จงแสดงการหาร $p_3(x)=x^3+2x^2-3x-4$ ด้วย $2x-1$ โดยวิธีฮอร์เนอร์

วิธีทำ

เขียน $2x-1 = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ แล้วให้หาร $p_3(x)$ ด้วย $x-\frac{1}{2}$

ข้อมูลเข้า : $1/2$	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	2	-3	-4
		$1/2$	$5/4$	$-7/8$
	1	$5/2$	$-7/4$	$-39/8$
ผลลัพธ์ : $p_3(1/2)=-39/8$				

ดังนั้น

$$x^3+2x^2-3x-4 = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{7}{4}\right)-\frac{39}{8}$$
$$= (2x-1)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{5}{4}x-\frac{7}{8}\right)-\frac{39}{8}$$

และถ้า $f(x)=x^3+2x^2-3x-4$ แล้ว $f(1/2) = -39/8$ □

ตัวอย่างที่ 3.1.3 แสดงให้เห็นว่า การหารฟังก์ชันพหุนาม $f(x)$ ด้วย $ax-b$ ให้หาผลหาร $q(x)$ และเศษเหลือ r โดยหาร $f(x)$ ด้วย $x-b/a$ ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$f(x)=\left(x-\frac{b}{a}\right)q(x)+r = (ax-b)\frac{q(x)}{a} + r \tag{3.1.11}$$

ตัวอย่างที่ 3.1.4 จงแสดงว่า $2x-1$ เป็นตัวประกอบของ $6x^3-41x^2-9x+14$ โดยวิธีฮอร์เนอร์

วิธีทำ ในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 3.1.3 ให้หารด้วย $x-\frac{1}{2}$

ข้อมูลเข้า : $1/2$	a_3	a_2	a_1	a_0
	6	-41	-9	14
		3	-19	-14
	6	-38	-28	0
ผลลัพธ์ : $p_3(1/2)=0$				

ดังนั้น 1/2 เป็นรากของ $6x^3-41x^2-9x+14$ และ

$$6x^3-41x^2-9x+14 = \left(x-\frac{1}{2}\right)(6x^2-38x-28)$$
$$= (2x-1)(3x^2-19x-14)$$
$$= (2x-1)(3x+2)(x-7)$$

□

ตัวอย่างที่ 3.1.5 จงแสดงว่า $x-1$ เป็นตัวประกอบของ x^n-1 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ โดยวิธีฮอร์เนอร์

วิธีทำ สร้างตารางฮอร์เนอร์โดยเรียงสัมประสิทธิ์ของ x^n-1 จากพจน์กำลังสูงสุด

ข้อมูลเข้า : 1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
	1	0	0	$\cdots$	0	0	-1
		1	1	$\cdots$	1	1	1
	1	1	1	$\cdots$	1	1	0
ผลลัพธ์ : $p_n(1)=0$							

ดังนั้น $x-1$ เป็นตัวประกอบของ x^n-1 □

3.2 พหุนามเทย์เลอร์ (Taylor Polynomials)

ฟังก์ชันที่นิยมใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชัน $f(x)$ คือฟังก์ชันพหุนาม เพราะว่าฟังก์ชันพหุนามมีรูปแบบที่ง่ายในการคำนวณค่า และสมบัติพื้นฐานที่เหมาะและสะดวกในการนำไปใช้ เช่น ความต่อเนื่อง การหาอนุพันธ์ได้ เป็นต้น ลักษณะปัญหาที่จะพิจารณาคือ เมื่อรู้ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ $x = x_0$ แล้วจะประมาณค่าของ $f(x)$ สำหรับ $x \neq x_0$ ได้อย่างไร และถ้ามีข้อมูลของอนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่ $x = x_0$ เพิ่มมาอีก แล้วจะประมาณค่าของ $f(x)$ สำหรับ $x \neq x_0$ ได้อย่างไร และมีความแม่นตรงมากขึ้นหรือไม่

พิจารณาการประมาณ $f(x)$ เมื่อทราบค่าของ $f(x_0)$ เพียงค่าเดียว ฟังก์ชันพหุนามที่ใช้ประมาณ คือ ฟังก์ชันพหุนาม $p_0(x) = f(x_0)$ หรือฟังก์ชันค่าคงตัว

$$f(x) \cong p_0(x) = f(x_0) \tag{3.2.1}$$

ตัวอย่าง เช่น ในกรณี $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ สามารถประมาณ e^x โดยใช้ข้อมูลค่าฟังก์ชันของ e^x ที่ $x = 0$ เพียงอย่างเดียว นั่นคือ พหุนาม $p_0(x) = e^{x_0} = e^0 = 1$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันค่าคงตัว ดังนั้น การประมาณอยู่ในรูป

$$e^x \cong p_0(x) = 1 \tag{3.2.2}$$

เมื่อเพิ่มข้อมูลอนุพันธ์ของ $f(x) = e^x$ ที่ $x_0 = 0$ นั่นคือ $f'(0) = 1$ เงื่อนไขของพหุนามที่ใช้ประมาณ e^x คือ พหุนามและฟังก์ชัน e^x ต้องมีค่าฟังก์ชันและอนุพันธ์เท่ากันที่ $x_0 = 0$ หรือ

$$p_1(0) = f(0), \quad p_1'(0) = f'(0) \tag{3.2.3}$$

ซึ่งในเชิงเรขาคณิตมีความหมายว่า กราฟของ e^x และ $p_1(x)$ ตัดกันที่จุด (0,1) และมีความชันเท่ากัน พหุนามเชิงเส้น $p_1(x)$ ที่สอดคล้องตามเงื่อนไข (3.2.3) นี้ คือ

$$e^x \cong p_1(x) = 1 + x \tag{3.2.4}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเพิ่มข้อมูลอนุพันธ์อันดับสองและสามของ e^x ที่ $x_0 = 0$ เพื่อสร้างพหุนามที่ใช้ประมาณ e^x ให้มีกำลังสูงขึ้น และสอดคล้องตามเงื่อนไขในลักษณะเดียวกับ (3.2.3) กล่าวคือ

$$p_2(0) = 0, \quad p_2'(0) = f'(0), \quad p_2''(0) = f''(0) \tag{3.2.5}$$

และ

$$p_3(0) = 0, \; p_3'(0) = f'(0), \; p_3''(0) = f''(0), \; p_3'''(0) = f'''(0) \tag{3.2.6}$$

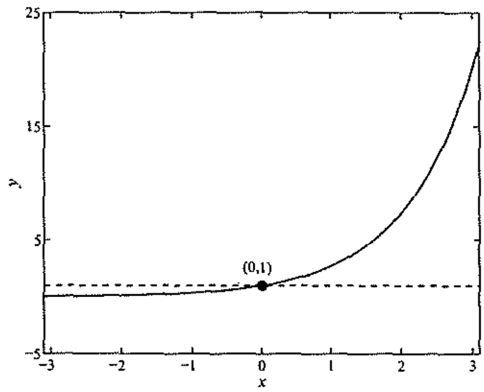
จากเงื่อนไข (3.2.5) และ (3.2.6) จะได้ว่าพหุนามกำลังสองและกำลังสามอยู่ในรูป

$$e^x \cong p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \tag{3.2.7}$$

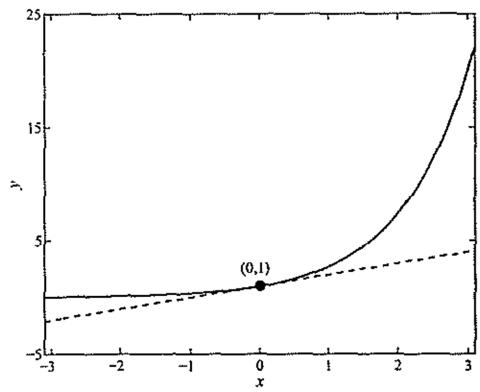
และ

$$e^x \cong p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \tag{3.2.8}$$

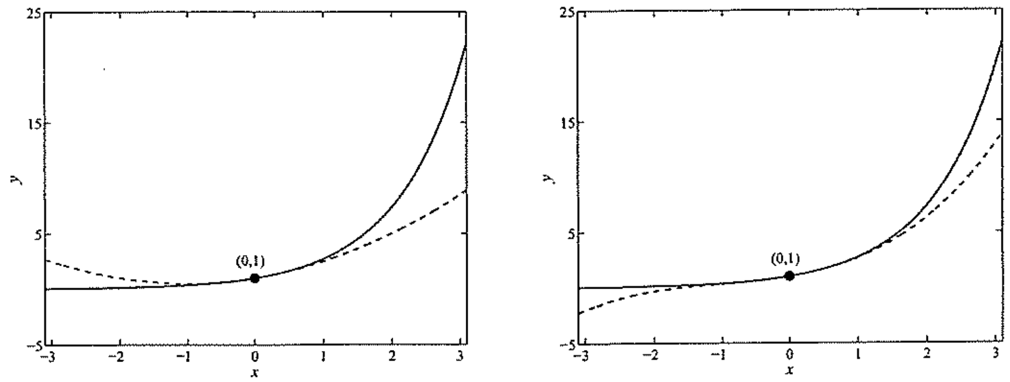
รูปที่ 3.2.1 (1) - (4) แสดงกราฟของ e^x และเส้นประแสดงกราฟของพหุนาม $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ และ $p_3(x)$ ซึ่งเป็นเส้นนอน เส้นตรง พาราโบลา และเส้นโค้งกำลังสาม ตามลำดับ เห็นได้ว่า ถ้าประมาณค่าของ e^x ด้วยพหุนามเหล่านี้ ค่าประมาณจะมีความแม่นยำเมื่อตำแหน่งที่ประมาณอยู่ใกล้ตำแหน่ง $x_0 = 0$



(1)



(2)



(3) (4)

รูปที่ 3.2.1

สำหรับกรณีทั่ว ๆ ไป เมื่อรู้ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ และอนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่ $x = x_0$ สามารถประมาณค่าของ $f(x)$ ด้วยฟังก์ชันพหุนาม $p_n(x)$ ในรูปศูนย์กลางที่ x_0 ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &\cong p_n(x) \\ &= b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots \\ &\quad + b_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + b_n(x-x_0)^n \end{aligned} \qquad (3.2.9)$$

โดยให้ค่าของ $p_n(x)$ และอนุพันธ์เท่ากับค่าของ $f(x)$ และอนุพันธ์ที่ $x = x_0$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} &p_n(x_0) = f(x_0), \quad p_n'(x_0) = f'(x_0), \quad p_n''(x_0) = f''(x_0), \ \ldots, \\ &p_n^{(n)}(x_0) = f_n^{(n)}(x_0) \end{aligned} \qquad (3.2.10)$$

จากเงื่อนไข (3.2.10) สามารถแสดงได้โดยง่ายว่า สัมประสิทธิ์ในสมการ (3.2.9) มีค่าดังนี้

$$b_0 = f(x_0), \quad b_1 = f'(x_0), \quad b_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ \ldots\ , \ b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (3.2.11)$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ในสมการ (3.2.9) ได้

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (3.2.12)$$

ฟังก์ชันพหุนามในสมการ (3.2.12) มีชื่อเรียกว่า พหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n สำหรับฟังก์ชัน f ที่ $x = x_0$ หรือรอบจุด x_0 ถ้าให้ $x - x_0 = h$ แล้วการเขียนพหุนามเทย์เลอร์ของตัวแปร h ซึ่งก็คือระยะห่างจาก x_0 อยู่ในรูป

$$p_n(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k \qquad (3.2.13)$$

จากสมการ (3.2.12) และ (3.2.13) สรุปได้ว่าสามารถสร้างพหุนามเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ โดยใช้ข้อมูลของค่าฟังก์ชันและอนุพันธ์ของ $f(x)$ ที่ $x = x_0$ ได้ 2 รูปแบบดังนี้

รูปแบบที่ 1 พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $f(x)$ รอบจุด $x = x_0$ ในรูปกำลังของ $x - x_0$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (3.2.14)$$

รูปแบบที่ 2 พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $f(x)$ รอบจุด $x = x_0$ ในรูปกำลังของ h

$$p_n(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k \qquad (3.2.15)$$

การประมาณค่าของ $f(x)$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ในสมการ (3.2.14) และ (3.2.15) ควรพิจารณาสำหรับ x ที่อยู่ใกล้ x_0 หรือ สำหรับค่า h ที่มีค่าน้อย เพราะว่าการสร้างพหุนามนี้ใช้ข้อมูลของค่าฟังก์ชันที่และอนุพันธ์ที่ x_0 ดังนั้น การประมาณจะมีความแม่นยำมากขึ้น เมื่อตำแหน่ง x อยู่ใกล้ x_0 นั่นคือ จากรูปแบบทั้งสองของพหุนามเทย์เลอร์

$$f(x) \cong p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad \text{สำหรับ } x \text{ ที่อยู่ใกล้ } x_0$$

หรือ

$$f(x_0+h) \cong p_n(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k \qquad \text{สำหรับ } h \text{ ที่มีค่าน้อย}$$

ตัวอย่างที่ 3.2.1 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n สำหรับ $f(x)=e^x$ รอบจุด $x_0=0$

วิธีทำ หาค่าของ $f^{(k)}(0)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x, & f(0) &= 1,\\
f'(x) &= e^x, & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= e^x, & f''(0) &= 1,\\
f'''(x) &= e^x, & f'''(0) &= 1,\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= e^x, & f^{(n)}(0) &= 1,
\end{aligned}$$

แทนค่า $x_0=0$ และค่าของ $f^{(k)}(0)$ ในสมการ (3.2.14) ได้

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad \square$$

ตัวอย่างที่ 3.2.2 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n สำหรับ $f(x)=\ln x$ รอบจุด $x_0=1$ ในรูปกำลังของ h

วิธีทำ หาค่าของ $f^{(k)}(1)$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln x, & f(1) &= 0,\\
f'(x) &= 1/x, & f'(1) &= 1,\\
f''(x) &= -1/x^2, & f''(1) &= -1,\\
f'''(x) &= 2!/x^3, & f'''(1) &= 2!,\\
f^{(4)}(x) &= -3!/x^4, & f^{(4)}(1) &= -3!,\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n, & f^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1}(n-1)!,
\end{aligned}
$$

แทนค่า $x_0=1$ และค่าของ $f^{(k)}(1)$ ในสมการ (3.2.15) ได้

$$p_n(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}h^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}h^k}{k}$$

□

ตัวอย่างที่ 3.2.3 จงประมาณค่าของ e ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ของ e^x รอบจุด $x_0=0$ ระดับขั้น 1 ถึง 5

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3.2.1 แทนค่า $x=1$ ใน $p_n(x)$

$$
\begin{aligned}
e &\cong p_1(1) = 1 + 1 = 2\\
e &\cong p_2(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} = 2.5\\
e &\cong p_3(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2.666666\\
e &\cong p_4(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2.708333\\
e &\cong p_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.716666
\end{aligned}
$$

ค่าที่แท้จริงของ $e \cong 2.718281$

□

ตัวอย่างที่ 3.2.4 จงประมาณค่าของ $\ln 1.1$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ของ $\ln x$ รอบจุด $x_0 = 1$ ระดับขั้น 1 ถึง 5

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3.2.2 แทนค่า $h = 0.1$ ใน $p_n(1+h)$

$$\begin{aligned}
\ln 1.1 &\cong p_1(1+0.1) = 0.1 \\
\ln 1.1 &\cong p_2(1+0.1) = 0.1 - \frac{(.1)^2}{2} = 0.09500000 \\
\ln 1.1 &\cong p_3(1+0.1) = 0.1 - \frac{(.1)^2}{2} + \frac{(.1)^3}{3} = 0.09533333 \\
\ln 1.1 &\cong p_4(1+0.1) = 0.1 - \frac{(.1)^2}{2} + \frac{(.1)^3}{3} + \frac{(.1)^4}{4} = 0.09530833 \\
\ln 1.1 &\cong p_5(1+0.1) = 0.1 - \frac{(.1)^2}{2} + \frac{(.1)^3}{3} + \frac{(.1)^4}{4} + \frac{(.1)^5}{5} = 0.09531033
\end{aligned}$$

ค่าที่แท้จริงของ $\ln 1.1 \cong 0.09531017$ □

ตัวอย่างที่ 3.2.3 และ 3.2.4 แสดงให้เห็นชัดว่า ถ้าประมาณค่าฟังก์ชันด้วยพหุนามเทย์เลอร์ที่มีระดับขั้นที่สูงขึ้น จะได้ค่าประมาณที่ใกล้ค่าที่แท้จริงมากยิ่งขึ้น และค่าประมาณของ e ที่ได้มีความแม่นยำน้อยกว่าค่าประมาณของ $\ln 1.1$ เพราะว่า ระยะห่าง $x - x_0 = 1$ ในตัวอย่างที่ 3.2.3 มากกว่า $h = x - x_0 = 0.1$ ในตัวอย่างที่ 3.2.4

ตัวอย่างที่ 3.2.5 จงสร้างพหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $f(x) = x^3$ รอบจุด $x_0 = 1$

วิธีทำ หาค่าของ $f^{(k)}(1)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3, & f(1) &= 1, \\
f'(x) &= 3x^2, & f'(1) &= 3, \\
f''(x) &= 6x, & f''(1) &= 6, \\
f'''(x) &= 6, & f'''(1) &= 6, \\
f^{(4)}(x) &= 0,
\end{aligned}$$

แทนค่า $x_0 = 1$ และค่าของ $f^{(k)}(1)$ ในสมการ (3.2.14) ได้พหุนามเทย์เลอร์สำหรับ $f(x) = x^3$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= 1, \\
p_1(x) &= p_0(x) + f'(1)(x-1) \\
&= 1+3(x-1) \\
&= -2+3x, \\
p_2(x) &= p_1(x) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\
&= 1+3(x-1)+3(x-1)^2 \\
&= 1-3x+3x^2, \\
p_3(x) &= p_2(x) + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\
&= 1+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3 \\
&= x^3
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $f(x) = x^3$ เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น 3 อยู่แล้ว ดังนั้น จึงได้ว่า $f(x) = p_3(x)$ □

3.3 ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation Error)

การประมาณค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์รอบจุด $x = x_0$ ซึ่งเป็นพหุนามในรูปกำลังของ $x - x_0$ ย่อมขึ้นอยู่กับระยะห่างระหว่าง x และ x_0 หรือพจน์ $(x - x_0)^k$ ทฤษฎีบทเทย์เลอร์ในหัวข้อนี้ แสดงให้เห็นชัดเจนเชิงทฤษฎีว่า พจน์เศษเหลือที่เกิดขึ้นเป็นเช่นใด พจน์เศษเหลือนี้จึงเป็นส่วนที่แสดงว่า ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายมีขนาดเท่าใด และยังแสดงได้อีกว่า ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายน้อยลง เมื่อระดับขั้นของพหุนามเทย์เลอร์ที่ใช้ในการประมาณค่าฟังก์ชันสูงขึ้น

ทฤษฎีบทเทย์เลอร์ 3.3.1

ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับ $1, 2, 3, \ldots, n+1$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $I = [a, b]$ ดังนั้น สำหรับ x_0 ใดๆ ใน I สูตรเทย์เลอร์สำหรับ $f(x)$ คือ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \qquad (3.3.1)$$

สำหรับแต่ละ $x \in I$ และ

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \qquad (3.3.2)$$

เรียก $R_n(x)$ ว่า เศษเหลือ

พิสูจน์

จากทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส (fundamental theorem of calculus)

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$

หรือเขียนในรูป

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \\ &= f(x_0) + R_0(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น กรณี $n = 0$ สูตรเทย์เลอร์ในสมการ (3.3.1) เป็นจริง ต่อไปใช้สูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน (integration by parts)

$$\int_{x_0}^{x} u\,dv = [\,uv\,]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} v\,du$$

ดำเนินการกับ $R_0(x)$ โดยให้ $u = f'(t)$ และ $dv = dt$ ทำให้ได้ $du = f''(t)\,dt$ แต่สำหรับ v เลือก $v = -(x-t)$ แทนในสูตรได้

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt &= [\,-f'(t)(x-t)\,]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -(x-t)f''(t)\,dt \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)f''(t)\,dt \\ &= f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x) \end{aligned}$$

ผลที่ได้คือ

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + R_0(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x) \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า สูตรเทย์เลอร์ในสมการ (3.3.1) เป็นจริงสำหรับ $n=1$ ในทำนองเดียวกัน ใช้สูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วนกับ $R_1(x)$ โดยให้

$$u = f''(t) \quad \text{และ} \quad dv = (x-t)dt$$

ดังนั้น

$$du = f'''(t)dt \quad \text{และ} \quad v = -\frac{(x-t)^2}{2}$$

แทนในสูตรได้

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt &= \left[-f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -\frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt \\ &= f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt \\ &= f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + R_2(x)\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + R_0(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + R_2(x)\end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า สูตรเทย์เลอร์ในสมการ (3.3.1) เป็นจริงสำหรับ $n=2$ ดำเนินการในทำนองเดียวกัน สำหรับการพิสูจน์จากขั้น $n=2$ ไป $n=3$

สำหรับกรณีทั่วไป สมมุติว่า ได้ดำเนินการพิสูจน์ถึงขั้น $n-1$

$$\begin{aligned}f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots \\ + f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + R_{n-1}(x)\end{aligned}$$

เมื่อ

$$R_{n-1}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

ใช้สูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วนกับ $R_{n-1}(x)$ โดยให้

$$u = f^{(n)}(t) \quad \text{และ} \quad dv = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

ดังนั้น

$$du = f^{(n+1)}(t)\,dt \quad \text{และ} \quad v = -\frac{(x-t)^n}{n!}$$

แทนในสูตรได้

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt &= \left[-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots \\
&\quad + f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x)
\end{aligned}$$

สรุปผลการพิสูจน์ได้ว่า สูตรเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นจริง ในรูปผลบวกของพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n และพจน์เศษเหลือในรูปปริพันธ์จำกัดเขต □

พจน์เศษเหลือในรูปปริพันธ์จำกัดเขตในทฤษฎีบทเทย์เลอร์ 3.3.1 มีความไม่สะดวกในการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนหรือคาดคะเนค่าคลาดเคลื่อน ทฤษฎีบทต่อไปแสดงวิธีเขียนพจน์เศษเหลือที่ง่ายขึ้นและสะดวกต่อการหาขอบเขต รูปแบบใหม่ของพจน์เศษเหลือนี้มีลักษณะคล้ายกับพจน์ทั่ว ๆ ไปของพหุนามเทย์เลอร์

ทฤษฎีบทเทย์เลอร์ 3.3.2

สำหรับพจน์เศษเหลือในรูปปริพันธ์จำกัดเขตในทฤษฎีบทเทย์เลอร์ 3.3.1 สามารถเขียนในรูป

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3.3.3}$$

เมื่อ ξ เป็นค่าๆ หนึ่ง ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า x และอยู่ระหว่าง x และ x_0

พิสูจน์

สำหรับค่า x ในช่วง $I=[a,b]$ ตรึงค่า x นี้ และสมมุติว่า $x_0 < x$ เพราะว่า $f^{(n+1)}(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ดังนั้น $f^{(n+1)}(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงย่อย $[x_0, x]$ ของ I จากทฤษฎีบทค่าสุดขีด (extreme value theorem) ของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด ทำให้ได้ว่า $f^{(n+1)}(t)$ มีค่าต่ำสุดและสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[x_0, x]$ นั่นคือ มีค่า c และ d ในช่วง $[x_0, x]$ ซึ่งทำให้ $f^{(n+1)}(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และ $f^{(n+1)}(d)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ดังนั้นสำหรับค่า t ใด ๆ ใน $[x_0, x]$ ย่อมได้ว่า

$$f^{(n+1)}(c)\frac{(x-t)^n}{n!} \;\le\; f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} \;\le\; f^{(n+1)}(d)\frac{(x-t)^n}{n!}$$

ผลที่ตามมาคือ

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(c)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \;\le\; \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \;\le\; \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(d)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

พจน์กลางในอสมการ คือ พจน์เศษเหลือในทฤษฎีบท 3.3.1 และเพราะว่า $f^{(n+1)}(c)$ และ $f^{(n+1)}(d)$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้น

$$f^{(n+1)}(c)\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}dt \;\le\; R_n(x) \;\le\; f^{(n+1)}(d)\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

หาค่าของปริพันธ์จำกัดเขตในอสมการได้

$$f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \;\le\; R_n(x) \;\le\; f^{(n+1)}(d)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ซึ่งแสดงว่า $R_n(x)$ เป็นค่า ๆ หนึ่ง ซึ่งอยู่ระหว่างค่าต่ำสุดสัมบูรณ์และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังชันต่อเนื่อง $f^{(n+1)}(t)\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ บนช่วงปิด $[x_0, x]$ โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (intermediate value theorem) ของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด ทำให้ได้ว่า มีค่า ξ ค่าหนึ่งอยู่ระหว่าง x_0 และ x ซึ่ง

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

ดังนั้น รูปแบบของพจน์เศษเหลือในสมการ (3.3.3) เป็นจริง ในทำนองเดียวกันสำหรับการพิสูจน์ในกรณี $x < x_0$ □

จากทฤษฎีบทเทย์เลอร์ ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ สอดคล้องตามเงื่อนไขในทฤษฎีบทเทย์เลอร์ แล้วสามารถเขียนฟังก์ชัน $f(x)$ ในรูป

$$f(x) = \underbrace{p_n(x)}_{\boxed{\text{พหุนามเทย์เลอร์}}} + \underbrace{R_n(x)}_{\boxed{\text{เศษเหลือ}}} \tag{3.3.4}$$

เมื่อ $p_n(x)$ เป็นพหุนามเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณ $f(x)$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ จึงเกิดจากการตัดพจน์เศษเหลือ $R_n(x)$ นี้ออกไป ซึ่งเรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (truncation error) นั่นคือ

ถ้า $f(x) \cong p_n(x)$

แล้ว ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายในการประมาณ คือ $R_n(x)$

และรูปแบบของเศษเหลือที่สะดวกในการหาขอบเขตนั้น ใช้รูปแบบจากสมการ (3.3.3)

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ซึ่งแปรตามค่าของ $(x-x_0)^{n+1}$ ฉะนั้นการประมาณ $f(x)$ ด้วยพหุนามเทย์เลอร์ จะมีความแม่นตรงมากขึ้น เมื่อ x อยู่ใกล้ x_0 และระดับขั้น n สูงขึ้น สำหรับค่า ξ ซึ่งอยู่ระหว่าง x_0 และ x เป็นค่าที่ได้พิสูจน์แล้วว่ามีอยู่จริง แต่ในการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย จะไม่หาค่า ξ อย่างชัดเจน วิธีที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข คือ การหาขอบเขตของ $R_n(x)$ นั่นคือ ถ้า M เป็นค่า ๆ หนึ่งซึ่ง

$$\left| f^{(n+1)}(t) \right| \le M$$

สำหรับแต่ละ t ซึ่งอยู่ระหว่าง x_0 และ x แล้วขอบเขตของค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายคือ