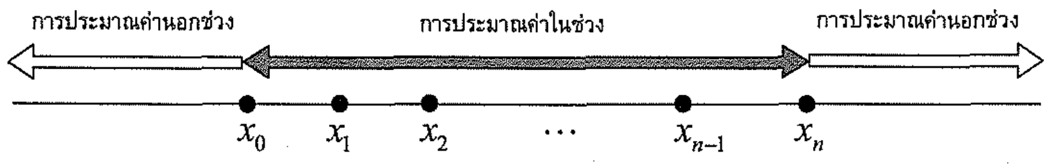
คำศัพท์วิชาการที่เกี่ยวข้องในบทนี้ที่ควรรู้ คือ

1. **จุดต่อ** (nodes, knots or breakpoints) หมายถึง ค่า $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

2. **การประมาณค่าในช่วง** (interpolation) หมายถึง การประมาณค่าที่ตำแหน่ง x ซึ่งอยู่ระหว่างจุดต่อ

3. **การประมาณค่านอกช่วง** (extrapolation) หมายถึง การประมาณค่าที่ตำแหน่ง x ซึ่งไม่อยู่ระหว่างจุดต่อ



รูปที่ 4.1.5

4.2 พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ (Lagrange Interpolating Polynomials)

ในการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตที่สะดวกในการใช้ และเหมาะในการวิเคราะห์สมบัติทางทฤษฎีวิธีหนึ่ง คือ การใช้สูตรลากรองจ์ (Lagrange formula) ซึ่งสร้างพหุนามเพื่ออินเทอร์โพเลตเซตของข้อมูล $n+1$ จุด

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots ,(x_n, y_n)\}$$

ในรูปผลบวกเชิงเส้น (linear combination) ของฟังก์ชัน $l_k(x)$ ดังนี้

$$p_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) \qquad (4.2.1)$$

โดยที่ $l_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots ,n$ เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น n ในรูป

$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{j\neq k} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)} \end{aligned} \qquad (4.2.2)$$

โดยชื่อเรียกของ $l_k(x)$ คือ พหุนามลากรองจ์ และเรียกพหุนามซึ่งเขียนในรูปสมการ (4.2.1) ว่า พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ (Lagrange interpolating polynomial)

โดยการแทนค่า x ด้วย x_j ในสมการ (4.2.2) จะได้สมบัติที่สำคัญของพหุนามลากรองจ์ $l_k(x)$ คือ

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \qquad (4.2.3)$$

และโดยการแทนค่า x ด้วย x_k ในสมการ (4.2.1) ผลที่ได้คือ

$$p_n(x_k) = y_0 l_0(x_k) + y_1 l_1(x_k) + \cdots + y_k l_k(x_k) + \cdots + y_n l_n(x_k) = y_k$$

สำหรับ $k = 0, 1, \ldots, n$ ซึ่งแสดงว่าพหุนาม $p_n(x)$ อินเทอร์โพเลตเซตของข้อมูล $n+1$ จุด $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$

การสร้างพหุนามเพื่ออินเทอร์โพเลตเซตของจุดข้อมูลด้วยสูตรลากรองจ์ มีความสะดวกมากกว่าวิธีหาสัมประสิทธิ์ของพหุนามโดยการแก้ระบบสมการเชิงเส้นดังแสดงในตัวอย่างที่ 4.1.2 โดยพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์มีโครงสร้างพิเศษในรูปผลบวกเชิงเส้นของพหุนามลากรองจ์ $l_k(x)$ โครงสร้างพิเศษนี้เองที่ทำให้สะดวกในการใช้ การแทนค่าและการเขียนโปรแกรม ในที่นี้แสดงการเขียนพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ ระดับขั้น 1, 2, 3

1. พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ ระดับขั้น 1

$$\begin{aligned} p_1(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) \\ &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad (4.2.4) \end{aligned}$$

2. พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ ระดับขั้น 2

$$\begin{aligned} p_2(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) \\ &= y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ &\quad + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \qquad (4.2.5) \end{aligned}$$

3. พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ ระดับขั้น 3

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x) \\
&= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
&\quad + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
\end{aligned}
\qquad (4.2.6)
$$

ตัวอย่างที่ 4.2.1 จงสร้างพหุนามซึ่งอินเทอร์โพเลตข้อมูล 2 จุด $\{(0,1),\ (\pi/3, 0.5)\}$

วิธีทำ

สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์เชิงเส้น โดยแทนค่า $x_0 = 0,\ y_0 = 1,$ $x_1 = \dfrac{\pi}{3},\ y_1 = 0.5$ ในสมการ (4.2.4) ได้

$$p_1(x) = (1)\frac{x-(\pi/3)}{0-(\pi/3)} + (0.5)\frac{x-0}{(\pi/3)-0} = -\frac{3}{2\pi}x + 1$$

ซึ่งเหมือนกับพหุนามอินเทอร์โพเลตเชิงเส้นในตัวอย่างที่ 4.1.1 □

ตัวอย่างที่ 4.2.2 จงสร้างพหุนามซึ่งอินเทอร์โพเลตข้อมูล 3 จุด $\{(-1,-1),\ (1,1),\ (3,27)\}$

วิธีทำ

สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์กำลังสอง โดยแทนค่า $x_0 = -1,\ y_0 = -1,$ $x_1 = 1,\ y_1 = 1,\ x_2 = 3,\ y_2 = 27$ ในสมการ (4.2.5) ได้

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= (-1)\frac{(x-1)(x-3)}{(-1-1)(-1-3)} + (1)\frac{(x-(-1))(x-3)}{(1-(-1))(1-3)} + (27)\frac{(x-(-1))(x-1)}{(3-(-1))(3-1)} \\
&= -3 + x + 3x^2
\end{aligned}
$$

ซึ่งเหมือนกับพหุนามอินเทอร์โพเลตกำลังสองในตัวอย่างที่ 4.1.2 □

ตัวอย่างที่ 4.2.3 จงสร้างพหุนามซึ่งอินเทอร์โพเลตข้อมูล 3 จุด $\{(0,1), (-2,3), (1,5)\}$

วิธีทำ สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์กำลังสอง โดยแทนค่า $x_0 = 0,\ y_0 = 1,$ $x_1 = -2,\ y_1 = 3,\ x_2 = 1,\ y_2 = 5$ ในสมการ (4.2.5) ได้

$$p_2(x) = 1\cdot\frac{(x+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)} + 3\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)} + 5\cdot\frac{(x-0)(x+2)}{(1-0)(1+2)}$$
$$= 1 + \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}x^2$$

□

ตัวอย่างที่ 4.2.4 จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์เชิงเส้นและกำลังสองจากข้อมูลของค่า $\ln x$ ในตาราง แล้วใช้พหุนามที่ได้ประมาณค่าของ $\ln 3$

x	1.0	4.0	5.0
$\ln x$	0	1.386294	1.609438

วิธีทำ

เพราะว่าต้องการประมาณ $\ln 3$ และ 3 อยู่ระหว่าง 1 และ 4 ดังนั้นในการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์เชิงเส้น จึงให้ $x_0 = 1.0,\ x_1 = 4.0$ จากสมการ (4.2.4)

$$p_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

แทนค่าได้

$$p_1(x) = 0\frac{x-4}{1-4} + 1.386294\frac{x-1}{4-1} = \frac{1.386294}{3}(x-1)$$

เพราะฉะนั้น

$$\ln 3 \cong p_1(3) = 0.924196$$

สำหรับพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์กำลังสอง จากสมการ (4.2.5)

$$p_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

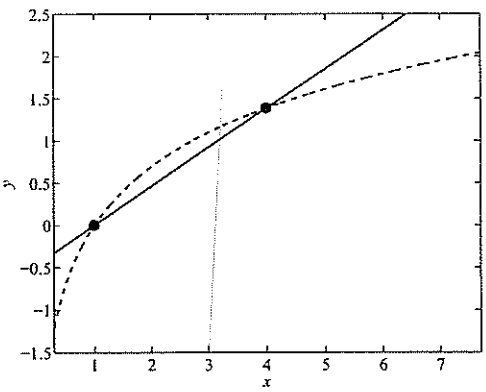
แทนค่าได้

$$p_2(x) = 0 + 1.386294 \frac{(x-1)(x-5)}{(4-1)(4-5)} + 1.609437 \frac{(x-1)(x-4)}{(5-1)(5-4)}$$
$$= -\frac{1.386294}{3}(x-1)(x-5) + \frac{1.609438}{4}(x-1)(x-4)$$

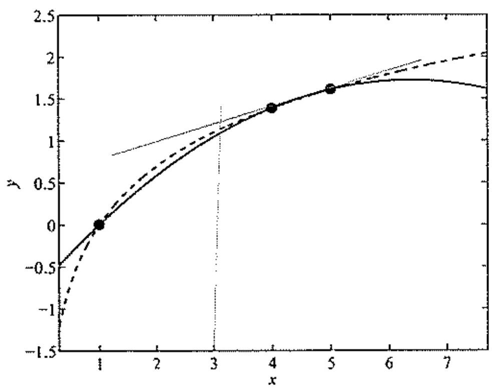
เพราะฉะนั้น

$$\ln 3 \cong p_2(3) = 1.043674$$

ค่าที่แท้จริงของ $\ln 3 = 1.098612$ การประมาณด้วยพหุนามกำลังสองให้ค่าประมาณที่ดีกว่าในกรณีนี้ รูปที่ 4.2.1 (1) - (2) แสดงกราฟของ $\ln x$ ด้วยเส้นประ และกราฟเส้นตรงหรือพหุนามลากรองจ์เชิงเส้นซึ่งอินเทอร์โพเลตจุด $(1,0)$ และ $(4, \ln 4)$ และกราฟพาราโบลาหรือพหุนามลากรองจ์กำลังสองซึ่งอินเทอร์โพเลตจุดข้อมูลทั้งสามจุด



(1)



(2)

รูปที่ 4.2.1

□

ตัวอย่างที่ 4.2.5 จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น 1 ถึง 4 จากข้อมูลในตาราง ซึ่งมาจากฟังก์ชัน $f(x)=\sin(e^x)$ ใช้พหุนามที่ได้ประมาณค่าของ $f(1.2)$ และคำนวณค่าคลาดเคลื่อนโดยเปรียบเทียบกับค่าที่แท้จริง $\sin(e^{1.2})=-0.177577$

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$\sin(e^x)$	0.841471	0.996965	0.410781	-0.973507	0.893855

วิธีทำ

เพราะว่า 1.2 อยู่ระหว่างจุดต่อ 1.0 และ 1.5
ในการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์เชิงเส้น จึงให้ $x_0=1.0,\ x_1=1.5$ แทนค่าในสมการ (4.2.4) ได้

$$p_1(x) = .410781\frac{x-1.5}{1-1.5} + (-.973507)\frac{x-1}{1.5-1}$$

สำหรับพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์กำลังสอง ให้ $x_0=0.5,\ x_1=1.0,\ x_2=1.5$ แทนค่า ในสมการ (4.2.5) ได้

$$p_2(x) = .996965\frac{(x-1)(x-1.5)}{(.5-1)(.5-1.5)} + .410781\frac{(x-.5)(x-1.5)}{(1-.5)(1-1.5)} + (-.973507)\frac{(x-.5)(x-1)}{(1.5-.5)(1.5-1)}$$

ในทำนองเดียวกัน ให้ $x_0=0.5,\ x_1=1.0,\ x_2=1.5,\ x_3=2.0$ และ $x_0=0,\ x_1=0.5,\ x_2=1.0,\ x_3=1.5,\ x_4=2.0$ สำหรับพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น 3 และ 4 ตามลำดับ แทนค่าได้

$$p_3(x) = .841471\frac{(x-.5)(x-1)(x-1.5)}{(0-.5)(0-1)(0-1.5)} + .996965\frac{(x-0)(x-1)(x-1.5)}{(.5-0)(.5-1)(.5-1.5)} + .410781\frac{(x-0)(x-.5)(x-1.5)}{(1-0)(1-.5)(1-1.5)} + (-.973507)\frac{(x-0)(x-.5)(x-1)}{(1.5-0)(1.5-.5)(1.5-1)}$$

$$
\begin{aligned}
p_4(x) = {} & .841471\frac{(x-.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(0-.5)(0-1)(0-1.5)(0-2)} \\
& + .996965\frac{(x-0)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(.5-0)(.5-1)(.5-1.5)(.5-2)} \\
& + .410781\frac{(x-0)(x-.5)(x-1.5)(x-2)}{(1-0)(1-.5)(1-1.5)(1-2)} \\
& + (-.973507)\frac{(x-0)(x-.5)(x-1)(x-2)}{(1.5-0)(1.5-.5)(1.5-1)(1.5-2)} \\
& + .893855\frac{(x-0)(x-.5)(x-1)(x-1.5)}{(2-0)(2-.5)(2-1)(2-1.5)}
\end{aligned}
$$

ประมาณ $\sin(e^{1.2})$ โดยแทนค่า $x=1.2$ ใน $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$ ได้

$$
\begin{aligned}
\sin(e^{1.2}) &\cong p_1(1.2) = -0.142934 \\
\sin(e^{1.2}) &\cong p_2(1.2) = -0.047161 \\
\sin(e^{1.2}) &\cong p_3(1.2) = -0.273948 \\
\sin(e^{1.2}) &\cong p_4(1.2) = -0.181969
\end{aligned}
$$

เมื่อเทียบกับค่าที่แท้จริงของ $\sin(e^{1.2}) = -0.177577$ ค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละกรณี คือ

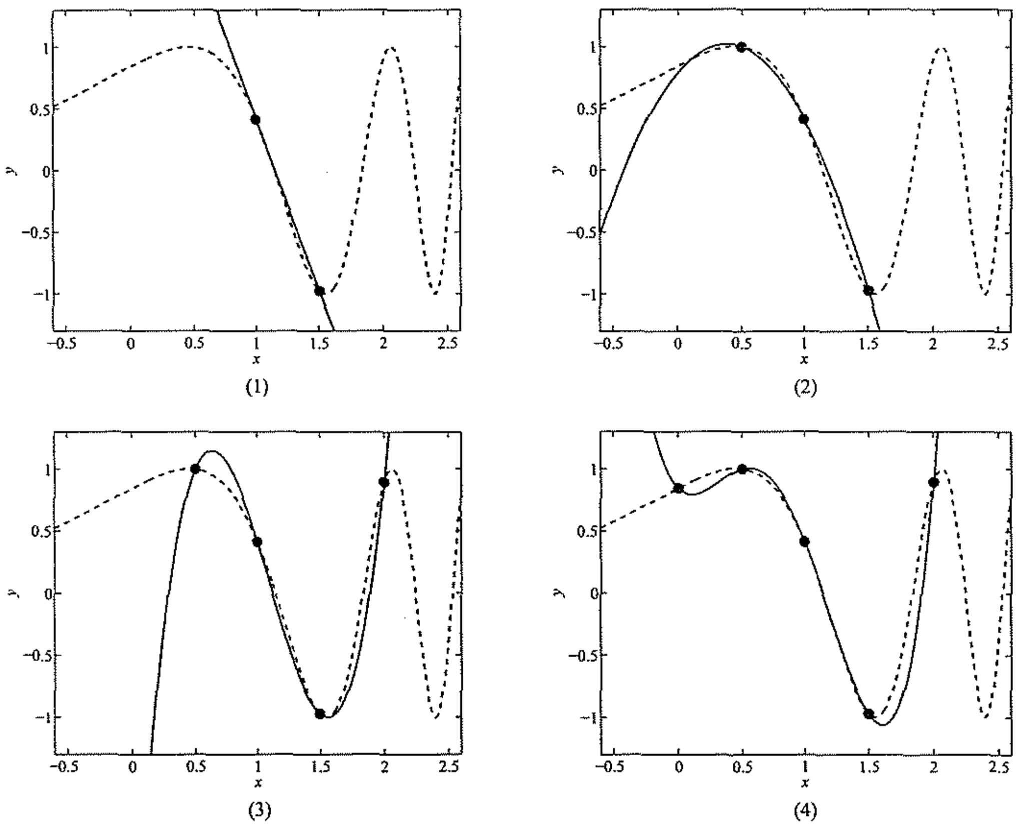
$$
\begin{aligned}
\left|\sin(e^{1.2}) - p_1(1.2)\right| &\cong 0.034643 \\
\left|\sin(e^{1.2}) - p_2(1.2)\right| &\cong 0.130416 \\
\left|\sin(e^{1.2}) - p_3(1.2)\right| &\cong 0.096371 \\
\left|\sin(e^{1.2}) - p_4(1.2)\right| &\cong 0.004392
\end{aligned}
$$

ในตัวอย่างนี้ $p_4(x)$ ประมาณค่า $\sin(e^x)$ ที่ตำแหน่ง $x=1.2$ ได้ดีที่สุด แต่มิได้หมายความว่า พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้นที่สูงกว่าจะประมาณค่าได้ใกล้เคียงกว่าเสมอไป ดูได้จาก $p_1(x)$ ซึ่งประมาณ $\sin(e^{1.2})$ ได้ใกล้เคียงกว่า $p_2(x)$ ในตัวอย่างนี้ยังเห็นได้ว่า ถ้าใช้พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ที่สร้างขึ้นเพื่อประมาณค่านอกช่วงแล้ว ค่าคลาดเคลื่อนจะสูง เช่น ประมาณ $\sin(e^x)$ ที่ตำแหน่ง $x=1.7$ ด้วย $p_1(x)$ และ $p_2(x)$ จะถือว่าเป็นการประมาณค่านอกช่วง และในทำนอง

เดียวกัน สำหรับการประมาณค่านอกช่วงที่ตำแหน่ง $x = 2.1$ ด้วย $p_3(x)$ และ $p_4(x)$ ผลที่ได้จากการคำนวณในการประมาณค่านอกช่วงและค่าคลาดเคลื่อน คือ

$$\sin(e^{1.7}) \cong p_1(1.7) = -1.527222, \quad \left|\sin(e^{1.7}) - p_1(1.7)\right| \cong 0.803460$$
$$\sin(e^{1.7}) \cong p_2(1.7) = -1.750691, \quad \left|\sin(e^{1.7}) - p_2(1.7)\right| \cong 1.026929$$
$$\sin(e^{2.1}) \cong p_3(2.1) = 2.013903, \quad \left|\sin(e^{2.1}) - p_3(2.1)\right| \cong 1.062240$$
$$\sin(e^{2.1}) \cong p_4(2.1) = 2.302978, \quad \left|\sin(e^{2.1}) - p_4(2.1)\right| \cong 1.351315$$

รูปที่ 4.2.2 (1) - (4) แสดงกราฟของ $\sin(e^x)$ ด้วยเส้นประ และกราฟของพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ และ $p_4(x)$ ตามลำดับ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า กราฟเบี่ยงเบนจากกราฟของ $\sin(e^x)$ มากสำหรับช่วงที่อยู่นอกจุดต่อ



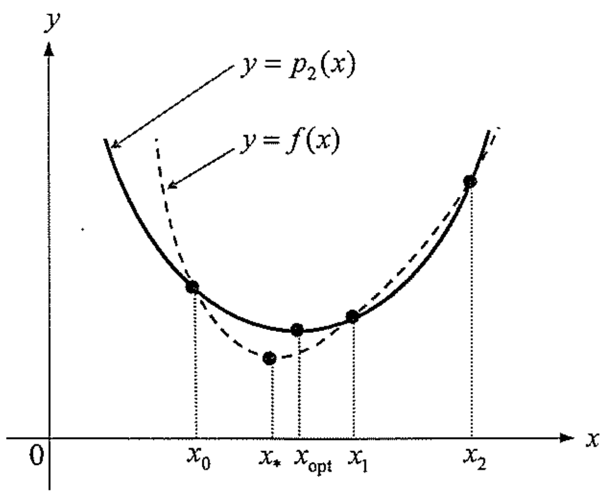
รูปที่ 4.2.2

□

ฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์กำลังสองยังมีประโยชน์ ในการประมาณตำแหน่งที่ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดหรือสูงสุด เพราะว่าสำหรับฟังก์ชันที่เรียบหรือหาอนุพันธ์ได้แล้วในบริเวณที่ฟังก์ชันมีค่าสุดขีดนั้น กราฟของฟังก์ชันมีลักษณะคล้ายกราฟของพาราโบลาดังรูปที่ 4.2.3 ถ้าตำแหน่งที่เกิดค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x)$ อยู่ระหว่าง x_0, x_1 และ x_2 แล้วหาตำแหน่งที่เกิดค่าสุดขีดของพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์กำลังสองโดยหาอนุพันธ์ของ $p_2(x)$ จากสมการ (4.2.5) แล้วให้เท่ากับศูนย์ จะได้

$$x_{\mathrm{opt}} = \frac{y_0(x_1^2-x_2^2) + y_1(x_2^2-x_0^2) + y_2(x_0^2-x_1^2)}{2y_0(x_1-x_2) + 2y_1(x_2-x_0) + 2y_2(x_0-x_1)} \tag{4.2.7}$$

ซึ่งคือตำแหน่งทีเกิดค่าสุดขีดของ $p_2(x)$ และใช้ประมาณตำแหน่งที่เกิดค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่ x_* ดังแสดงในรูปที่ 4.2.3



รูปที่ 4.2.3

ตัวอย่างที่ 4.2.6 จงใช้พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์กำลังสองประมาณค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x) = x + \frac{1}{x}$ โดยให้จุดต่อเป็น $x_0 = 0.1$, $x_1 = 0.5$ และ $x_2 = 5.0$

วิธีทำ คำนวณค่าของ $f(x)$ ที่จุดต่อ

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.1, & y_0 &= f(x_0) = 10.1 \\ x_1 &= 0.5, & y_1 &= f(x_1) = 2.5 \\ x_2 &= 5.0, & y_2 &= f(x_2) = 5.2 \end{aligned}$$

แทนค่าในสมการ (4.2.7) คำนวณ x_{opt} และ y_{opt} ได้

$$x_{\text{opt}} = 2.675 \quad \text{และ} \quad y_{\text{opt}} = f(x_{\text{opt}}) = 3.048832$$

ซึ่งคือ ค่าประมาณของค่าต่ำสุดของ $f(x)$ อย่างไรก็ตามการประมาณค่าสามารถทำได้แม่นยำยิ่งขึ้น โดยการทำซ้ำ (iteration) นั่นคือ ใช้ค่า $x_{\text{opt}} = 2.675$ แทนที่ x_0 เพราะว่าค่าของ $y_0 = 10.1$ สูงสุด แล้วใช้สูตรจากสมการ (4.2.7) คำนวณค่า x_{opt} ใหม่ ในทำนองเดียวกันสำหรับรอบต่อไป ผลการคำนวณแสดงในตาราง เห็นได้ว่าในรอบที่ 7-9 ค่าของ x_{opt} และ y_{opt} ลู่เข้าสู่ค่า 1.0 และ 2.0 ตามลำดับ โดยค่าต่ำสุดที่แท้จริงของ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ คือ $f(1) = 2$

	x_0	y_0	x_1	y_1	x_2	y_2	x_{opt}	y_{opt}
1	0.100000	10.100000	0.500000	2.500000	5.000000	5.200000	2.675000	3.048832
2	2.675000	3.048832	0.500000	2.500000	5.000000	5.200000	0.743750	2.088288
3	2.675000	3.048832	0.500000	2.500000	0.743750	2.088288	1.461992	2.145990
4	1.461992	2.145990	0.500000	2.500000	0.743750	2.088288	1.081032	2.006074
5	1.461992	2.145990	1.081032	2.006074	0.743750	2.088288	1.055653	2.002934
6	1.055653	2.002934	1.081032	2.006074	0.743750	2.088288	1.015836	2.000247
7	1.055653	2.002934	1.081032	2.006074	1.015836	2.000247	0.996627	2.000011
8	1.055653	2.002934	0.996627	2.000011	1.015836	2.000247	0.999681	2.000000
9	0.999681	2.000000	0.996627	2.000011	1.015836	2.000247	1.000029	2.000000

□

4.3 ผลต่างตัวหาร (Divided Differences)

การสร้างพหุนาม $p_n(x)$ เพื่ออินเทอร์โพเลดเซตของข้อมูล $n+1$ จุด

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

อีกรูปแบบหนึ่ง คือ การสร้างในรูปแบบที่สามารถจัด $p_n(x)$ ให้เป็นรูปแบบกำลังซ้อนในได้ เมื่อมีข้อมูลเพิ่มขึ้น สามารถสร้างพหุนามให้มีระดับขั้นสูงขึ้นจากพหุนามเดิม โดยเพิ่มพจน์ใหม่อีกหนึ่งพจน์ ซึ่งเป็นข้อได้เปรียบ เพราะว่าไม่สามารถทำได้ในกรณีของพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ และมีระบบในการคำนวณสัมประสิทธิ์ รูปแบบของพหุนามที่กล่าวมามีลักษณะที่วิเคราะห์ได้ดังนี้

ถ้า $p_{n-1}(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น $n-1$ ซึ่งอินเทอร์โพเลตเซตของข้อมูล n จุด คือ $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ และเมื่อมีข้อมูลใหม่ (x_n, y_n) เพิ่มอีก 1 จุดแล้ว ต้องการสร้าง $p_n(x)$ พหุนามระดับขั้น n จาก $p_{n-1}(x)$ ในรูป

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + r(x) \tag{4.3.1}$$

โดยที่ $p_n(x)$ อินเทอร์โพเลตเซตของข้อมูลชุดเดิมและที่ (x_n, y_n) อีก 1 จุด จากเงื่อนไขที่ว่าทั้ง $p_{n-1}(x)$ และ $p_n(x)$ อินเทอร์โพเลตข้อมูล $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ โดยแทนค่า $x = x_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ในสมการ (4.3.1) ทำให้ได้

$$r(x_k) = p_n(x_k) - p_{n-1}(x_k) = y_k - y_k = 0$$

สำหรับ $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ดังนั้น $r(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น n ในรูป

$$r(x) = c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \tag{4.3.2}$$

เมื่อ c_n เป็นสัมประสิทธิ์ค่าคงตัว จากสมการ (4.3.1) และ (4.3.2) ทำให้เห็นโครงสร้างของพหุนามอินเทอร์โพเลตจากระดับขั้น 0 ถึง n อย่างเป็นระบบดังนี้

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= y_0 \\
p_1(x) &= p_0(x) + c_1(x-x_0) \\
p_2(x) &= p_1(x) + c_2(x-x_0)(x-x_1) \\
p_3(x) &= p_2(x) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&\vdots \\
p_{n-1}(x) &= p_{n-2}(x) + c_{n-1}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2}) \\
p_n(x) &= p_{n-1}(x) + c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})
\end{aligned}
\tag{4.3.3}
$$

การหาค่าของสัมประสิทธิ์ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ทำตามลำดับ และใช้สมบัติที่ว่า

$p_1(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	x_0, x_1
$p_2(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	x_0, x_1, x_2
$p_3(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	x_0, x_1, x_2, x_3
$\vdots$		$\vdots$
$p_{n-1}(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$
$p_n(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$

โดยแทนค่า $x = x_1$ ใน $p_1(x)$ ในสมการ (4.3.3) ได้ค่า c_1 ดังนี้

$$
c_1 = \frac{p_1(x_1)-p_0(x_1)}{x_1-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \tag{4.3.4}
$$

ในทำนองเดียวกัน แทนค่า $x = x_2$ ใน $p_2(x)$ ในสมการ (4.3.3) ได้ค่า c_2 ดังนี้

$$
c_2 = \frac{p_2(x_2)-p_1(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{y_2-\left(y_0+\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x_2-x_0)\right)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}
$$

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป

$$c_2 = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \tag{4.3.5}$$

กระบวนการหาสัมประสิทธิ์สำหรับ $c_3, c_4, \ldots, c_n$ สามารถดำเนินต่อไปในลักษณะเดียวกัน เพียงแต่การจัดรูปแบบของสัมประสิทธิ์เหล่านี้มีลักษณะพิเศษที่เรียกว่า ผลต่างตัวหาร ดังเช่น ค่าของ c_1 และ c_2 ในสมการ (4.3.4) และ (4.3.5) เป็นต้น ในหัวข้อนี้ จะพิจารณาระบบการคำนวณผลต่างตัวหารและสมบัติที่เกี่ยวข้อง ประโยชน์โดยตรงของผลต่างตัวหารในเรื่องพหุนามอินเทอร์โพเลต คือ การหาค่าสัมประสิทธิ์ของพหุนามในสมการ (4.3.3) ได้อย่างเป็นระบบ

บทนิยาม 4.3.1 ผลต่างตัวหารอันดับต่าง ๆ ของฟังก์ชัน $f(x)$ มีบทนิยามและสัญกรณ์ดังนี้

ผลต่างตัวหารอันดับศูนย์ของฟังก์ชัน f ที่ x_i คือ ค่าฟังก์ชันของ f ที่ x_i

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{4.3.6}$$

ผลต่างตัวหารอันดับหนึ่งของฟังก์ชัน f ที่ x_i และ x_{i+1} นิยามในรูปของผลต่างตัวหารอันดับศูนย์ คือ

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \tag{4.3.7}$$

ผลต่างตัวหารอันดับสองของฟังก์ชัน f ที่ x_i, x_{i+1} และ x_{i+2} นิยามในรูปของผลต่างตัวหารอันดับสอง คือ

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \tag{4.3.8}$$

การนิยามผลต่างตัวหารดำเนินการตามลำดับได้ โดยผลต่างตัวหารอันดับ k ของฟังก์ชัน f ที่ $x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2},\dots,\ x_{i+k}$ นิยามในรูปของผลต่างตัวหารอันดับ $k-1$ ดังนี้

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \qquad (4.3.9)$$

การคำนวณผลต่างตัวหารสำหรับเซตข้อมูล $\{(x_0, f_0),\ (x_1, f_1),\ \dots,(x_n, f_n)\}$ เมื่อ $f_i = f(x_i)$ สามารถแสดงอย่างเป็นระบบในรูปตารางผลต่างตัวหาร (divided difference table) โดยผลต่างตัวหารอันดับหนึ่ง $f[x_i,\ x_{i+1}]$ คำนวณจากค่า x_i, x_{i+1} และ f_i, f_{i+1} ในคอลัมน์ที่ 1 และ 2 ในตารางที่ 4.3.1 และผลต่างตัวหารอันดับสอง $f[x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2}]$ คำนวณจากผลต่างตัวหารอันดับหนึ่งสองค่าที่อยู่ถัดกัน นั่นคือ $f[x_i,\ x_{i+1}]$ และ $f[x_{i+1},\ x_{i+2}]$ ในคอลัมน์ที่ 3 และค่า $x_i,\ x_{i+2}$ ในคอลัมน์ที่ 1 ในทำนองเดียวกันสำหรับผลต่างตัวหารอันดับสามและอันดับอื่น ๆ ตารางที่ 4.3.1 แสดงเฉพาะผลต่างตัวหารอันดับหนึ่ง สองและสาม

การคำนวณผลต่างตัวหารในรูปแบบตารางผลต่างตัวหารเป็นแบบแผนการคำนวณก่อนยุคที่จะมีคอมพิวเตอร์ ผู้ศึกษาวิชานี้ในเบื้องต้นสามารถสร้างความเข้าใจระเบียบการคำนวณจากตารางได้เป็นอย่างดี และสามารถใช้แบบแผนการคำนวณนี้เป็นแนวทางเพื่อเป็นพื้นฐานการพัฒนาระบบการคำนวณในเรื่องอื่น พิจารณาจากตารางที่ 4.3.1 คอลัมน์ที่ 1 และ 2 คือ ข้อมูลเข้า และคอลัมน์ที่ 3 เป็นต้นไปเป็นผลการคำนวณผลต่างตัวหารในแต่ละรอบในขั้นตอนวิธี 4.3.1

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$\cdots$
x_0	f_0				
x_1	f_1	$f[x_0, x_1]$			
x_2	f_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_{n-2}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
x_{n-1}	f_{n-1}	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
x_n	f_n	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\cdots$

ตารางที่ 4.3.1

ขั้นตอนวิธี 4.3.1 การคำนวณผลต่างตัวหาร

ข้อมูลเข้า : $n,\ x_0,\ x_1, \ldots,\ x_{n-1}, x_n,\ f_0,\ f_1, \ldots,\ f_{n-1}, f_n$.

การเริ่มต้น :

for $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ **do**

$c_k = f_k$

end

การคำนวณผลต่างตัวหาร :

for $k = 1, 2, \ldots, n$ **do**

for $i = n, n\text{-}1, \ldots, k$ **do**

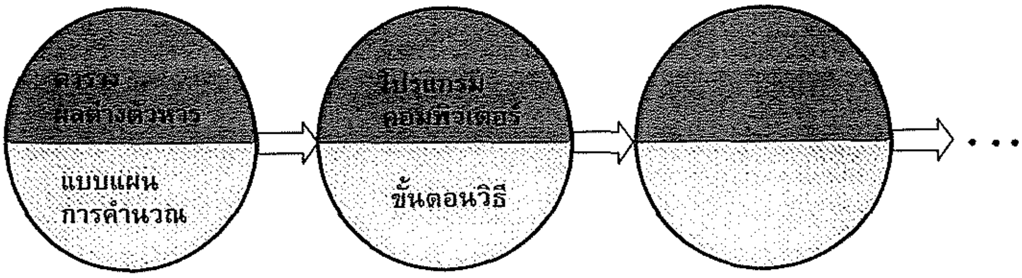
$c_i = (c_i - c_{i-1})/(x_i - x_{i-k})$

end

end

ผลลัพธ์ :

$$c_0 = f_0,\ c_1 = f[x_0, x_1],\ c_2 = f[x_0, x_1, x_2],\ \ldots\ , c_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$



ในยุคที่ไม่มีคอมพิวเตอร์ ตารางผลต่างตัวหารเป็นตัวอย่างที่ดีของผลที่ได้จากการจัดระเบียบแบบแผนการคำนวณผลต่างตัวหารอย่างเป็นระบบ ถึงแม้ว่าในปัจจุบันนี้ จะมีการใช้คอมพิวเตอร์ในการคำนวณปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์อย่างกว้างขวาง และมีโปรแกรมสำเร็จรูปที่มีประสิทธิภาพใช้ได้โดยสะดวก ผู้ศึกษาวิชานี้ในเบื้องต้นก็ยังต้องฝึกการคำนวณจากระดับพื้นฐาน เช่น การสร้างตารางผลต่างตัวหารด้วยตนเอง เพื่อให้เกิดความเข้าใจและเพื่อให้เกิดความคิด ที่อาจจะนำไปพัฒนาวิธีการคำนวณแบบใหม่ที่สอดคล้องกับงานวิจัยเชิงทฤษฎีและทิศทางการพัฒนาเทคโนโลยีได้

ตัวอย่างที่ 4.3.1 สาธิตการคำนวณผลต่างตัวหารของฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น 1 ถึง 3 เพื่อให้ผู้ศึกษาสังเกตว่า ผลต่างตัวหารของฟังก์ชันพหุนามในที่สุดแล้วต้องมีค่าเป็นศูนย์ ในการกำหนดจุดต่อในตัวอย่างที่ 4.3.1 ใช้จุดต่อที่มีระยะห่างเท่า ๆ กัน ผู้ศึกษาสามารถเปลี่ยนเป็นค่าอื่นได้ ซึ่งในที่สุดแล้วผลต่างตัวหารต้องมีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 4.3.1 จงคำนวณผลต่างตัวหารอันดับต่าง ๆ สำหรับฟังก์ชันพหุนาม โดยแสดงในรูปตารางผลต่างตัวหาร

(1) $f(x) = x$ (2) $f(x) = x^2$ (3) $f(x) = x^3$

โดยให้จุดต่อเป็น $1, 2, 3, 4, 5, 6$

วิธีทำ

(1) $f(x) = x \;\Rightarrow\; f_i = f(x_i) = x_i$

จากสมการ (4.3.7) และ (4.3.8) คำนวณผลต่างตัวหารอันดับหนึ่งและสองได้ดังนี้ เช่น

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2-1}{2-1} = 1$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{3-2}{3-2} = 1$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1-1}{3-1} = 0$$

ซึ่งแสดงผลในตารางผลต่างตัวหาร ผลต่างตัวหารอันดับหนึ่งในกรณีนี้ คือ ความชันของเส้นตรง $f(x) = x$ ซึ่งมีค่าเป็น 1 ทำให้ได้ว่าผลต่างตัวหารอันดับสองมีค่าเป็น 0

x_i	$f_i = x_i$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
1	1		
2	2	1	
3	3	1	0
4	4	1	0
5	5	1	0
6	6	1	0

ในทำนองเดียวกัน สำหรับกรณี (2) $f(x) = x^2$ และ (3) $f(x) = x^3$ การคำนวณผลต่างตัวหาร แสดงผลในตารางผลต่างตัวหารได้ดังนี้

(2) $f(x) = x^2 \Rightarrow f_i = f(x_i) = x_i^2$

x_i	$f_i = x_i^2$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	1			
2	4	3		
3	9	5	1	
4	16	7	1	0
5	25	9	1	0
6	36	11	1	0

(3) $f(x) = x^3 \Rightarrow f_i = f(x_i) = x_i^3$

x_i	$f_i = x_i^3$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	1				
2	8	7			
3	27	19	6		
4	64	37	9	1	
5	125	61	12	1	0
6	216	91	15	1	0

จากการคำนวณผลต่างตัวหารทั้งสามกรณี สังเกตได้ว่า

ผลต่างตัวหารอันดับสองของพหุนามระดับขั้น 1 มีค่าเป็นศูนย์
ผลต่างตัวหารอันดับสามของพหุนามระดับขั้น 2 มีค่าเป็นศูนย์
ผลต่างตัวหารอันดับสี่ของพหุนามระดับขั้น 3 มีค่าเป็นศูนย์

ในทำนองเดียวกับอนุพันธ์อันดับ $k+1$ ของพหุนามระดับขั้น k มีค่าเป็นศูนย์ $\square$

ตัวอย่างที่ 4.3.2 จงคำนวณผลต่างตัวหารของฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 8$ โดยแสดงในรูปตารางผลต่างตัวหาร ให้จุดต่อเป็น $2, -3, 1, 6, 0$

วิธีทำ

คำนวณค่าฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 8$ ที่จุดต่อ $2, -3, 1, 6, 0$ ได้ค่าดังแสดงในคอลัมน์ที่ 2 ในตาราง แล้วคำนวณผลต่างตัวหารอันดับหนึ่ง สอง สาม ตามลำดับ และในที่สุดได้ผลต่างตัวหารอันดับสี่มีค่าเป็นศูนย์

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
2	-8				
-3	-98	18			
1	-6	23	-5		
6	64	14	-1	1	
0	-8	12	2	1	0

□

สำหรับกรณีที่จุดต่อ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีระยะห่างเท่า ๆ กัน โดยที่

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

เมื่อ h เป็นระยะห่างระหว่างจุดต่อ การคำนวณผลต่างตัวหารอาจปรับเป็นการคำนวณผลต่างของค่าฟังก์ชันก่อน ในที่นี้ จะพิจารณาตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้า (forward difference operator) ซึ่งแทนด้วย Δ ดังบทนิยามต่อไปนี้