บทนิยาม 4.3.2 ตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้าของฟังก์ชัน $f(x)$ มีบทนิยามและสัญกรณ์ดังนี้

$$\Delta^0 f(x_i) = f(x_i) \tag{4.3.10}$$

$$\Delta f(x_i) = \Delta^1 f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) \tag{4.3.11}$$

$$\begin{aligned} \Delta^k f(x_i) &= \Delta(\Delta^{k-1} f(x_i)) \\ &= \Delta^{k-1}(\Delta f(x_i)) \\ &= \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i), \quad k \geq 1 \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

โดยใช้สัญกรณ์ตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้าสำหรับกรณีที่จุดต่อ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีระยะห่างเท่า ๆ กัน สามารถแสดง**ตารางผลต่าง** (difference table) ในทำนองเดียวกับตารางผลต่างตัวหาร ดังตารางที่ 4.3.2

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\ldots$
x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0			
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$
x_{n-1}	f_{n-1}	Δf_{n-2}	$\Delta^2 f_{n-3}$	$\Delta^3 f_{n-4}$	$\ldots$
x_n	f_n	Δf_{n-1}	$\Delta^2 f_{n-2}$	$\Delta^3 f_{n-3}$	$\ldots$

ตารางที่ 4.3.2

ความสัมพันธ์ระหว่างผลต่างตัวหารและผลต่างในกรณีจุดต่ออยู่ห่างจากกันเป็นระยะ h เท่า ๆ กัน สามารถแสดงโดยใช้สัญกรณ์ของผลต่างตัวหารและตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้าได้ดังนี้ คือ

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{1}{h}\Delta f(x_i)$$

$$\begin{aligned} f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \\ &= \frac{1}{2h}\left[\frac{\Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)}{h}\right] \\ &= \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_i) \end{aligned}$$

และในกรณีผลต่างตัวหารอันดับ k

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_i) \qquad (4.3.13)$$

ตัวอย่างที่ 4.3.3 จงสร้างตารางผลต่างของเซตข้อมูลในตาราง

x_i	0.2	0.4	0.6	0.8
f_i	.9801	.9211	.8253	.6967

(ข้อมูลค่าฟังก์ชันมาจาก $f(x) = \cos x$)

วิธีทำ

จากสมการ (4.3.11) และ (4.3.12) คำนวณผลต่างอันดับหนึ่ง สอง และสามได้

$$\begin{aligned}
\Delta f_0 &= f_1 - f_0 &&= .9211 - .9801 &&= -.0590 \\
\Delta f_1 &= f_2 - f_1 &&= .8253 - .9211 &&= -.0957 \\
\Delta f_2 &= f_3 - f_2 &&= .6967 - .8253 &&= -.1286
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^2 f_0 &= \Delta f_1 - \Delta f_0 &&= -.0957 - (-.0590) &&= -.0367 \\
\Delta^2 f_1 &= \Delta f_2 - \Delta f_1 &&= -.1286 - (-.0957) &&= -.0329
\end{aligned}$$

$$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = -.0329 - (-.0367) = .0038$$

แสดงในตารางผลต่างได้ดังนี้

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0.2	.9801			
0.4	.9211	-.0590		
0.6	.8253	-.0957	-.0367	
0.8	.6967	-.1286	-.0329	.0038

□

ตัวอย่างที่ 4.3.4 จงสร้างตารางผลต่างตัวหารของเซตข้อมูลในตัวอย่างที่ 4.3.3 โดยใช้สูตรในสมการ (4.3.13)

วิธีทำ

ใช้สูตรในสมการ(4.3.13) โดยแทนค่า $h = 0.2$ และค่าจากตารางผลต่างในตัวอย่างที่ 4.3.3 ได้ตารางผลต่างตัวหารดังนี้

x_i	f_i	$\frac{\Delta f_i}{h}$	$\frac{\Delta^2 f_i}{2h^2}$	$\frac{\Delta^3 f_i}{3!h^3}$
0.2	.9801			
0.4	.9211	-.2950		
0.6	.8253	-.4786	-.4590	
0.8	.6967	-.6431	-.4113	.0795

□

ในการศึกษาการประมาณอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในบทที่ 9 ยังจะได้ว่า จากการคำนวณอนุพันธ์ในเชิงทฤษฎี

$$f'(x_i) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้ ถ้า h มีค่าน้อยแล้ว โดยใช้สัญกรณ์ของผลต่างตัวหารและตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้าและสมการ (4.3.13) จะได้ว่า สามารถประมาณอนุพันธ์ของ $y = f(x)$ ที่ $x = x_i$ ในรูป

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{1}{h} \Delta f(x_i) = f[x_i, x_{i+1}]$$

$$f''(x_i) \cong \frac{f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + f(x_i)}{h^2} = \frac{1}{h^2} \Delta^2 f(x_i) = 2f[x_i, x_{i+1}]$$

และ

$$f^{(k)}(x_i) \cong \frac{1}{h^k} \Delta^k f(x_i) = k!\, f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] \qquad (4.3.14)$$

ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประมาณของอนุพันธ์ของฟังก์ชันและผลต่างตัวหาร จะศึกษาการประมาณอนุพันธ์ในรายละเอียดอีกครั้งในบทที่ 9

4.4 พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน
(Newton Divided Difference Interpolating Polynomials)

ในการนำเข้าสู่เรื่องผลต่างตัวหารในหัวข้อ 4.3 ได้ใช้แนวคิดสำหรับการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตที่ว่า ถ้า $p_{n-1}(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น $n-1$ ซึ่งอินเทอร์โพเลตเซตของข้อมูล n จุด คือ $\{(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ และเมื่อมีข้อมูลใหม่ (x_n, y_n) เพิ่มอีก 1 จุดแล้ว โครงสร้างของ $p_n(x)$ ซึ่งเป็นพหุนามระดับขั้น n เกิดจากการปรับ $p_{n-1}(x)$ ด้วยการเพิ่มพจน์พหุนามระดับขั้น n ในรูป

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (4.4.1)$$

เพื่อใช้สัญกรณ์ผลต่างตัวหาร กำหนดให้ค่า y_i มาจากฟังก์ชัน $y = f(x)$ และเขียน f_i แทน $y_i = f(x_i)$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ การคำนวณสัมประสิทธิ์ c_n จัดให้อยู่ในรูปผลต่างตัวหาร ซึ่งเมื่อเขียนพหุนามเรียงจากระดับขั้น 0 ถึงระดับขั้น n จะเห็นโครงสร้างอย่างเป็นระบบดังนี้

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= f[x_0] \\
p_1(x) &= p_0(x) + f[x_0, x_1](x-x_0) \\
p_2(x) &= p_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
p_3(x) &= p_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \qquad (4.4.2) \\
&\ \vdots \\
p_{n-1}(x) &= p_{n-2}(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2}) \\
p_n(x) &= p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

โดยที่

$p_0(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	x_0
$p_1(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	x_0, x_1
$p_2(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	x_0, x_1, x_2
$p_3(x)$	อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ	x_0, x_1, x_2, x_3
$\vdots$		$\vdots$

$p_{n-1}(x)$ อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$

$p_n(x)$ อินเทอร์โพเลตข้อมูลที่จุดต่อ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$

และพหุนามเหล่านี้มีชื่อเรียกว่า พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน ซึ่งทำหน้าที่อินเทอร์โพเลตจุดข้อมูลตามที่กำหนดเช่นเดียวกับพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ เพียงแต่มีโครงสร้างที่แตกต่างกัน ดังที่เปรียบเทียบในตารางที่ 4.4.1

พหุนามระดับขั้น n อินเทอร์โพเลตที่จุด $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots, (x_n, f_n)$	
พหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์	พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน
$p_n(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + f_2 l_2(x) + f_3 l_3(x) + \cdots + f_n l_n(x)$	$p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$
เมื่อ $l_i(x),\ i = 0, 1, \ldots, n$ เป็นพหุนามลากรองจ์ระดับขั้น n	เมื่อ $c_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ เป็นผลต่างตัวหาร $f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$

ตารางที่ 4.4.1

โครงสร้างของพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น n มีรูปแบบเป็นผลบวกเชิงเส้นของพหุนามลากรองจ์ระดับขั้น n ในขณะที่โครงสร้างของพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันระดับขั้น n เมื่อพิจารณาจากสมการ (4.4.2) ในรายละเอียด จะเห็นว่า

$$
\begin{aligned}
p_n(x) \;=\; & f[x_0] \\
& + f[x_0,x_1](x-x_0) \\
& + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
& + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
& \;\vdots \\
& + f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2}) \\
& + f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})
\end{aligned}
\tag{4.4.3}
$$

ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับพหุนามเทย์เลอร์ เพราะว่ารูปแบบของ $p_n(x)$ เป็นผลบวกเชิงเส้นของพหุนามจากระดับขั้น 0 ถึงพหุนามจากระดับขั้น n โดยสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังต่าง ๆ ของ $p_n(x)$ คำนวณจากผลต่างตัวหาร ซึ่งแสดงผลอยู่ที่แนวทแยงมุมในตารางผลต่างตัวหารที่ 4.4.2

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$\cdots$	$f[\cdot,\cdot,\ldots,\cdot]$
x_0	f_0					
x_1	f_1	$f[x_0,x_1]$				
x_2	f_2	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$			
x_3	f_3	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	
x_n	f_n	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n]$

ตารางที่ 4.4.2

ตัวอย่างที่ 4.4.1 จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตข้อมูล 3 จุด $\{(0,1), (-2,3), (1,5)\}$ ในรูปพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน

วิธีทำ

สร้างตารางผลต่างตัวหารได้

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
0	1		$\frac{3-1}{-2-0} = -1$
-2	3	-1	
1	5	2/3	5/3

$\frac{5-3}{1+2}$ $\frac{2/3+1}{1-0}$

จากสมการ (4.4.3) ให้จุดต่อเป็น $x_0 = 0,\ x_1 = -2,\ x_2 = 1$ และแทนค่าผลต่างตัวหารจากค่าตรงแนวทแยงมุมในตาราง จะได้พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันกำลังสองในรูป

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 1 + (-1)(x-0) + (5/3)(x-0)(x-(-2)) \\ &= 1 - x + \frac{5}{3}x(x+2) \end{aligned}$$

ถ้าคูณกระจายแล้วรวมพจน์ จะได้

$$p_2(x) = 1 + \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}x^2$$

ซึ่งก็คือพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ในตัวอย่างที่ 4.2.3 □

ตัวอย่างที่ 4.4.2 จากตัวอย่างที่ 4.3.2 จงเขียนฟังก์ชันพหุนาม $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 8$ ในรูปพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน โดยให้จุดต่อเป็น $2, -3, 1, 6, 0$

วิธีทำ

ตารางผลต่างตัวหารในตัวอย่างที่ 4.3.2 คือ

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
2	-8				
-3	-98	18			
1	-6	23	-5		
6	64	14	-1	1	
0	-8	12	2	1	0

จากสมการ (4.4.3) ให้จุดต่อเป็น $x_0 = 2,\ x_1 = -3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 6$ และแทนค่าผลต่างตัวหารจากค่าในแนวทแยงมุมของตาราง จะได้พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันระดับขั้น 3 ในรูป

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -8 + (18)(x-2) + (-5)(x-2)(x-(-3)) \\ &\quad + (1)(x-2)(x-(-3))(x-1) \\ &= -8 + 18(x-2) - 5(x-2)(x+3) + (x-2)(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

หรือให้จุดต่อเป็น $x_0 = -3,\ x_1 = 1,\ x_2 = 6,\ x_3 = 0$ และแทนค่าผลต่างตัวหารจากค่าในแนวทแยงมุมของตารางผลต่างตัวหารที่สอดคล้องกับจุดต่อทั้งสี่นี้ จะได้พหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันระดับขั้น 3 ในรูป

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -98 + 23(x-(-3)) + (-1)(x-(-3))(x-1) \\ &\quad + (1)(x-(-3))(x-1)(x-6) \\ &= -98 + 23(x+3) - (x+3)(x-1) + (x+3)(x-1)(x-6) \end{aligned}$$

อย่างไรก็ตาม ไม่ว่าจะเขียนพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันระดับขั้น 3 ในกรณีนี้ด้วยจุดต่อชุดใดก็ตาม ย่อมได้ว่า

$$f(x) = p_3(x)$$

เพราะว่าจุดข้อมูลมาจาก $f(x)$ ซึ่งเป็นพหุนามระดับขั้น 3 อยู่แล้ว □

ตัวอย่างที่ 4.4.3 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 4.3.3 จงประมาณค่าของ cos(.25) ด้วยพหุนามอินเทอร์โพเลตเชิงเส้น กำลังสองและกำลังสาม

วิธีทำ

ใช้ตารางผลต่างตัวหารในตัวอย่างที่ 4.3.4

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
0.2	.9801			
0.4	.9211	-.2950	.	
0.6	.8253	-.4786	-.4590	
0.8	.6967	-.6431	-.4113	.0795

ใช้จุดต่อ .2, .4, .6 และ .8 สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันเชิงเส้น กำลังสอง และกำลังสาม ตามลำดับได้

$$p_1(x) = .9801 - .2950(x-.2)$$

$$p_2(x) = p_1(x) - .4590(x-.2)(x-.4)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + .0795(x-.2)(x-.4)(x-.6)$$

ดังนั้น

$$\cos(.25) \cong p_1(.25)$$
$$= .9801 - .2951(.25-.2) = .9653$$

$$\cos(.25) \cong p_2(.25)$$
$$= p_1(.25) - .4590(.25-.2)(.25-.4) = .9688$$

$$\cos(.25) \cong p_3(.25)$$
$$= p_2(.25) + .0795(.25-.2)(.25-.4)(.25-.6) = .9690$$

ค่าที่แท้จริงเลขทศนิยม 4 ตำแหน่งของ $\cos(.25)$ คือ .9689

ในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่ 4.3.3 สามารถใช้ประโยชน์จากตารางผลต่างตัวหารได้เพิ่มเติม เช่น ใช้จุดต่อ .4, .6 และ .8 สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันเชิงเส้นและกำลังสอง แล้วประมาณค่า $\cos x$ ที่ตำแหน่งระหว่างจุดต่อเหล่านี้เป็นต้น □

ตัวอย่างที่ 4.4.4 จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันเชิงเส้นและกำลังสองจากข้อมูลของค่า $\ln x$ ในตัวอย่างที่ 4.2.4 แล้วใช้พหุนามที่ได้ประมาณค่าของ $\ln 3$

x	1.0	4.0	5.0
$\ln x$	0	1.386294	1.609438

วิธีทำ

สร้างตารางผลต่างตัวหารจากข้อมูล 3 จุด ได้

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
1.0	0		
4.0	1.386294	0.462098	
5.0	1.609438	0.223144	-0.059739

ใช้จุดต่อ 1.0, 4.0 และ 5.0 สร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันเชิงเส้นและกำลังสอง ตามลำดับได้

$$p_1(x) = 0 + .462098(x-1)$$

$$p_2(x) = p_1(x) - .059739(x-1)(x-4)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \ln 3 &\cong p_1(3) \\ &= .462098(3-1) = .924196 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln 3 &\cong p_2(3) \\ &= p_1(3) - .059739(3-1)(3-4) = 1.043674 \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นผลลัพธ์เดียวกันกับที่ได้ในตัวอย่างที่ 4.2.4

ในตัวอย่างนี้จะแสดงข้อดีของการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน เช่น ถ้ามีจุดข้อมูลใหม่ (2.0, 0.693147) เพิ่มขึ้น เพียงเพิ่มข้อมูลใหม่นี้ลงในแถวใหม่ต่อจากแถวล่างสุดของตารางเดิม แล้วคำนวณผลต่างตัวหารอันดับหนึ่ง สอง และสาม ดังผลที่แสดงในแถวแรเงาล่างสุดของตารางผลต่างตัวหาร

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1.0	0			
4.0	1.386294	0.462098		
5.0	1.609438	0.223144	-0.059739	
2.0	**0.693147**	**0.305430**	**-0.041143**	**0.018595**

ทำให้สร้างพหุนามกำลังสามโดยปรับจาก $p_2(x)$ เดิมได้

$$p_3(x) = p_2(x) + .018595(x-1)(x-4)(x-5)$$

และประมาณ $\ln 3$ ด้วย $p_3(x)$ นี้ได้

$$\begin{aligned} \ln 3 &\cong p_3(3) \\ &= p_2(3) + .018595(3-1)(3-4)(3-5) = 1.118055 \end{aligned}$$

ถ้าเปรียบเทียบกับการสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์เมื่อมีจุดข้อมูลใหม่ จะต้องเริ่มเขียนในรูปผลบวกของพหุนามลากรองจ์ใหม่ในรูป

$$p_3(x) = 0l_0(x) + 1.386294\, l_1(x) + 1.609438\, l_2(x) + 0.693147\, l_3(x)$$

ไม่สามารถปรับจากพหุนามเดิม $p_2(x)$ ได้ดังที่แสดงข้างต้น จากตาราง สามารถสร้าง $p_2(x)$ ใหม่ได้ โดยใช้จุดต่อ 4.0, 5.0 และ 2.0 ผลที่ได้คือ

$$p_2(x) = 1.386294 + .223144(x-4) - .041143(x-4)(x-5)$$

ประมาณ $\ln 3$ ด้วย $p_2(x)$ ใหม่นี้ได้

$$\begin{aligned} \ln 3 &\cong p_2(3) \\ &= 1.386294 + .223144(3-4) - .041143(3-4)(3-5) \\ &= 1.080864 \end{aligned}$$

ซึ่งใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริงเลขทศนิยม 4 ตำแหน่งของ $\ln 3$ คือ 1.098612 มากกว่าค่าประมาณที่ได้จาก $p_3(x)$ $\square$

การสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน ในกรณีที่จุดต่อ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ อยู่ห่างจากกันเป็นระยะ h เท่าๆ กัน โดยที่

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

จะมีรูปแบบที่ง่ายกว่าในกรณีจุดต่อทั่ว ๆ ไป ด้วยการกำหนดตัวแปรใหม่ s ในรูป

$$s = \frac{x - x_0}{h} \tag{4.4.4}$$

แล้วเขียนผลต่าง $x - x_i$ ในรูป

$$x - x_i = x_0 + sh - (x_0 + ih) = h(s - i)$$

แทนค่า $x - x_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ในสมการ (4.4.3) ได้

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_n(x_0 + sh) \\ &= f[x_0] + sh\,f[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ &\quad + s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)h^n f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

โดยใช้สัญกรณ์ของตัวดำเนินการผลต่างข้างหน้าจากสมการ (4.3.13)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f(x_0)$$

และสัมประสิทธิ์ทวินามรูปทั่วไป

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

แทนในสมการ (4.4.5) ได้

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \tag{4.4.6}$$

สูตรของพหุนามในสมการ (4.4.5) หรือ (4.4.6) มีชื่อเรียกว่า สูตรการอินเทอร์โพเลตข้างหน้านิวตัน-เกรกอรี (Newton-Gregory forward interpolation formula)

ตัวอย่างที่ 4.4.5 จากข้อมูลในตัวอย่างที่ 4.3.3 จงประมาณค่าของ cos(.25) โดยใช้สูตรการอินเทอร์โพเลตข้างหน้านิวตัน-เกรกอรี เชิงเส้น กำลังสองและกำลังสาม

วิธีทำ

ตารางผลต่างในตัวอย่างที่ 4.3.3 ซึ่งมีจุดต่อเป็น $x_0 = .2,\ x_1 = .4,\ x_2 = .6,\ x_3 = .8$ และ $h = .2$ คือ

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
.2	.9801			
.4	.9211	-.0590		
.6	.8253	-.0957	-.0367	
.8	.6967	-.1286	-.0329	.0038

จากสมการ (4.4.6) สูตรการอินเทอร์โพเลตข้างหน้านิวตัน-เกรกอรี เชิงเส้น กำลังสองและกำลังสาม คือ

$$p_1(x) = f[x_0] + s\,\Delta f(x_0)$$
$$p_2(x) = p_1(x) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0)$$
$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0)$$

แทนค่า $x = .25$ ในสมการ (4.4.4) คำนวณค่า s ได้

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{.25 - .2}{.2} = .25$$

คำนวณค่าประมาณของ $\cos(.25)$ ได้

$$\cos(.25) \cong p_1(.25) = .9801 + .25(-.0590) = .9653$$

$$\cos(.25) \cong p_2(.25) = p_1(.25) + \frac{(.25)(.25-1)}{2!}(-.0367) = .9688$$

$$\cos(.25) \cong p_3(.25) = p_2(.25) + \frac{(.25)(.25-1)(.25-2)}{3!}(.0038) = .9690$$

ซึ่งเป็นผลลัพธ์เดียวกันกับที่ได้ในตัวอย่างที่ 4.4.3 □

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. จงประมาณค่าของ $\log_{10}(5)$ ด้วยพหุนามอินเทอร์โพเลตเชิงเส้น โดยการ

   (1) อินเทอร์โพเลตข้อมูล $\log_{10}(4) = 0.60206$ และ $\log_{10}(6) = 0.77815$

   (2) อินเทอร์โพเลตข้อมูล $\log_{10}(4.5) = 0.65321$ และ $\log_{10}(5.5) = 0.74036$

   แล้วคำนวณค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เปอร์เซ็นต์ในแต่ละกรณี โดยเทียบกับค่าที่แท้จริงของ $\log_{10}(5)$

2. จากข้อมูลในข้อ 1

   (1) จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น 2 โดยให้จุดต่อเป็น $x_0 = 4,\ x_1 = 4.5,\ x_2 = 5.5$ แล้วประมาณค่าของ $\log_{10}(5)$

   (2) จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น 2 โดยให้จุดต่อเป็น $x_0 = 4.5,\ x_1 = 5.5,\ x_2 = 6$ แล้วประมาณค่าของ $\log_{10}(5)$

   (3) จงคำนวณค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เปอร์เซ็นต์ในแต่ละกรณี โดยเทียบกับค่าที่แท้จริงของ $\log_{10}(5)$

3. กำหนดตารางค่าของฟังก์ชัน $f(x) = x^4 - 3.2x^3 + 0.96x^2 + 4.61x - 3.46$ มาดังนี้

x	–1.0	–0.5	0.0	0.5	1.0
$f(x)$	–2.9100	–5.0625	–3.4600	–1.2525	–0.0900

   (1) จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น 1, 2 และ 3 อินเทอร์โพเลตข้อมูลในตารางโดยให้จุดต่อเป็น

   $x_0 = -1.0,\quad x_1 = -0.5$

   $x_0 = -0.5,\quad x_1 = 0.0,\quad x_2 = 0.5$

   $x_0 = -0.5,\quad x_1 = 0.0,\quad x_2 = 0.5,\quad x_3 = 1.0$ ตามลำดับ

   (2) จงประมาณค่าของ $f(-0.2)$ โดยใช้พหุนามในข้อ (1)

   (3) จงคำนวณค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เปอร์เซ็นต์ของค่าประมาณของ $f(-0.2)$ ที่ได้ข้อ (2) โดยเทียบกับค่าที่แท้จริง $f(-0.2) = -4.3164$ ค่าใดมีความแม่นยำที่สุด

4. กำหนดตารางข้อมูลของฟังก์ชันมาดังนี้

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
y	0.5772	0.5681	0.5567	0.5403	0.5205

(1) จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น 1 - 4 โดยให้จุดต่อเป็น

$x_0 = 2.0,\quad x_1 = 2.1$

$x_0 = 2.0,\quad x_1 = 2.1,\quad x_2 = 2.2$

$x_0 = 2.0,\quad x_1 = 2.1,\quad x_2 = 2.2,\quad x_3 = 2.3$

$x_0 = 2.0,\quad x_1 = 2.1,\quad x_2 = 2.2,\quad x_3 = 2.3,\quad x_4 = 2.4$ ตามลำดับ

(2) จงประมาณค่าของฟังก์ชันที่ $x = 2.15$ และ $x = 2.25$ ด้วยพหุนามในข้อ (1) และระบุมาว่าเป็นการประมาณค่าในช่วงหรือนอกช่วง

5. กำหนดตารางค่าของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ มาดังนี้

x	0.50	0.75	1.00	1.25	1.5
$f(x)$	0.8000	0.6400	0.5000	0.3902	0.3077

(1) จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น 4 จากข้อมูลในตาราง

(2) จงประมาณค่าของ $f(0.9)$ และ $f(1.75)$ โดยใช้พหุนามในข้อ (1)

(3) จงคำนวณค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เปอร์เซ็นต์ของค่าประมาณของ $f(0.9)$ และ $f(1.75)$ ที่ได้ข้อ (2) โดยเทียบกับค่าที่แท้จริง $f(0.9) = 0.5525$ และ $f(1.75) = 0.2462$

6. กำหนดตารางข้อมูลของฟังก์ชัน $f(x) = \tan x$ มาดังนี้

x	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(x)$	0.4228	0.6841	1.0296	1.5574	2.5722

(1) จงประมาณค่าในช่วงที่ $x = 0.9$ ด้วยพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น 1 ถึง 3 โดยเลือกจุดต่อให้เหมาะสมที่สุด และคำนวณค่าคลาดเคลื่อนเปอร์เซ็นต์ โดยเทียบกับค่าที่แท้จริง

(2) จงประมาณค่านอกช่วงที่ $x = 0.2$ ด้วยพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ระดับขั้น 1 ถึง 3 โดยเลือกจุดต่อให้เหมาะสมที่สุด และคำนวณค่าคลาดเคลื่อนเปอร์เซ็นต์ โดยเทียบกับค่าที่แท้จริง

7. จากข้อมูลในข้อ 1 กำหนดให้ $x_0 = 4,\ x_1 = 4.5,\ x_2 = 5.5,\ x_3 = 6$

(1) จงสร้างตารางผลต่างตัวหารนิวตัน

(2) จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันระดับขั้น 0, 1, 2 และ 3 จากผลต่างตัวหารในตาราง

(3) จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตันระดับขั้น 2 จากข้อมูลที่ $x_1 = 4.5,\ x_2 = 5.5,\ x_3 = 6$

(4) จงประมาณค่าของ $\log_{10}(5)$ โดยใช้พหุนามระดับขั้น 2 ในข้อ (2) และ (3) เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการประมาณด้วยพหุนามอินเทอร์โพเลตลากรองจ์ในข้อ (1) และ (2)

8. กำหนดตารางข้อมูลของ $f(x) = \arctan x$ มาดังนี้

x	6	7	8	9	10
$f(x)$	1.4056	1.4289	1.4464	1.4601	1.4711

(1) จงสร้างตารางผลต่างตัวหาร

(2) จงสร้างพหุนามอินเทอร์โพเลตผลต่างตัวหารนิวตัน $p_0(x),\ p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ และ $p_4(x)$

(3) จงประมาณค่าในช่วงที่ $x = 6.2$ ด้วย $p_1(x),\ p_2(x)$ และ $p_3(x)$ ในข้อ (2) และคำนวณค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เปอร์เซ็นต์โดยเทียบกับค่าที่แท้จริง

(4) จงประมาณค่านอกช่วงที่ $x = 10.3$ ด้วย $p_3(x)$ และ $p_4(x)$ ในข้อ (2) และคำนวณค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เปอร์เซ็นต์โดยเทียบกับค่าที่แท้จริง

9. จงตรวจสอบว่าข้อมูลในตารางมาจากข้อมูลของพหุนามหรือไม่ ถ้าใช่ จงหาระดับขั้นของพหุนามและสร้างพหุนามที่อินเทอร์โพเลตข้อมูลทุกจุดในตาราง

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	31	5	1	1	11	61

10. จงตรวจสอบว่าข้อมูลในตารางมาจากข้อมูลของพหุนามหรือไม่ ถ้าใช่ จงหาระดับขั้นของพหุนามและสร้างพหุนามที่อินเทอร์โพเลตข้อมูลทุกจุดในตาราง

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	38	11	8	11	26	83

บทที่ 5

การฟิตข้อมูล (Data Fitting)

5.1 การฟิตข้อมูลโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (Least-Squares Method for Data Fitting)

การฟิตข้อมูล คือ การสร้างฟังก์ชันที่เชื่อมโยงค่าของตัวแปรจากข้อมูลให้ "ดีที่สุด" หรือ "เหมาะสมที่สุด" บนหลักเกณฑ์และเหตุผล ซึ่งวิเคราะห์ได้เชิงคณิตศาสตร์ พิจารณาจากตัวอย่างการยืดสปริง ซึ่งมีข้อมูลดังแสดงในตาราง

มวล (m)	0.1	0.05	0.15	0.2
ระยะยืดออก (x)	9	5	16	21

จากกฎของฮุก (Hooke's Law)

$$x \propto m \quad \Rightarrow \quad x = km$$

ดังนั้น ต้องการสร้างสมการเส้นตรงที่ดีที่สุดเพื่อประมาณค่า k และเป็นตัวแทนของข้อมูลทั้ง 4 จุดในตารางได้อย่างเมาะสมที่สุด โดยหลักการต่อไปนี้